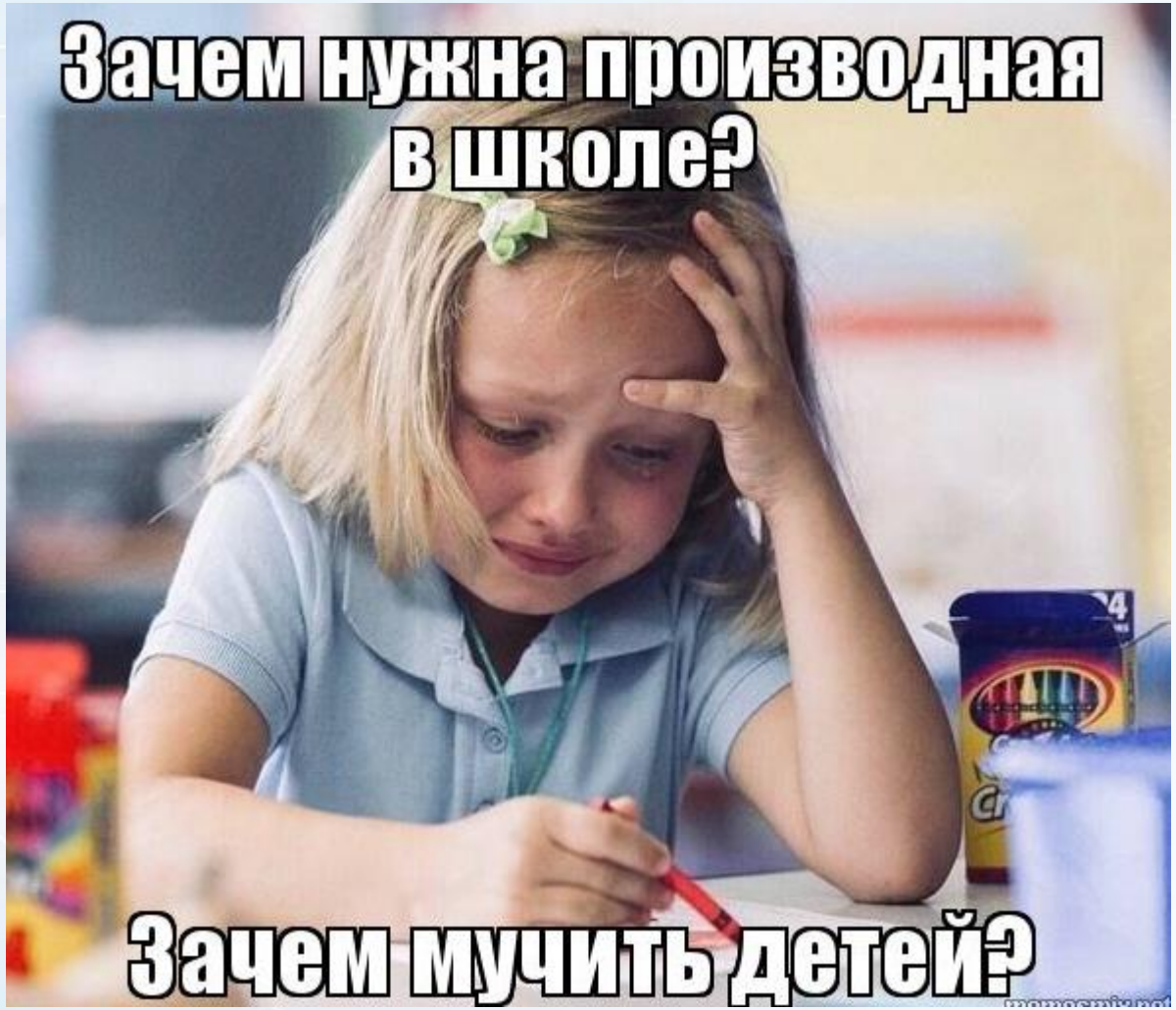
Первый предметный вебинар для специалистов ТМС и учителей математики Краснодарского края «Методический горизонт» на тему:

«Методические особенности преподавания сложных тем курса математики при подготовке к итоговой аттестации»

«Производная в задачах ЕГЭ по математике»

Задорожная Ольга Владимировна,
доцент кафедры математики и информатики
ГБОУ ИРО Краснодарского края, к.п.н.


Зачем нужна производная
в школе?
Зачем мучить детей?

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \to X_0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Пример 1.

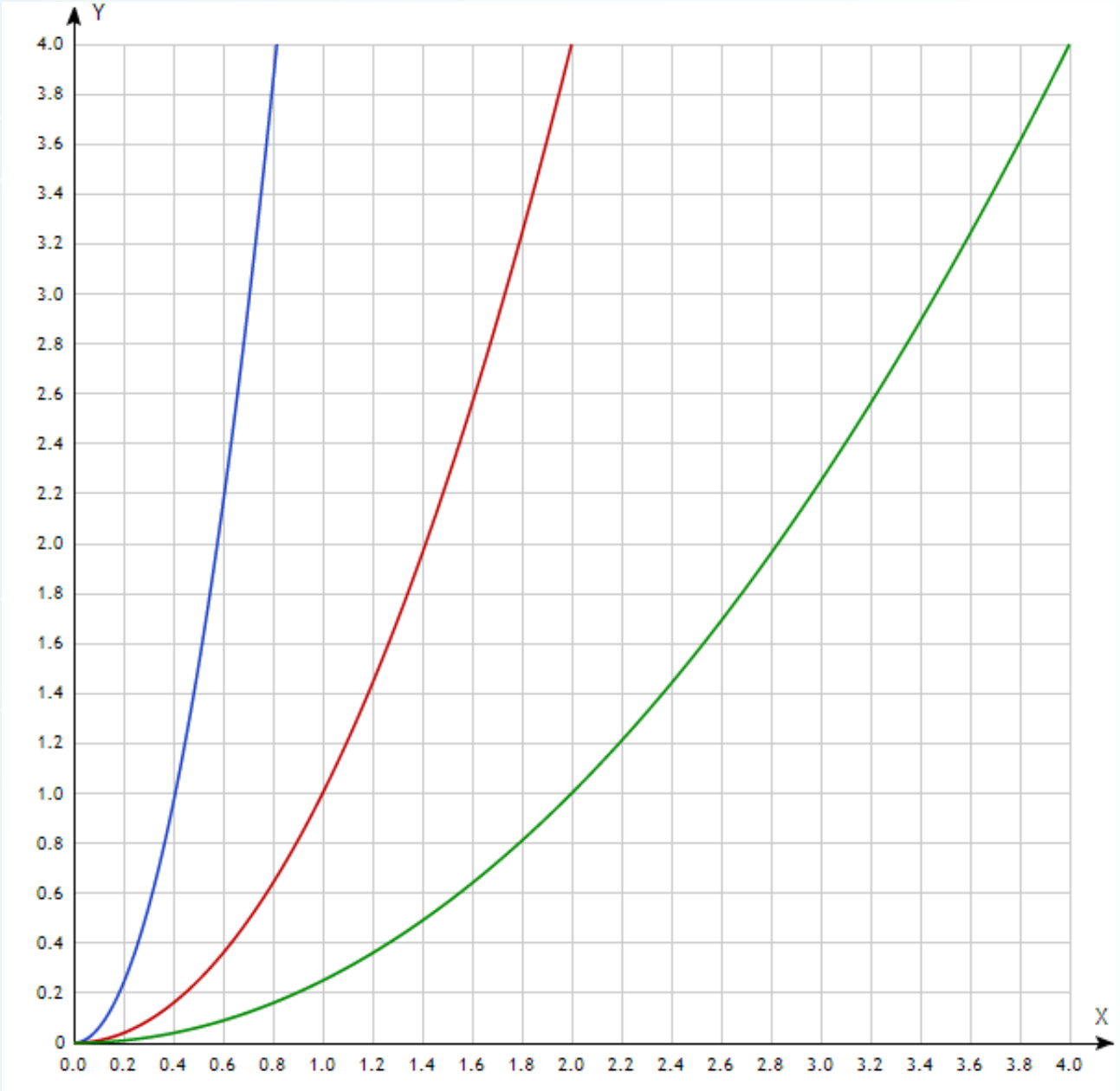
Две ученицы одного класса, Задорожная Оля и Белай Лена, получили за контрольную работу по оценке «четыре». При этом Оля довольна, а Лена опечалена. Такое их отношение к оценке станет понятным, если мы будем знать, что Белай Лена – круглая отличница, а Задорожная Оля ни разу не получала по математике выше «тройки».

Производная – это скорость изменения функции

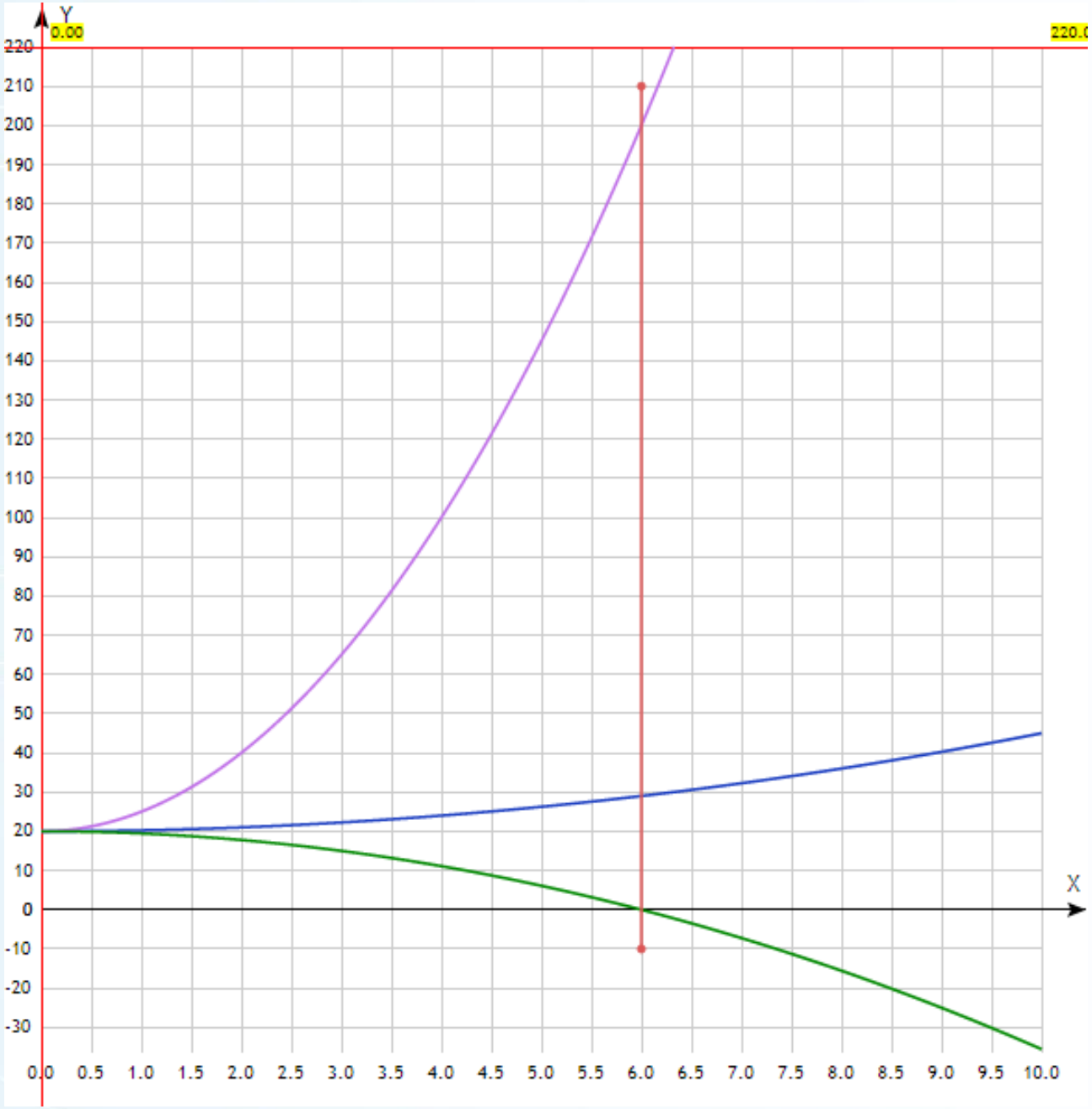
Пример 2.

Как вы думаете,

какая из функций быстрее растет?



Пример 3.
Петя (фиолетовая линия), Вася (синяя линия), Коля (зеленая линия) устроились одновременно на работу. На графике указано, как изменился их доход в течение года.

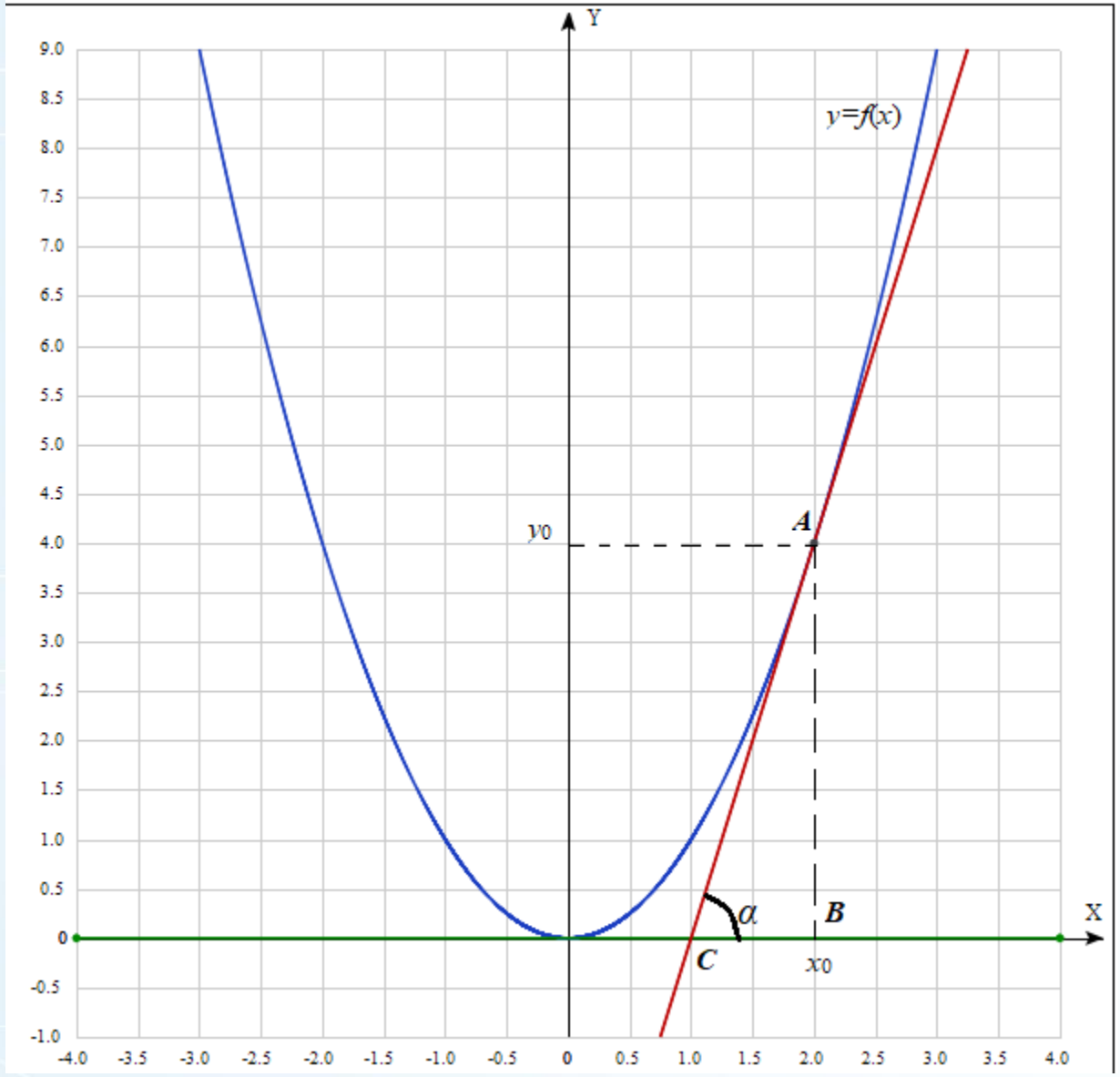


Обозначается производная функции $f'(x)$

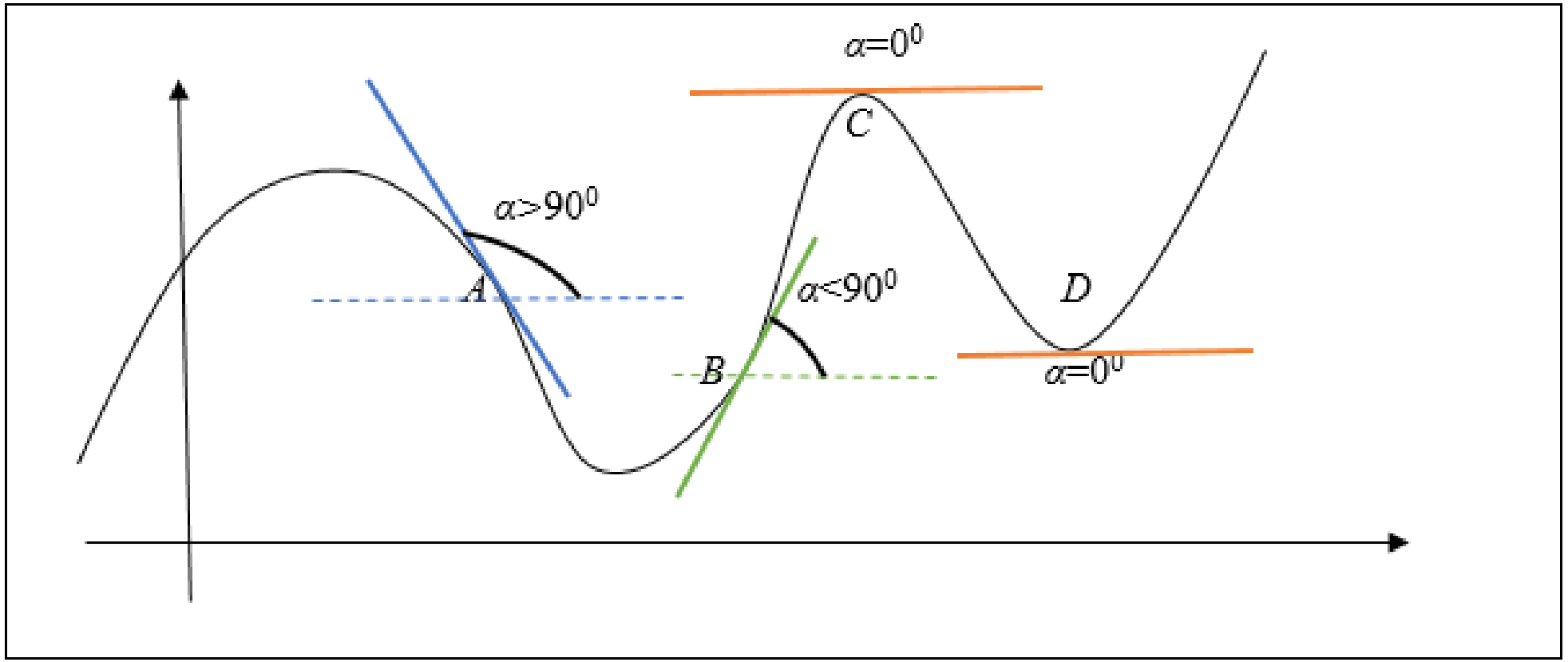
Определение. Производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции в этой точке $f'(x)=tg\alpha$.

Известно, что касательная является прямой, ее уравнение $y=kx+b$, тогда получим важное тождество

$$k = f'(x_0) = tg\alpha = \frac{AB}{BC}$$

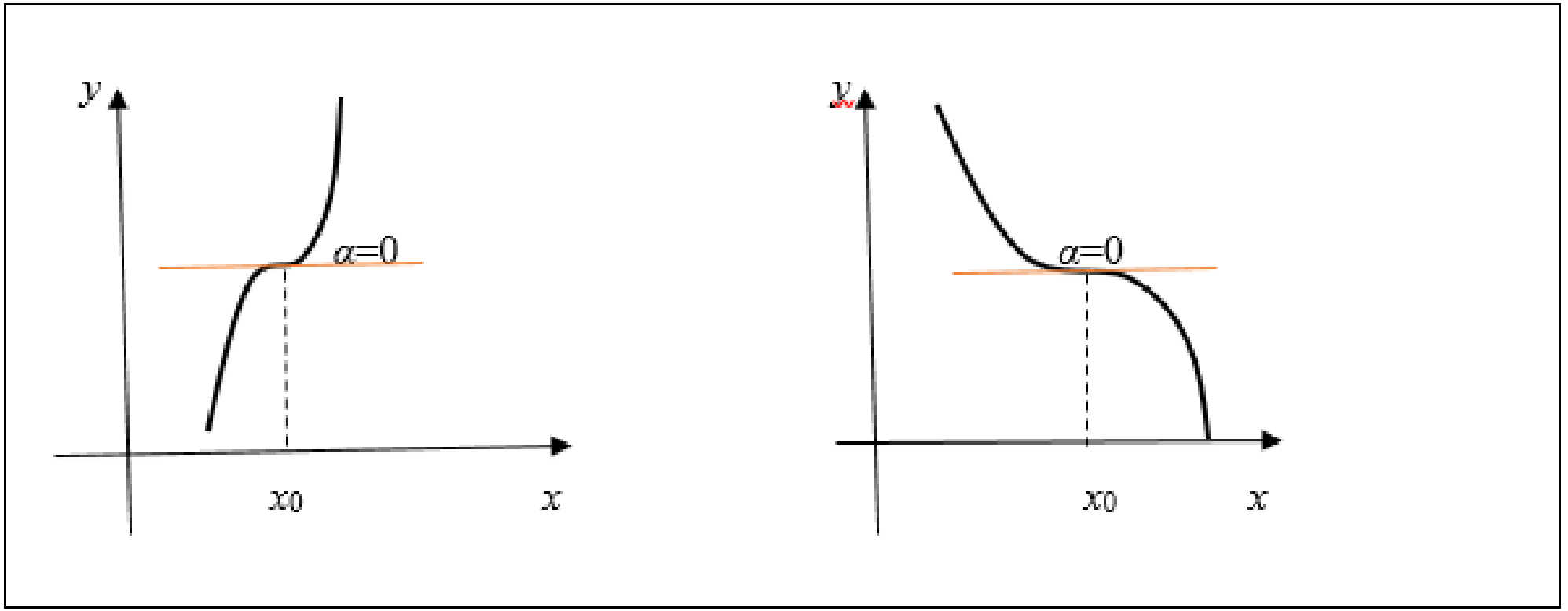


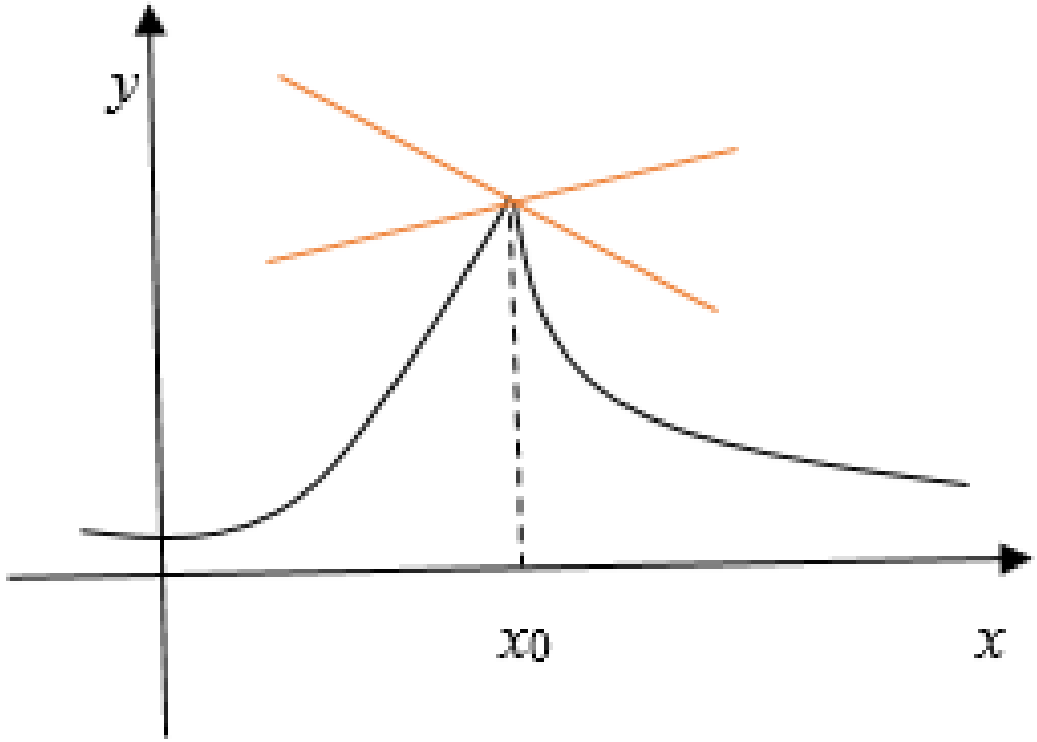
Производная и поведение функции



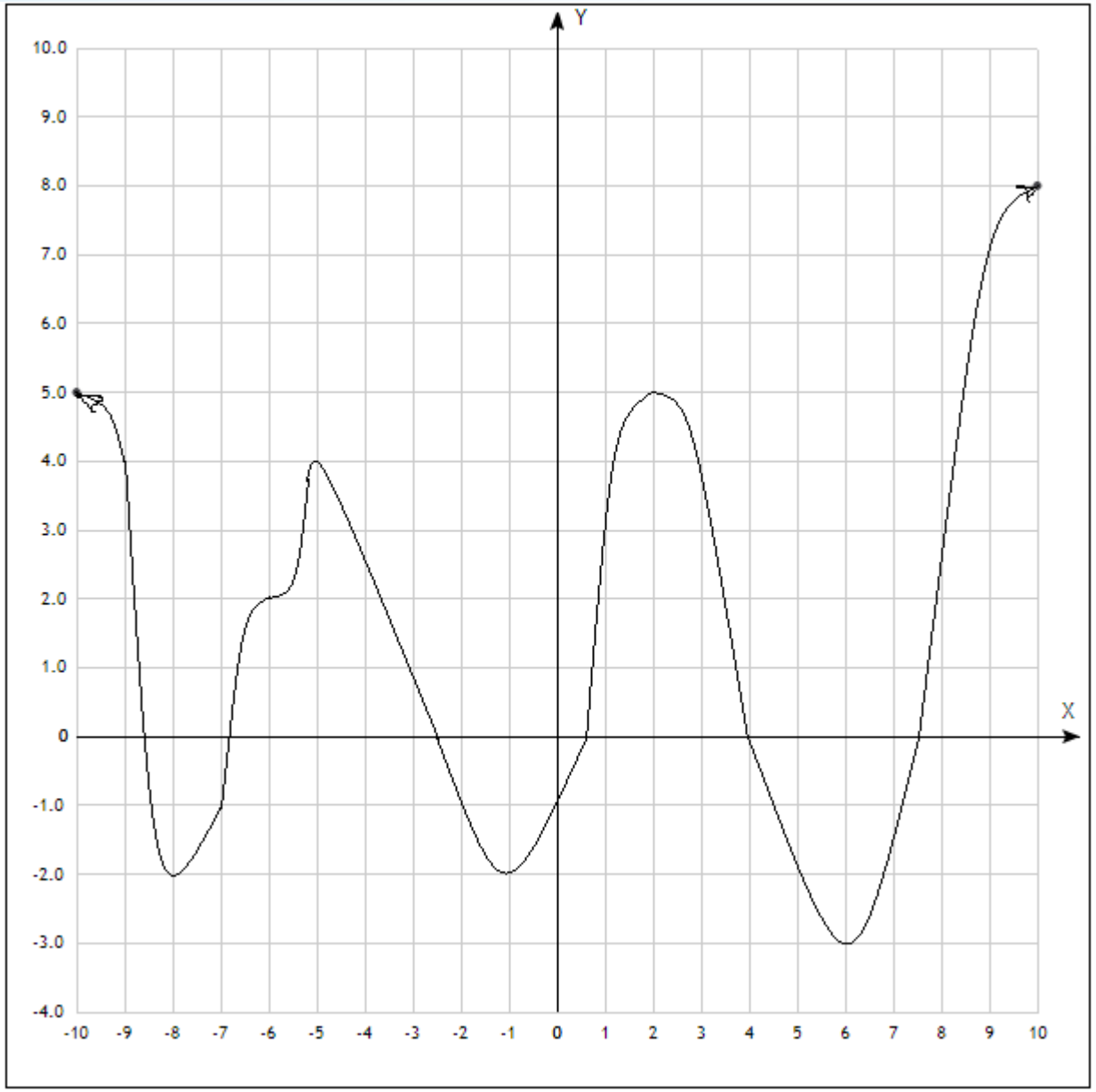
$\alpha>90^0 \Rightarrow tg\alpha<0 \Rightarrow f'(x_0)<0.$ $\alpha<90^0 \Rightarrow tg\alpha>0 \Rightarrow f'(x_0)>0.$ $\alpha=0^0 \Rightarrow tg\alpha=0 \Rightarrow f'(x_0)=0.$

$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	т. минимума	↗	т. максимума	↘


y
α=0
x0
x
y
α=0
x0
x


y
x0
x

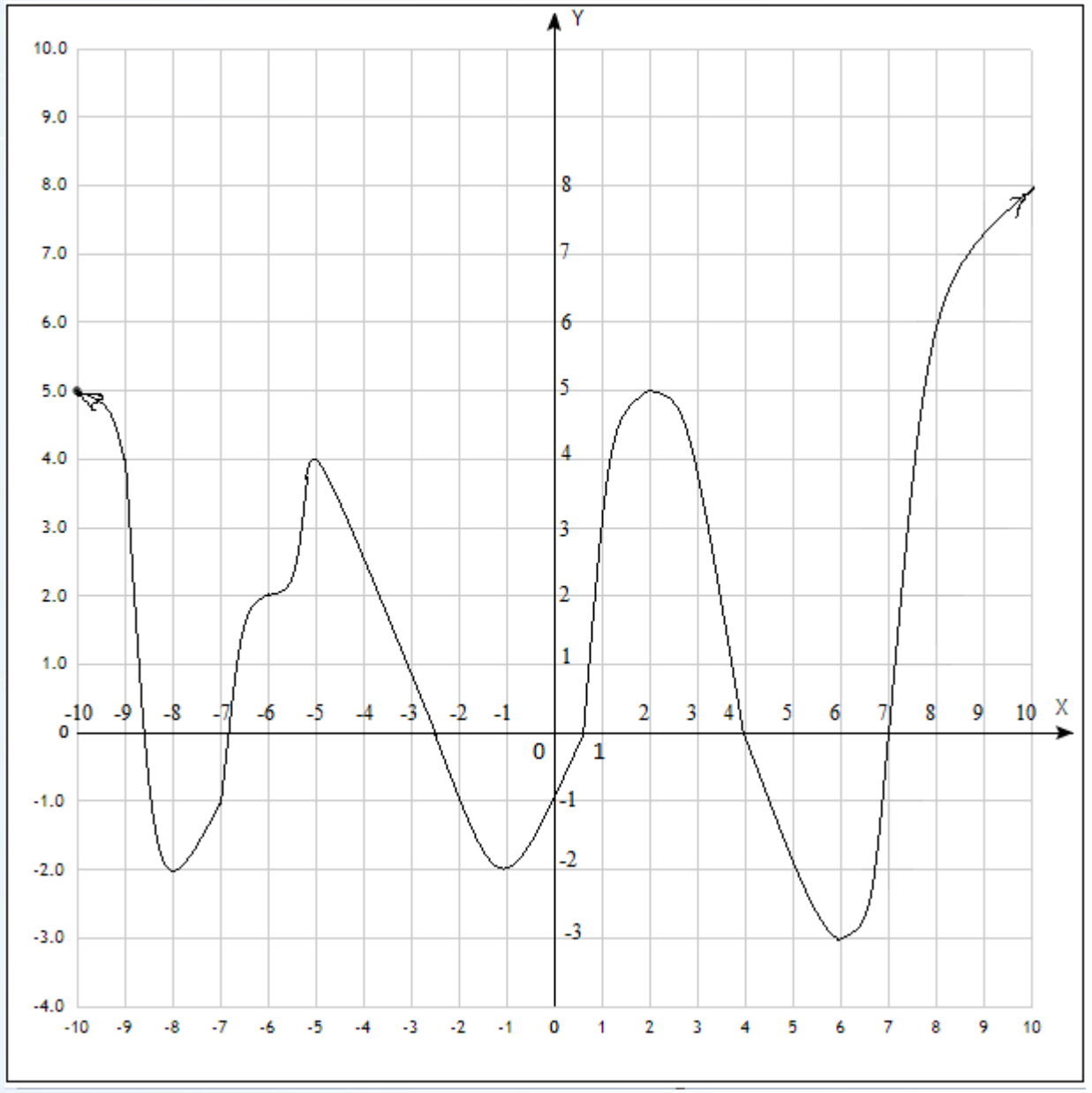
Дан график функции $y=f(x)$ на промежутке (-10;10).



Найти:

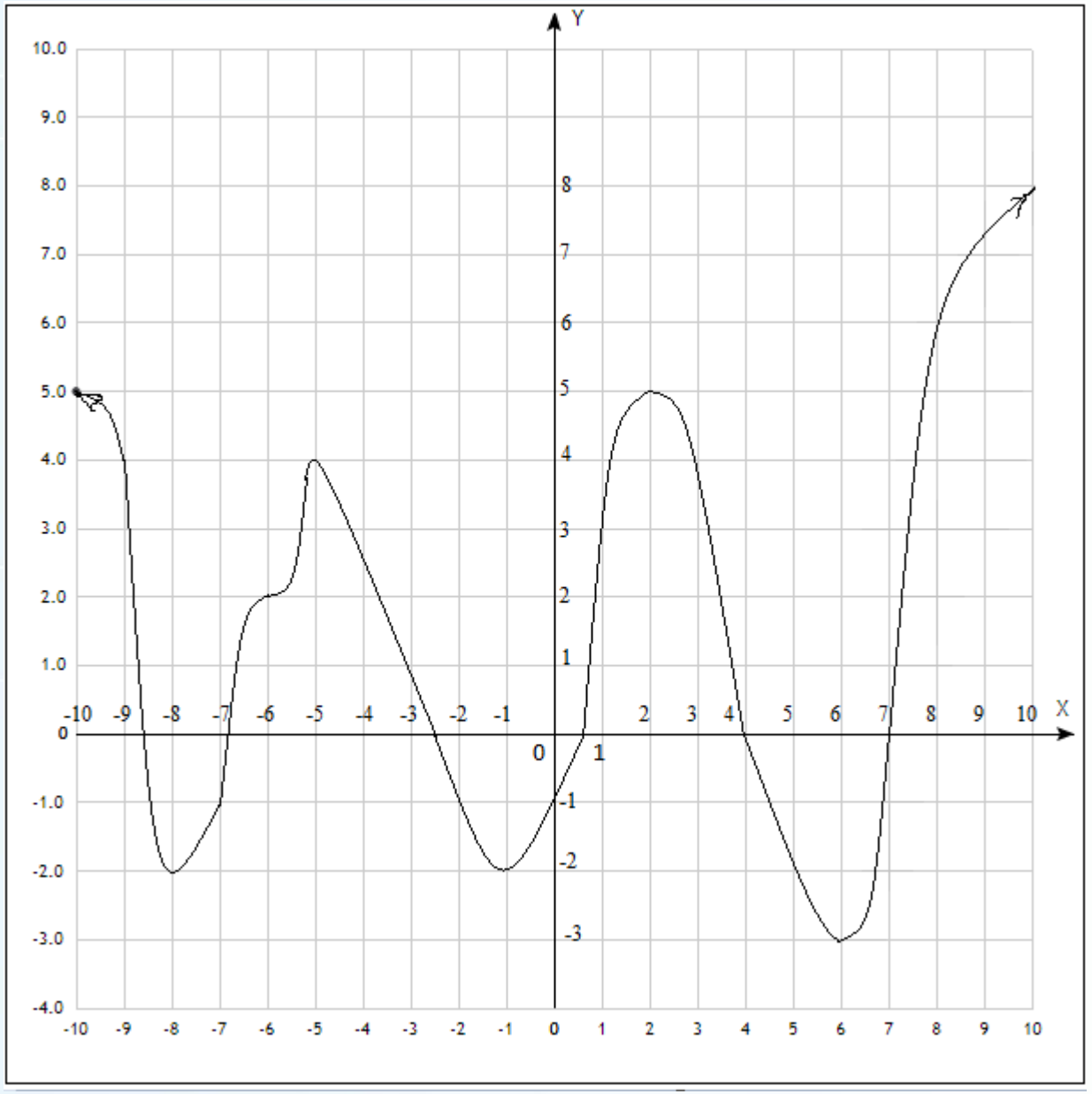
1) Количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y=a$, где $a=const$.

Дан график функции $y=f(x)$ на промежутке (-10;10).



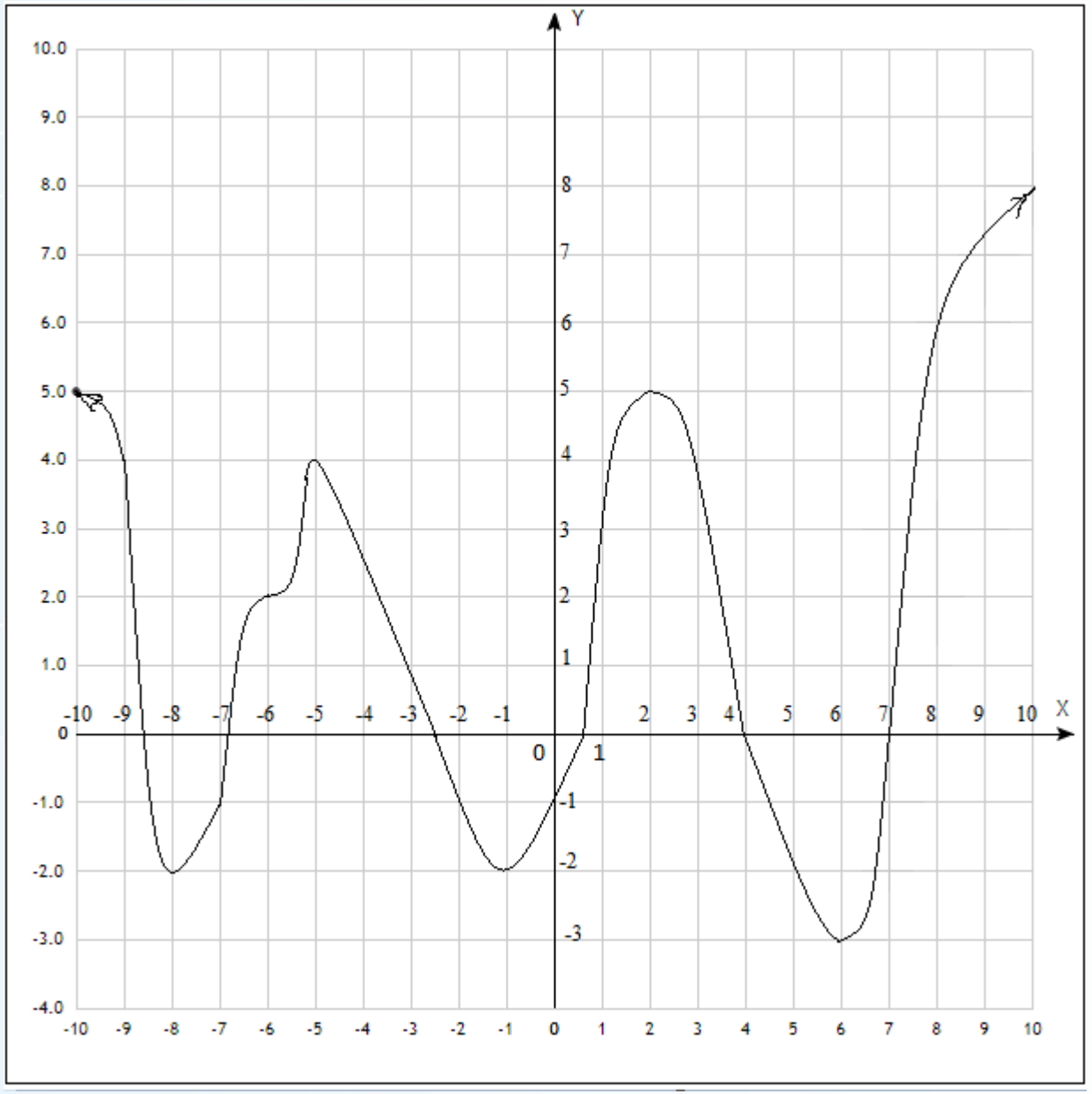
2) Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

Дан график функции $y=f(x)$ на промежутке (-10;10).



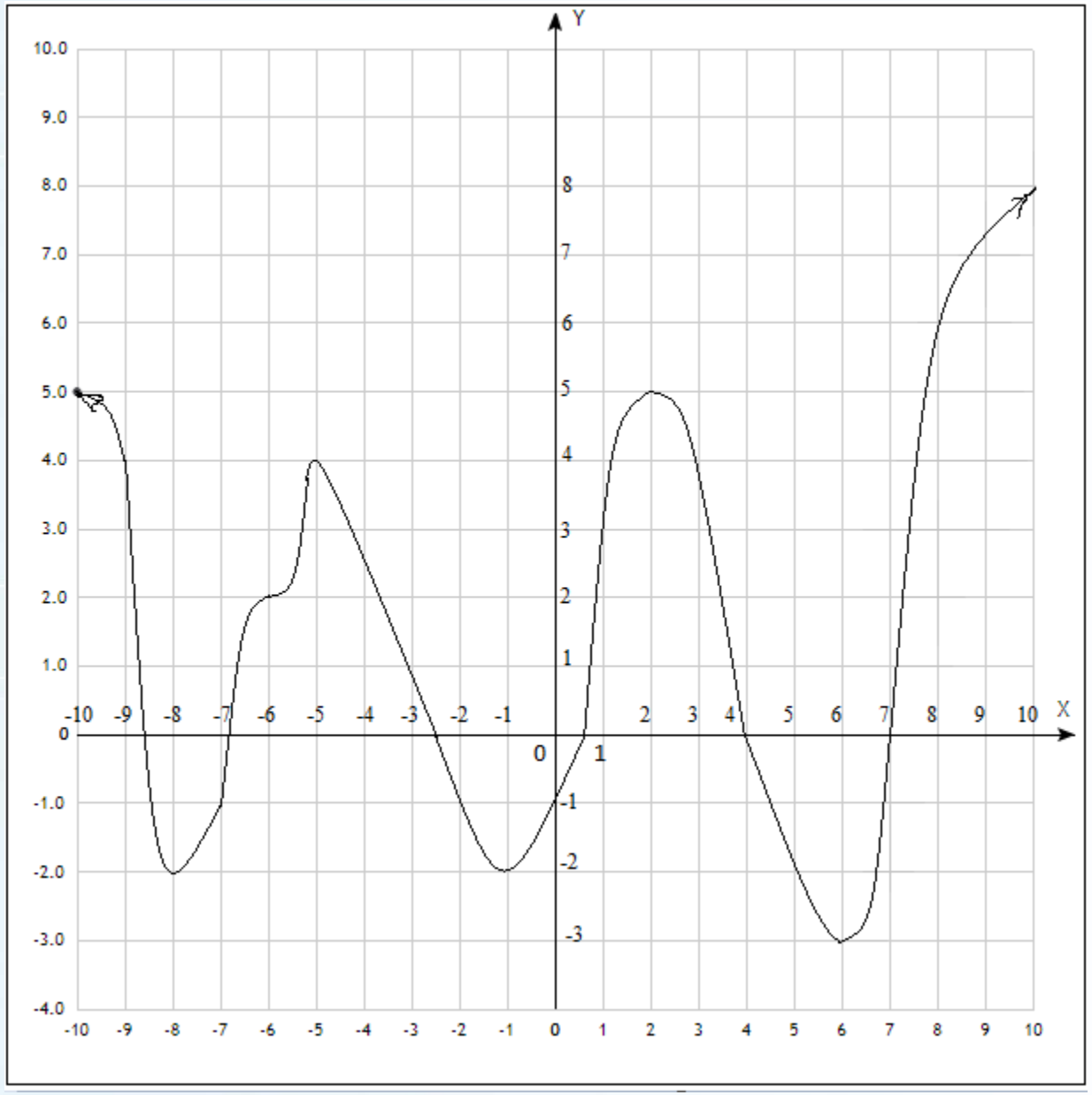
3) Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

Дан график функции $y=f(x)$ на промежутке (-10;10).



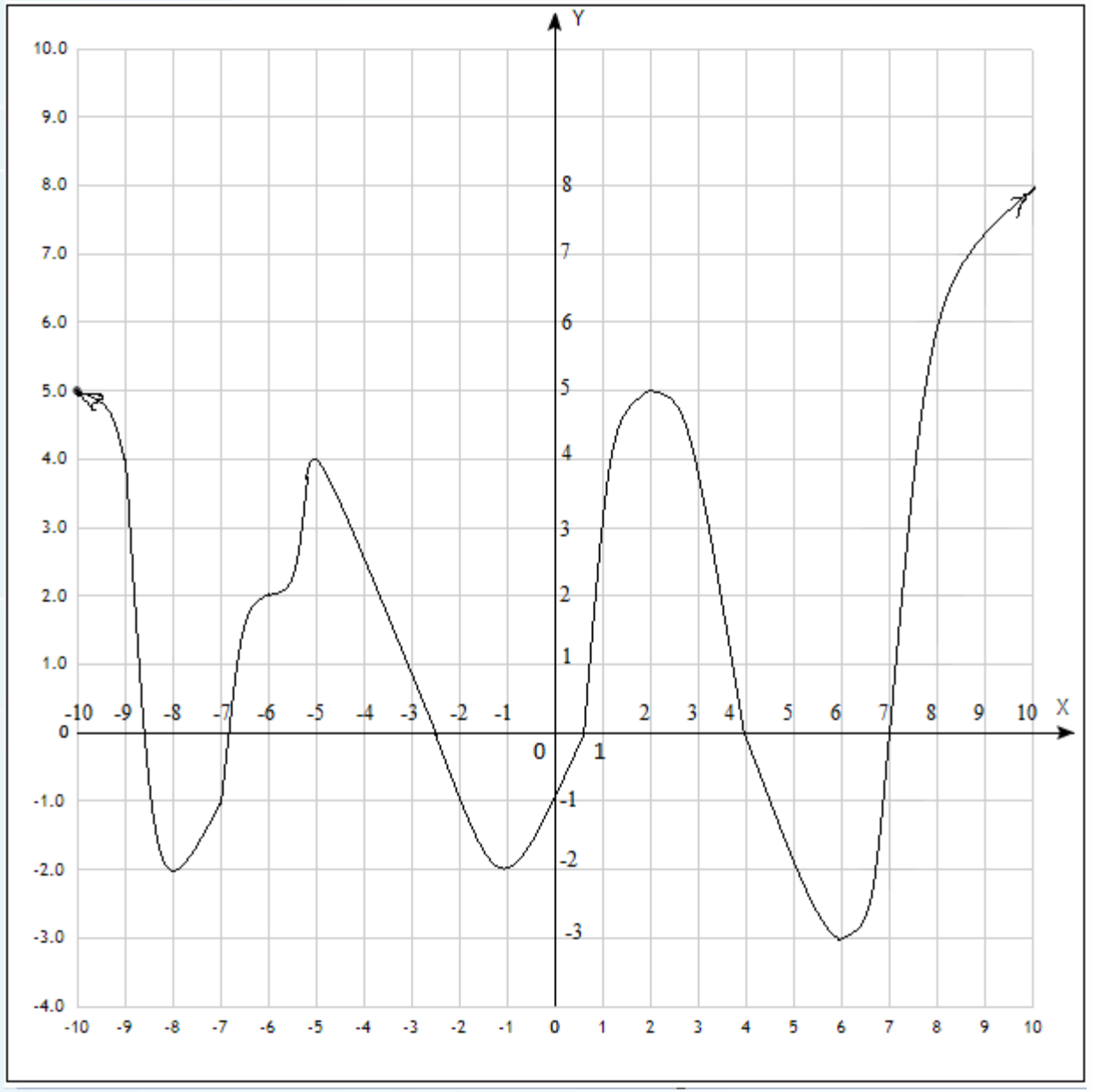
4) Найдите сумму экстремумов функции $f(x)$.

Дан график функции $y=f(x)$ на промежутке (-10;10).



5) В какой точке отрезка [1; 9] функция принимает наибольшее значение?

Дан график функции $y=f(x)$ на промежутке (-10;10).

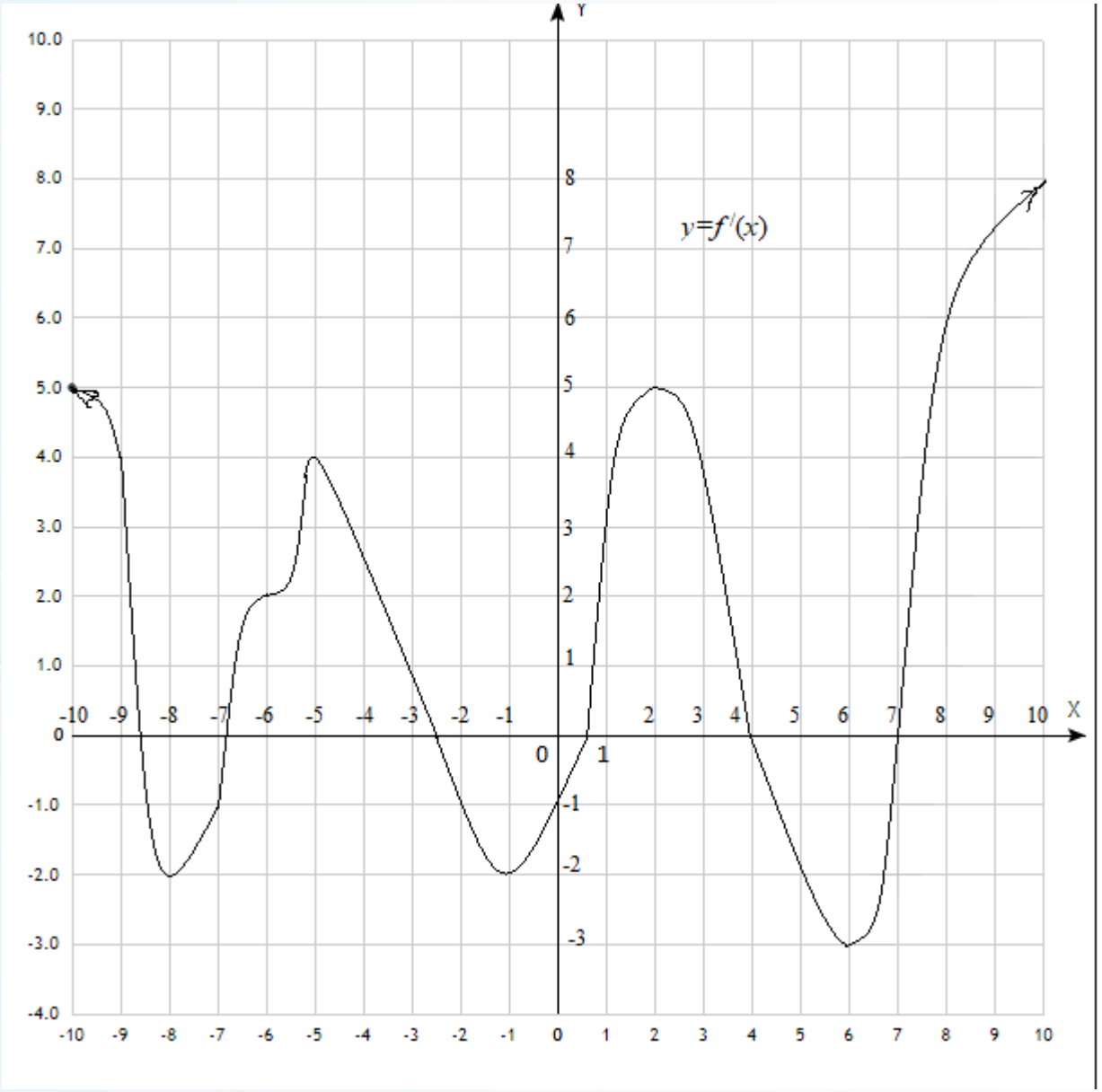


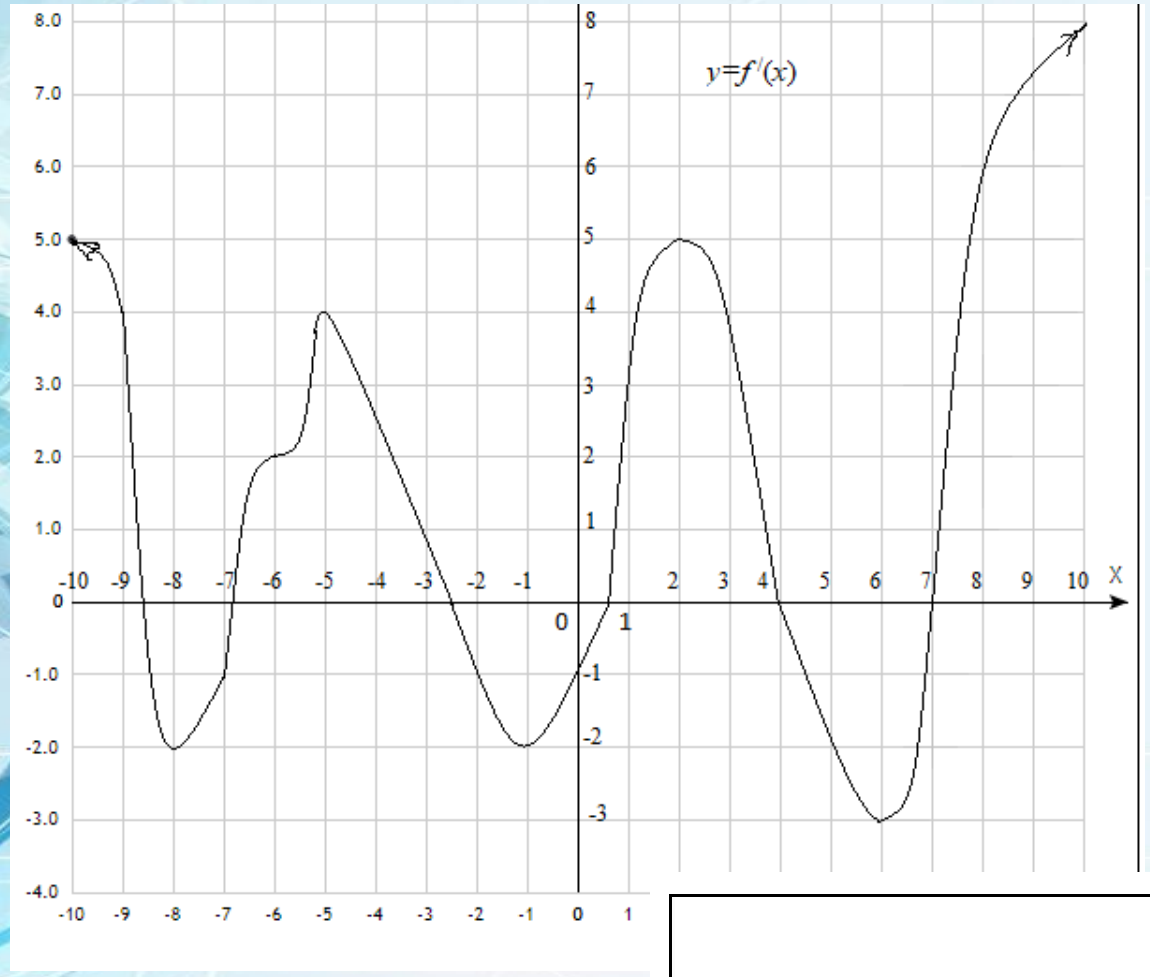
6) На графике функции $y=f(x)$ отмечены точки -4; 1; 2; 8. В какой из этих точек значение производной наименьшее?

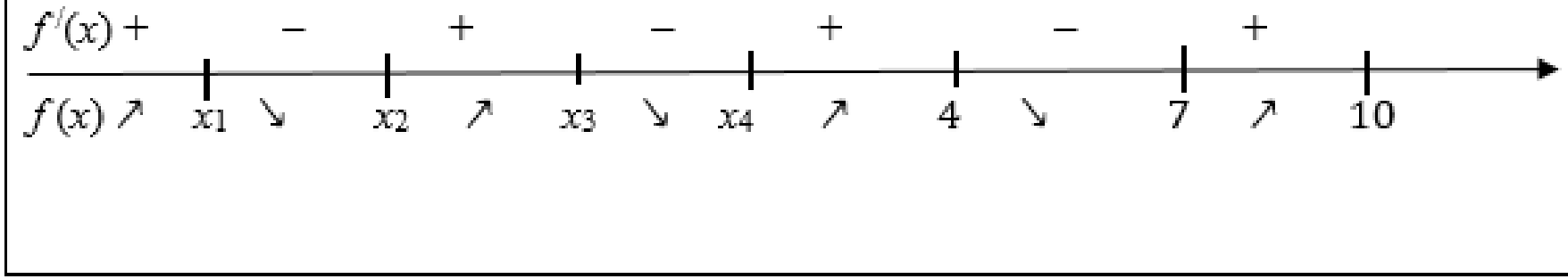
Задача 2.

Дан график производной функции $f'(x)$.

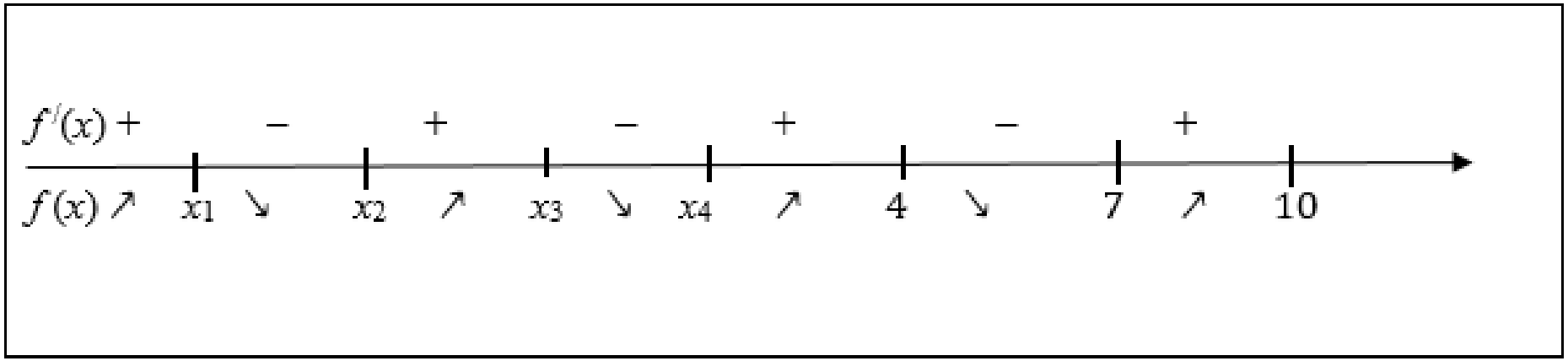
1) В какой точке отрезка [4; 7] функция принимает наименьшее значение?



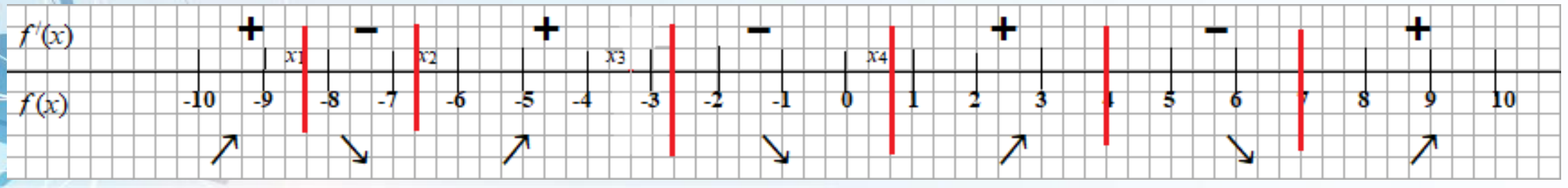




$x_1 \approx -8{,}9$; $x_2 \approx -6{,}8$; $x_3 \approx -2{,}5$; $x_4 \approx 0{,}6$



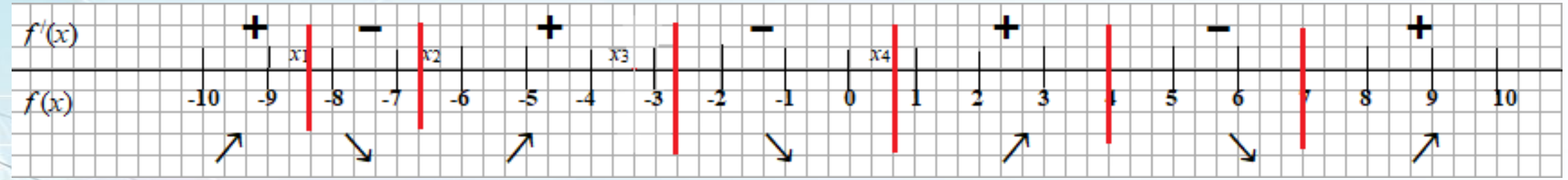
$x_1 \approx -8{,}9$; $x_2 \approx -6{,}8$; $x_3 \approx -2{,}5$; $x_4 \approx 0{,}6$

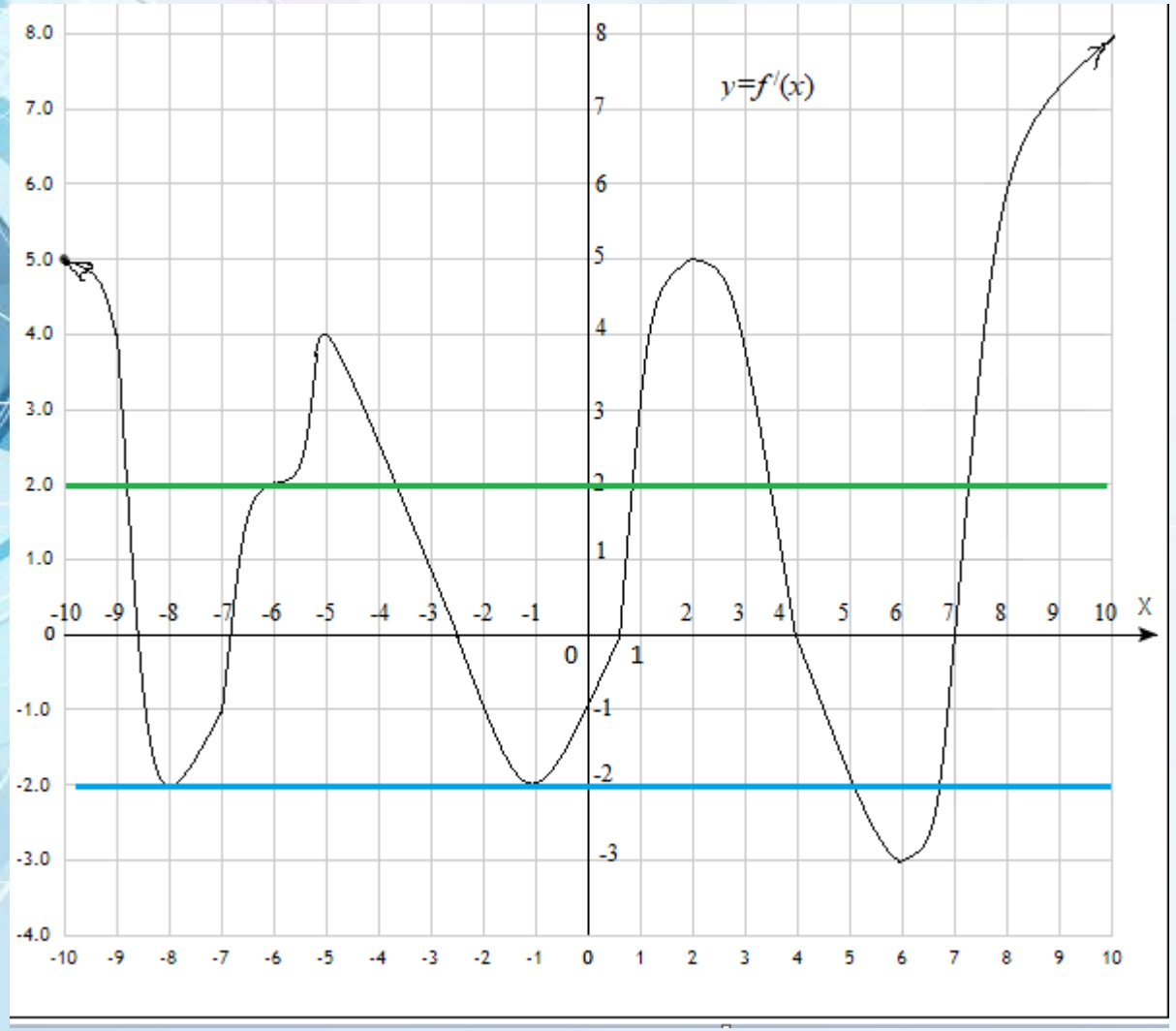


1) В какой точке отрезка [4; 7] функция принимает наименьшее значение?

2) Найдите количество точек максимума (минимума) функции.

3) Найдите промежутки возрастания функции на интервале (-10; -1). Укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.





4) а) Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=-2x+5$ или совпадает с ней.

б) Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=2x+7$ или совпадает с ней.

5) Даны точки -8; -7; -4; -3; -2; 2; 3;5; 8. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?

Задача 3.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции.

1) $f(x)=x^3-6x^2+2$ на отрезке $x\in[-3; 3]$.

Задача 3.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции.

1) $f(x)=x^3-6x^2+2$ на отрезке $x\in[-3; 3]$.

Решение.

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$x=0$ принадлежит отрезку $[-3; 3]$, $x=4$ не принадлежит отрезку $[-3; 3]$.

$f(-3)=-79; f(0)=-25; f(3)=2.$

$$\max_{[-3;3]} f(x) = f(3) = 2; \min_{[-3;3]} f(x) = f(-3) = -79.$$

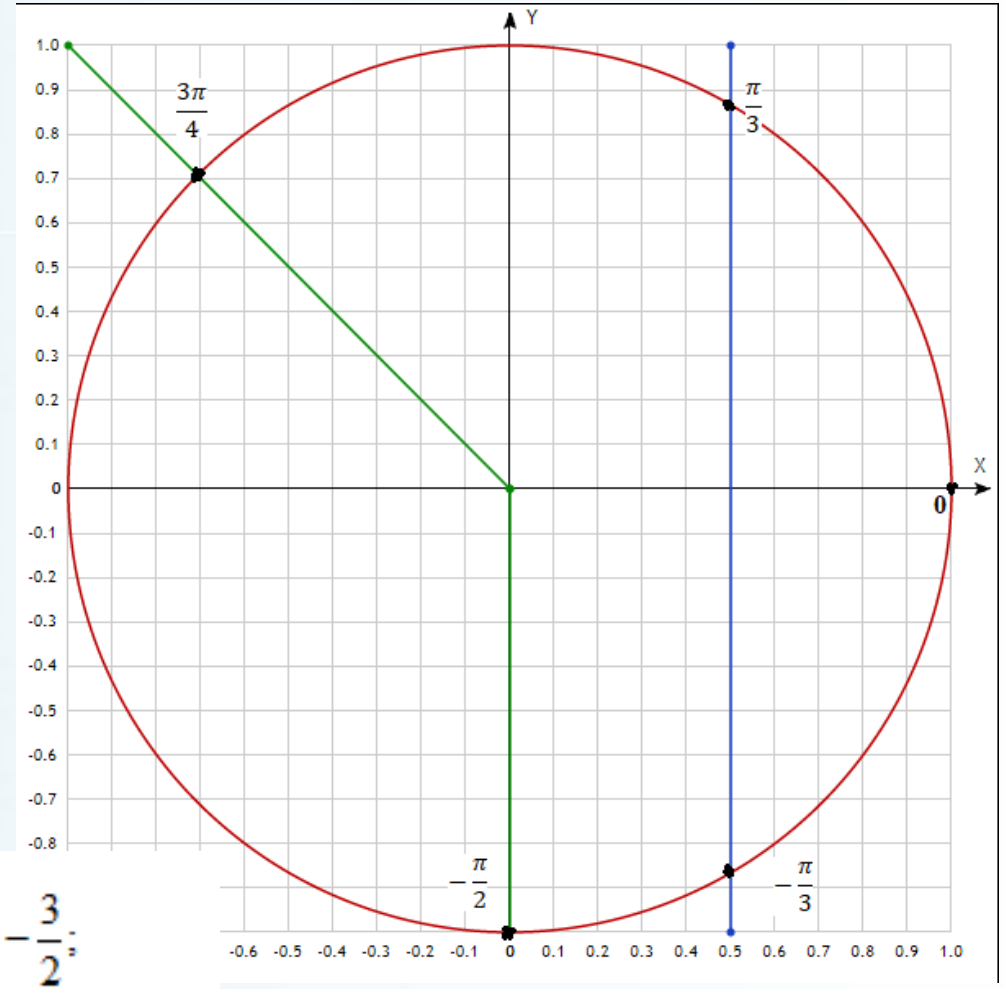
Найти наибольшее и наименьшее значение функции

2) $f(x)=\cos 2x-2\cos x$ на отрезке $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$.

$f'(x)=-2\sin 2x+2\sin x=-2\sin x(2\cos x-1)$

$\sin x=0\Rightarrow x=0$

$\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=-\frac{\pi}{3};x=\frac{\pi}{3}$



$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1-0=-1;\ f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)-2\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2};$

$f(0)=1-2=-1;f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{3}{2};f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\frac{3\pi}{2}-\cos\frac{3\pi}{4}=0+\sqrt{2}=\sqrt{2}.$

$\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]}f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2};\ \min\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]}f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3}{2}$

Найти наибольшее и наименьшее значение функции

3) $f(x)=\begin{cases} x^4+4x^3, x\le -1 \\ x^3-6x^2, x>-1 \end{cases}, x\in R$

$$f(x)=\begin{cases} x^4+4x^3, x\le -1 \\ x^3-6x^2, x>-1 \end{cases}, x\in R$$

$f_1'=4x^3+12x^3=4x^2(x+3)$

	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;0)$	0	$(0;\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	↘	-27	↗	Не интересует	↗
		min		-	

$f(-1)=1-4=-3$

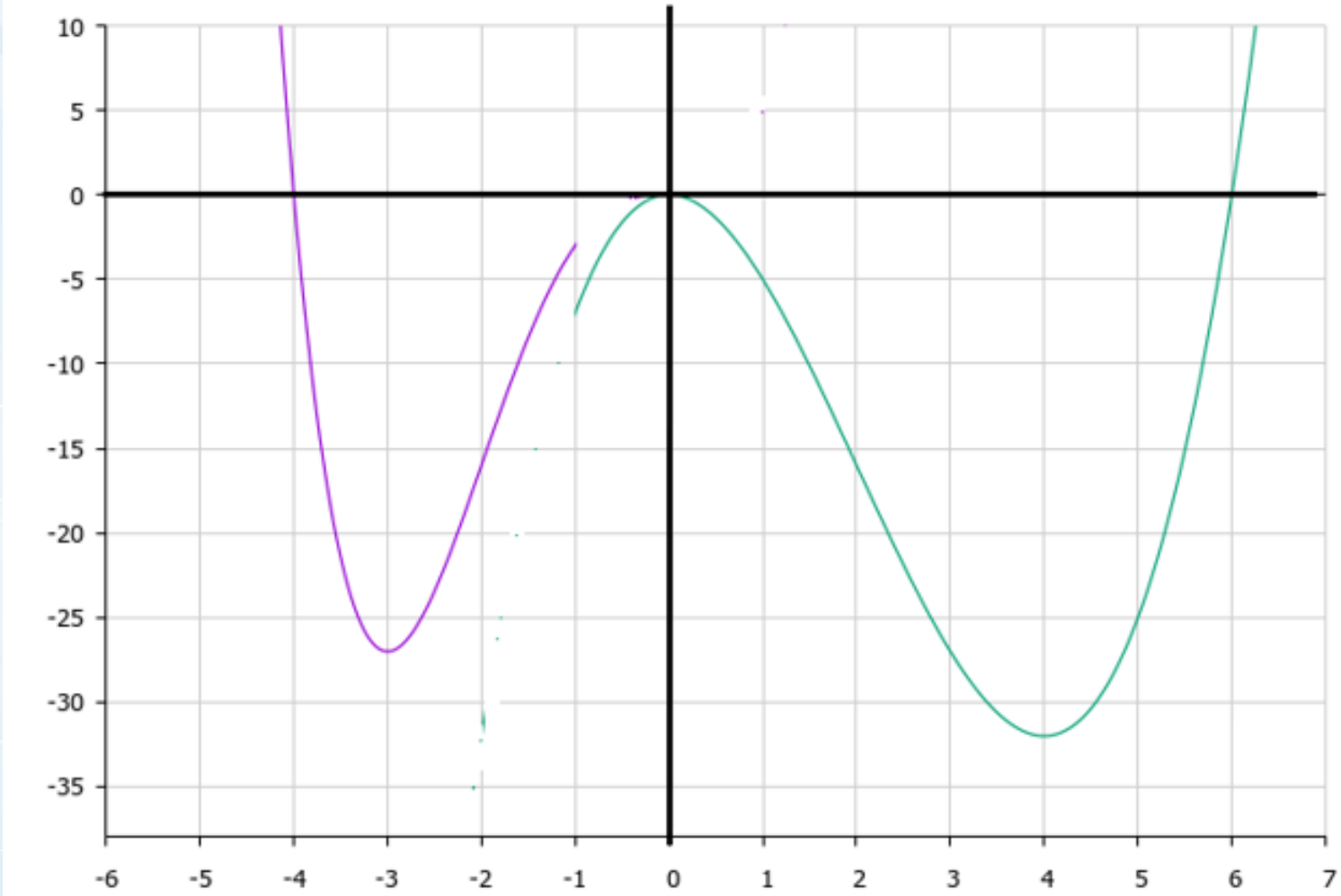
$$f(x)=\begin{cases} x^4+4x^3, x\le -1 \\ x^3-6x^2, x>-1 \end{cases}, x\in R$$

$f_2'=3x^2-12x=3x(x-4)$

	(-∞; 0)	0	(0;4)	4	(4; ∞)
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	-32	↗
		max		min	

$f(-1)=-1-6=-7$.

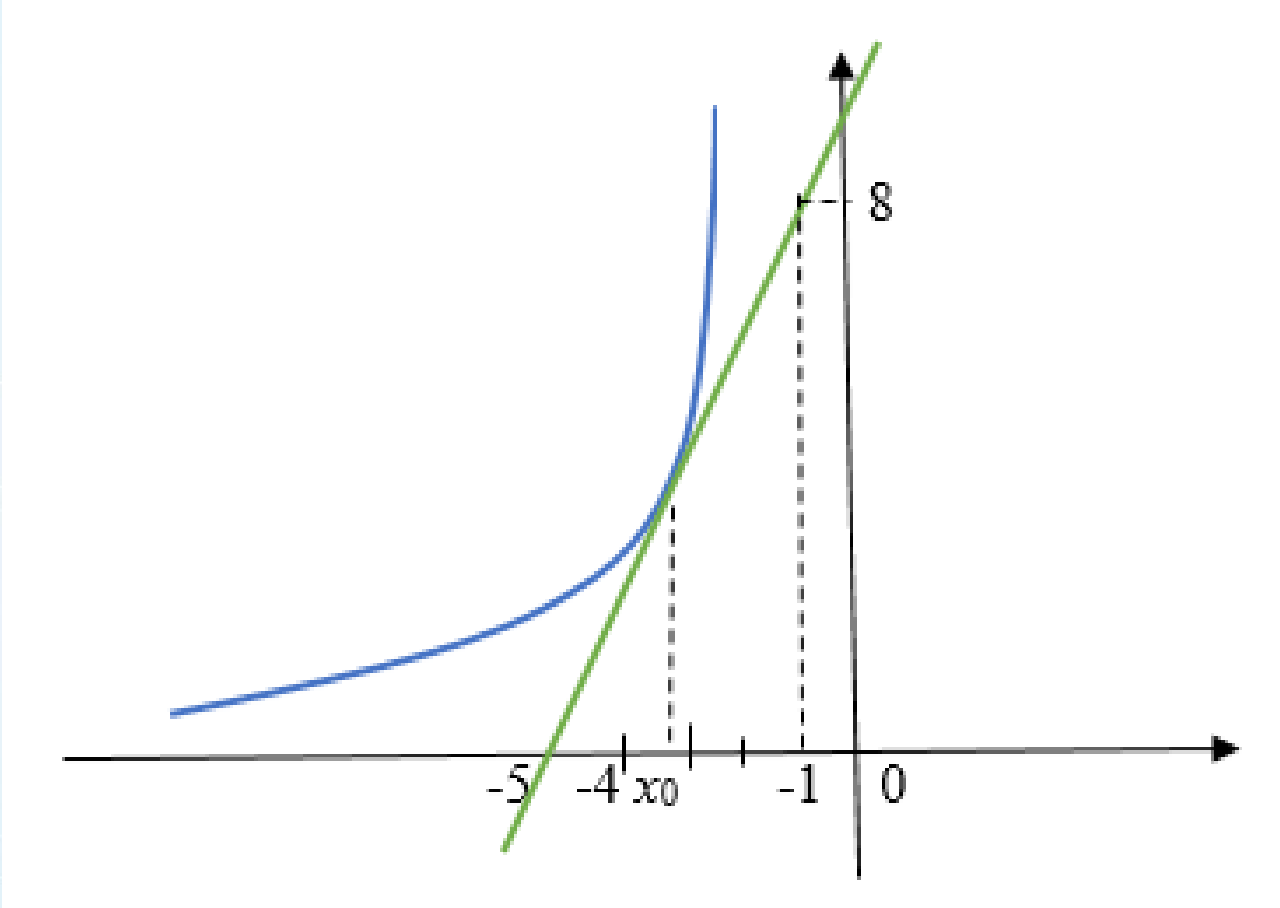
$$f(x)=\begin{cases} x^4+4x^3, x\le -1 \\ x^3-6x^2, x>-1 \end{cases}, x\in R$$



$\min f(x)=f(4)=-32$, максимума не существует.

Задача 4.

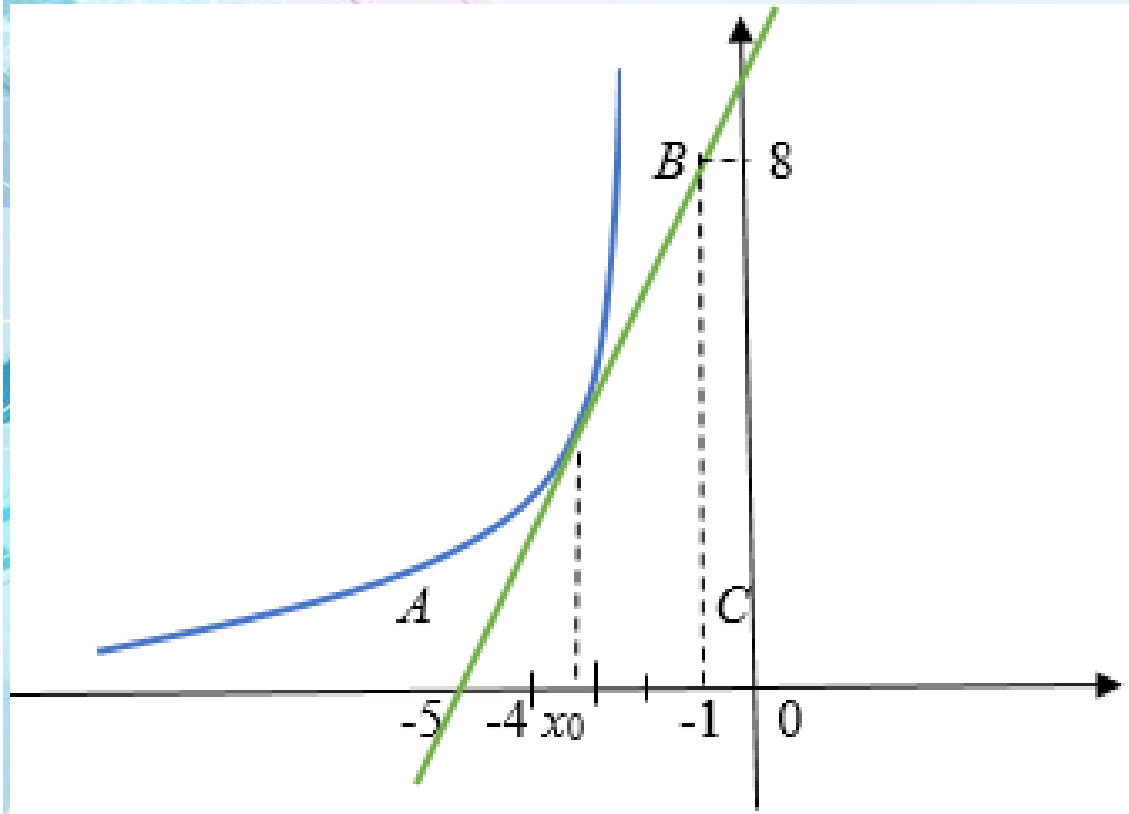
На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Задача 4.

На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0.

Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



1 Вариант решения.

Известно, что $k=f'(x_0)$, где $y=kx+b$.

Найдем уравнение прямой, проходящей через точки (- 5;0) и (-1; 8)

$$-\begin{cases} 0=-5k+b \\ 8=-k+b \end{cases}$$

$$8=4k \qquad \Rightarrow k=2 \Rightarrow f'(x_0)=2$$

2 Вариант решения.

Известно, что $tg\alpha=f'(x_0)$.

Рассмотрим треугольник ABC. $AC=4$, $BC=8$

$$tg\alpha=\frac{BC}{AC}=2 \Rightarrow f'(x_0)=2\,.$$

Физический (механический) смысл производной

Если $x(t)$ – закон движения материальной точки, то значение мгновенной скорости движения тела равно значению производной функции $x(t)$ в момент времени $t = t_0$

$$v(t_0) = x'(t_0).$$

Пример 1. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^2 + 10t$, где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите расстояние, пройденное точкой от начала движения до остановки.

Решение. Найдем момент времени, когда скорость точки равна нулю. Так как $x'(t) = -2t + 10$ то из уравнения $-2t + 10 = 0$ находим $t = 5$. Тогда искомое расстояние равно $x(5) = -5^2 + 10 - 5 = 25$ (м).

Ответ: 25

Пример 2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=6t^2-48t+17$, где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t=9$ с.

Решение. Скорость материальной точки в произвольный момент времени $t\geq 0$ равна $v(t)=x'(t)=12t-48$. В момент времени $t=9$ ее скорость $x'(9)=12\cdot 9-48=60$.

Ответ: 60

Пример 3. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2-13t+23$, где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

Решение. $x(t)=t^2-13t+23$.

Скорость материальной точки в произвольный момент времени $t\geq 0$ равна $x'(t)=2t-13$. В момент времени ее скорость равна 3, тогда $2t-13=3$. Следовательно, $t=8$.

Ответ: 8

Задача 1.

Найти наибольшее или наименьшее значение функции на отрезке $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+4}}, x\in[-2;2]$

1 способ (с помощью производной)

$$f'(x)=\left(2\left(x^2+4\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x^2+4\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\frac{2x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$$

x=0 – критическая точка

$$f(-2)=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(2)=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(0)=1$$

$$\max_{[-2;2]} f(x)=f(0)=1;\ \min_{[-2;2]} f(x)=f(-2)=f(2)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Задача 1.

Найти наибольшее или наименьшее значение функции на отрезке $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}, x\in[-2;2]$

2 способ (без производной)

Сконструируем функцию в несколько этапов, каждый раз определяя промежутки знакопостоянства и характер монотонности на заданном промежутке

функция	$y=x^2+4$	
промежуток	(-2;0)	(0;2)
монотонность	↘	↗
знакопостоянство	+	+
функция	$y=\sqrt{x^2+4}$	
промежуток	(-2;0)	(0;2)
монотонность	↘	↗
знакопостоянство	+	+

функция	$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$	
промежуток	(-2;0)	(0;2)
монотонность	↗	↘
знакопостоянство	+	+
функция	$y=\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}$	
промежуток	(-2;0)	(0;2)
монотонность	↗	↘
знакопостоянство	+	+

$$\max_{[-2;2]} f(x)=f(0)=1;\ \min_{[-2;2]} f(x)=f(-2)=f(2)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Задача 2.

Найдите значение параметра, при котором прямая $y=2x+b$ будет являться касательной к графику функции $y=x^2-2x+3$.

1 способ (без производной)

Так как прямая и парабола имеют только одну точку пересечения, то, приравнивая функции, получим квадратное уравнение $x^2-2x+3=2x+b$, которое должно иметь только один корень.

$x^2-4x+3-b=0$

$D_1=4-3+b=0$, отсюда $b=-1$.

2 способ (с помощью производной)

Так как прямая является касательной, то $k=2=f'(x_0)$. Тогда $f'(x_0)=2x-2=2$. Отсюда $x_0=2$. Значит, $y_0=y(2)=3$. Точка $A(2;3)$ – точка касания, подставим в уравнение $y=2x+b$. Получим $b=3-4=-1$.

Ответ: -1.

Задача 3.

Написать уравнение всех касательных к графику функции $f(x)=2x^4+5x-1$, проходящих через точку $A(0;-7)$.

Решение. Данная точка не является точкой касания.

Пусть a – абсцисса точки касания. Найдем $f(a)= 2a^4+5a-1$; $f'(a)=8a^3+5$.

Уравнение касательной имеет вид: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

Подставим найденные значения.

$y=(8a^3+5)(x-a)+ 2a^4+5a-1$.

Этому уравнению удовлетворяет точка $A(0;-7)$.

$y=(8a^3+5)(0-a)+ 2a^4+5a-1$. Отсюда $-8\ a^4-5a+2a^4+5a+6=0$. Получим $-6\ a^4=-6$. Имеем $a=\pm 1$.

Если $a=1$, т.е. $x_0=1$; $y_0=2+5-1=6$. Тогда $y-6=13(x-1)$, следовательно, $y=13x-7$.

Если $a=-1$, т.е. $x_0=-1$; $y_0=2-5-1=-4$. Тогда $y+4=-3(x+1)$, следовательно, $y=-3x-7$.

Ответ: $y=13x-7$; $y=-3x-7$.

Раздел 2. Перечень элементов содержания, проверяемых на едином государственном экзамене по математике

Перечень элементов содержания, проверяемых на ЕГЭ по математике, демонстрирует преемственность содержания раздела «Обязательный минимум содержания основных образовательных программ» федерального компонента государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования базового и профильного уровней по математике и Примерной основной образовательной программы среднего общего образования (одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию (протокол от 28.06.2016 № 2/16-з)).

Таблица 2

Код раздела	Код контролируемого элемента	Элементы содержания, проверяемые заданиями экзаменационной работы		
		Федеральный компонент государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования	Наличие позиций ФК ГОС в ПООП СОО	
			базовый уровень	*углублённый уровень*
4	**НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**			
4.1	**Производная**			
	4.1.1	Понятие о производной функции, геометрический смысл производной	Производная функции в точке. Геометрический и физический смысл производной	Производная функции в точке. Геометрический и физический смысл производной
	4.1.2	Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком	Геометрический и физический смысл производной	Геометрический и физический смысл производной
	4.1.3	Уравнение касательной к графику функции	Касательная к графику функции	Касательная к графику функции
	4.1.4	Производные суммы, разности, произведения, частного	*Правила дифференцирования*	Правила дифференцирования
	4.1.5	Производные основных элементарных функций	Производные элементарных функций	Производные элементарных функций
	4.1.6	Вторая производная и её физический смысл	*Вторая производная, её геометрический и физический смысл*	Вторая производная, её геометрический и физический смысл

Раздел 2. Перечень элементов содержания, проверяемых на едином государственном экзамене по математике

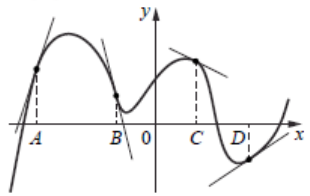
Перечень элементов содержания, проверяемых на ЕГЭ по математике, демонстрирует преемственность содержания раздела «Обязательный минимум содержания основных образовательных программ» федерального компонента государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования базового и профильного уровней по математике и Примерной основной образовательной программы среднего общего образования (одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию (протокол от 28.06.2016 № 2/16-з)).

Таблица 2

Код раздела	Код контролируемого элемента	Элементы содержания, проверяемые заданиями экзаменационной работы		
		Федеральный компонент государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования	Наличие позиций ФК ГОС в ПООП СОО	
			базовый уровень	*углублённый уровень*
4.2	**Исследование функций**			
	4.2.1	Применение производной к исследованию функций и построению графиков	Исследование элементарных функций на точки экстремума, наибольшее и наименьшее значение с помощью производной. *Применение производной при решении задач*	Исследование элементарных функций на точки экстремума, наибольшее и наименьшее значение с помощью производной. *Применение производной при решении задач*
	4.2.2	Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах		
4.3	**Первообразная и интеграл**			
	4.3.1	Первообразные элементарных функций	*Первообразные элементарных функций*	Первообразные элементарных функций
	4.3.2	Примеры применения интеграла в физике и геометрии	*Вычисление площадей плоских фигур и объёмов тел вращения с помощью интеграла*	*Вычисление площадей плоских фигур и объёмов тел вращения с помощью интеграла*

Демонстрационный вариант ЕГЭ 2022 г. базовый уровень

14 На рисунке изображены график функции и касательные, проведённые к нему в точках с абсциссами A, B, C и D.



В правом столбце указаны значения производной функции в точках A, B, C и D. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной функции в ней.

ТОЧКИ	ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ
A	1) -4
B	2) 3
C	3) $\frac{2}{3}$
D	4) $-0{,}5$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

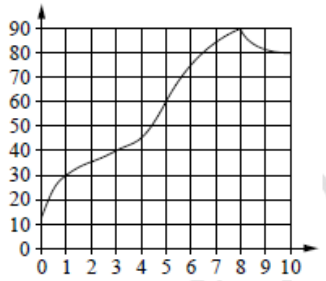
Ответ:

A	B	C	D

Ответ:

A	B	C	D
2	1	4	3

На графике изображена зависимость температуры от времени в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На горизонтальной оси отмечено время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя; на вертикальной оси — температура двигателя в градусах Цельсия.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику процесса разогрева двигателя на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) 0–1 мин.	1) Рост температуры был самый медленный.
Б) 1–3 мин.	2) Температура падала.
В) 3–6 мин.	3) Температура находилась в пределах от 40 °С до 80 °С.
Г) 8–10 мин.	4) Температура не превышала 30 °С.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

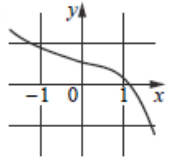
Ответ:

А	Б	В	Г
4	1	3	2

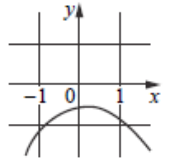
Установите соответствие между графиками функций и характеристиками этих функций на отрезке $[-1; 1]$.

ГРАФИКИ

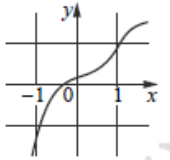
А)



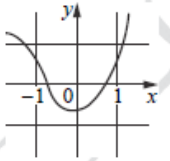
Б)



В)



Г)



ХАРАКТЕРИСТИКИ

1) Функция имеет точку максимума на отрезке $[-1; 1]$.
2) Функция имеет точку минимума на отрезке $[-1; 1]$.
3) Функция возрастает на отрезке $[-1; 1]$.
4) Функция убывает на отрезке $[-1; 1]$.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

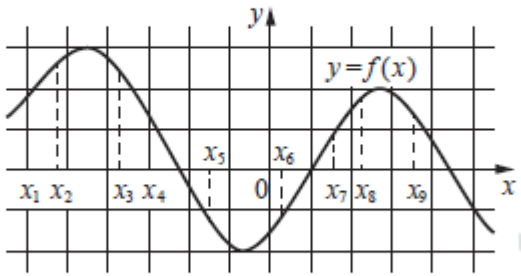
А	Б	В	Г

Ответ:

А	Б	В	Г
4	1	3	2

Демонстрационный вариант ЕГЭ 2022 г. профильный уровень

6 На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y=f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: x_1, x_2, ... x_9.

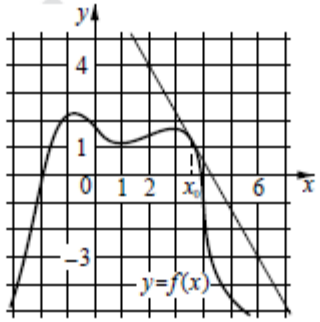


Найдите все отмеченные точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответе укажите количество этих точек.

Ответ: _____.

Ответ: 4

На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: _____.

Ответ: -1,75

Демонстрационный вариант ЕГЭ 2022 г. профильный уровень

11 Найдите наименьшее значение функции

$$y = 9x - 9\ln(x+11) + 7$$

на отрезке $[-10,5; 0]$.

Ответ: _____.

ИЛИ

Найдите точку максимума функции $y = (x+8)^2 \cdot e^{3-x}$.

Ответ: _____.

ИЛИ

Найдите точку минимума функции $y = -\dfrac{x}{x^2+256}$.

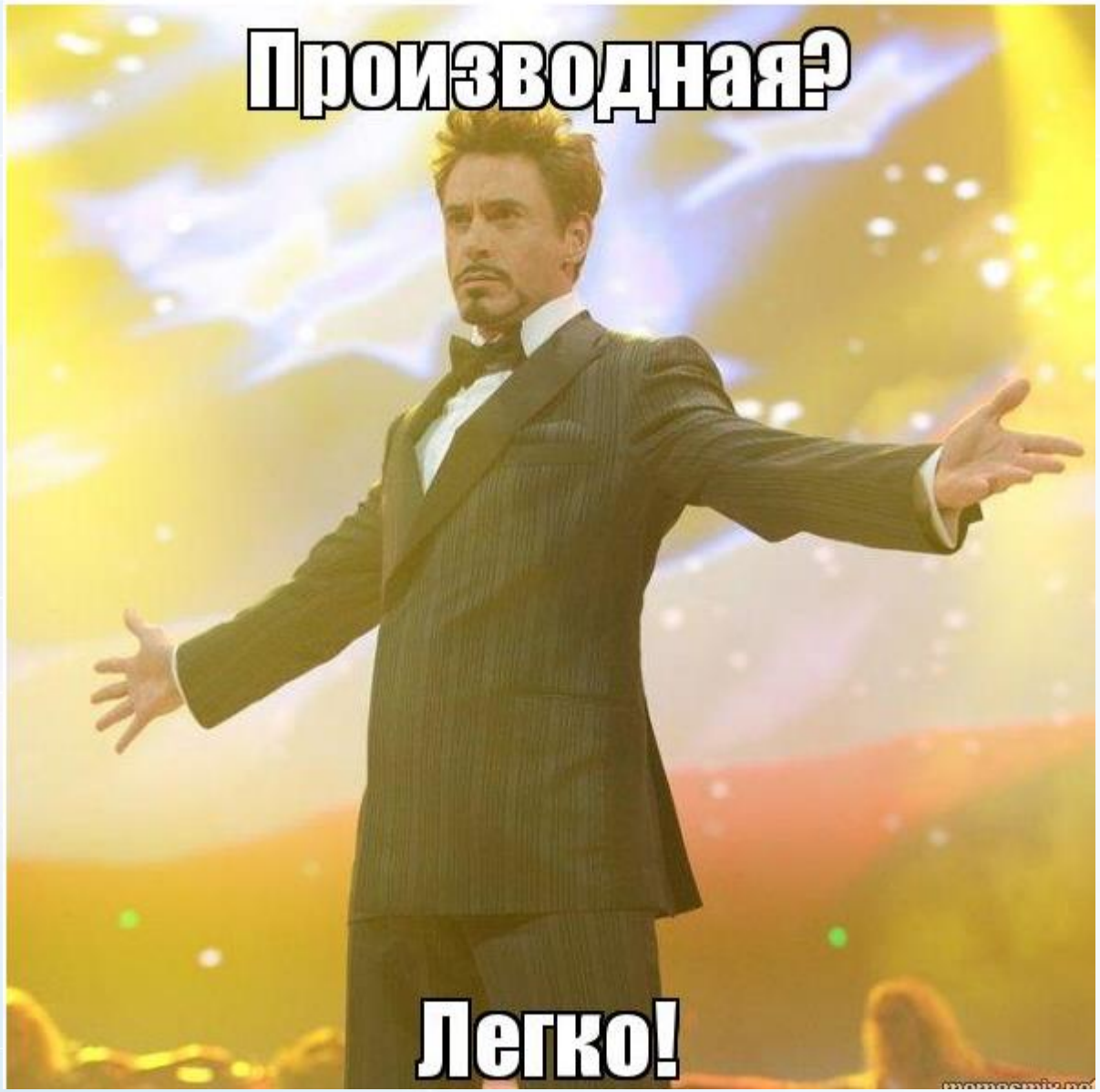
Ответ: _____.

ЕГЭ 2022

Ответ: -83

Ответ: -6

Ответ: 16


Производная?
Легко!