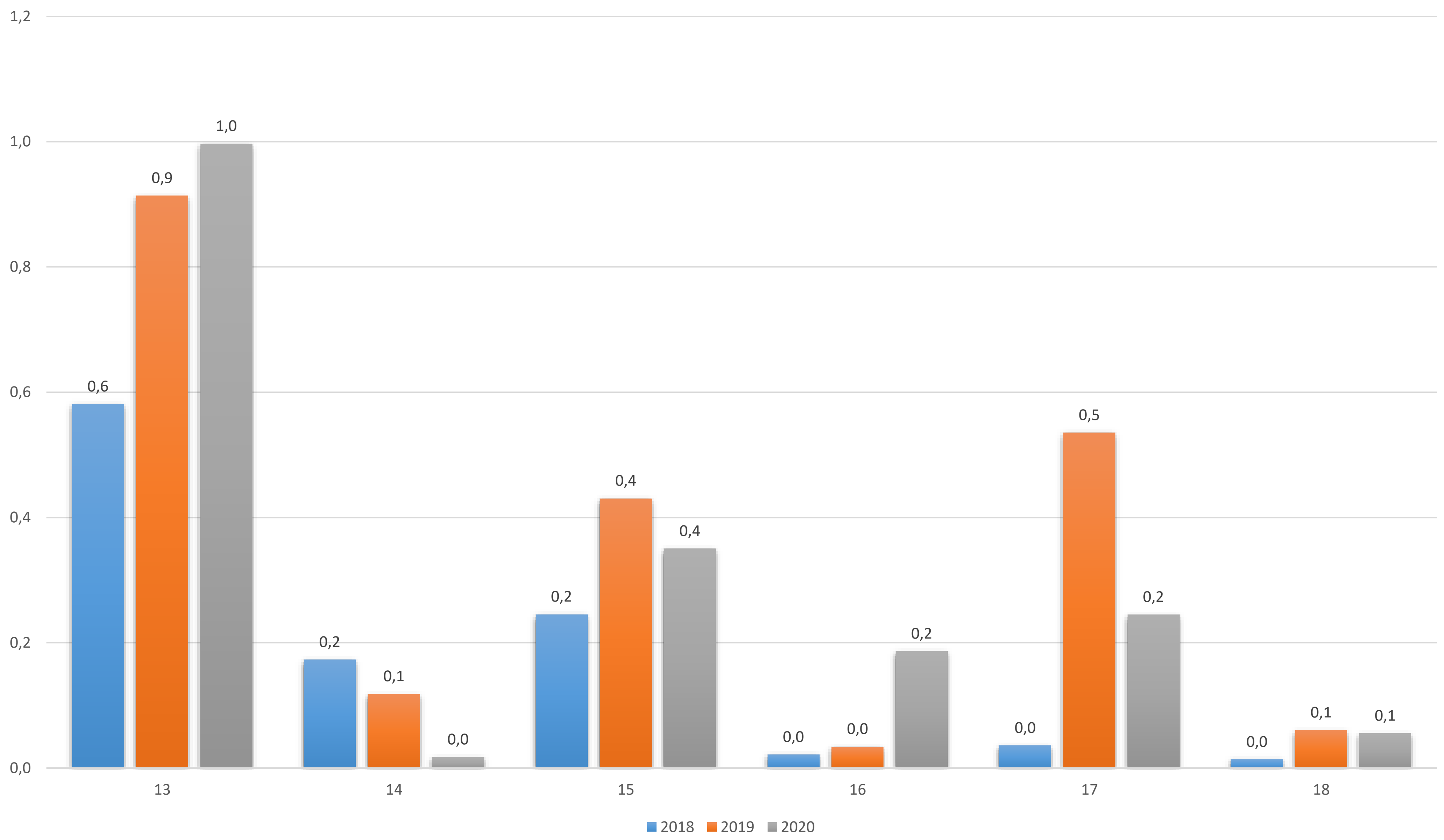
«Анализ ЕГЭ по математике 2020 года»



1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0,6
0,9
1,0
0,2
0,1
0,0
0,2
0,4
0,4
0,0
0,0
0,2
0,0
0,5
0,2
0,0
0,1
0,1
13
14
15
16
17
18
2018
2019
2020

№ 13

13 а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos 2x=\sin x+\sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

2018 (0,58)

13 а) Решите уравнение

$$2\cos^2 x+2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+1=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

2019 (0,91)

13 а) Решите уравнение

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sqrt{2}\cos x=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

2020 (0,99)

№ 13

13 а) Решите уравнение

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sqrt{2}\cos x=0.$$

$$2\cos^2 x+\sqrt{2}\cos x=0$$

$$\cos x\left(2\cos x+\sqrt{2}\right)=0$$

$$\cos x=0$$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$$

$$x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$$

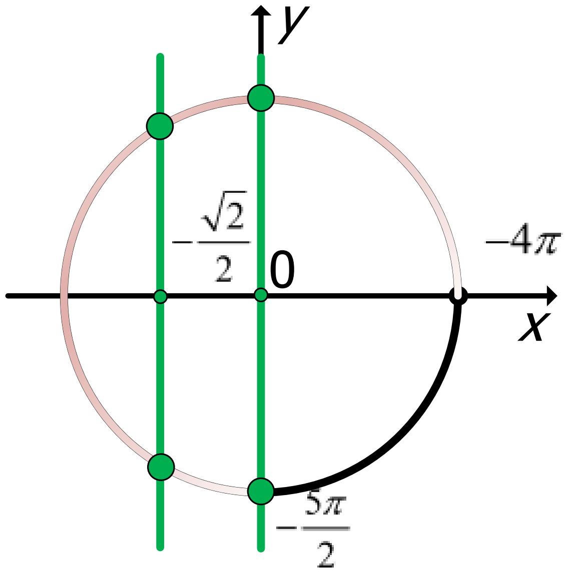
Отбор корней

№ 13

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$$



Подбор n, k

n и k должны ограничивать ответы

$$-\frac{7\pi}{2}; -\frac{13\pi}{4}; -\frac{11\pi}{4}; -\frac{5\pi}{2}$$

№ 14

14 В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1, причём BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите объём цилиндра, если $AB = 7$, $BB_1 = 24$, $B_1C_1 = 10$.

2018 (0,17)

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 1 : 5$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

2019 (0,12)

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $4\sqrt{3}$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = 5$, $SK : KB = 4 : 3$. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и K.

а) Докажите, что плоскость α содержит точку C.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABC$ плоскостью α.

2020 (0,017)

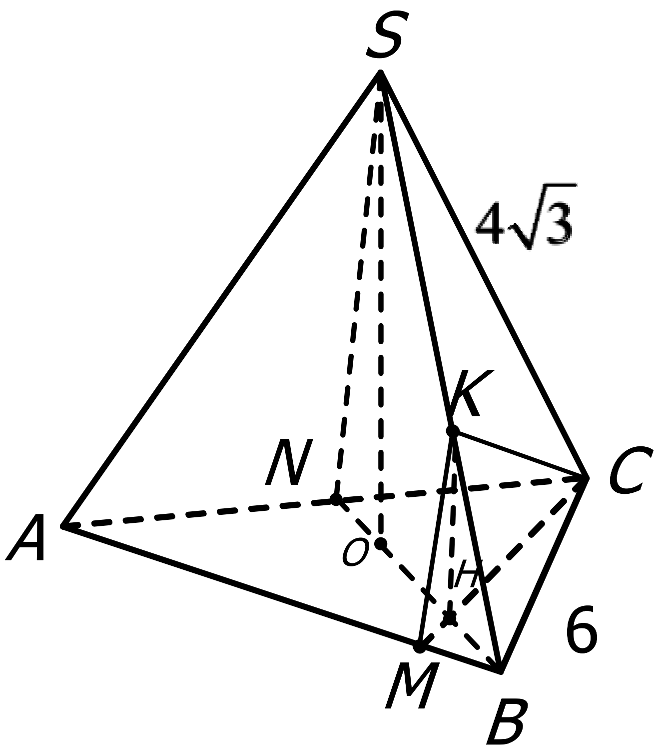
№ 14

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $4\sqrt{3}$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM=5$, $SK:KB=4:3$. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и K.

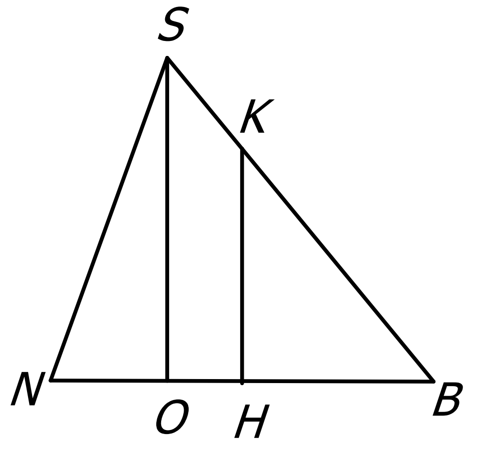
а) Докажите, что плоскость α содержит точку C.

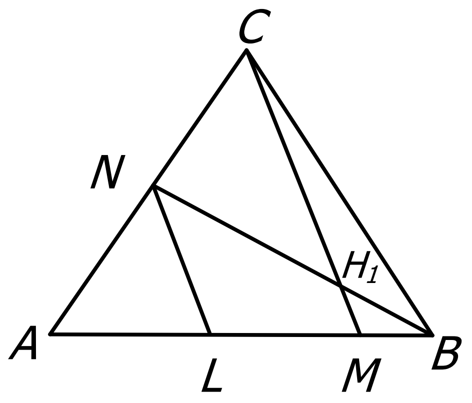
б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABC$ плоскостью α.

Пусть N – середина AC, SO - высота



$$SBN \perp ABC, KMC \perp ABC \Rightarrow KH \perp ABC$$





$$BH = \frac{KB}{SB}\cdot OB = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{7}BN$$

$$LN \parallel CM$$

$$AL = LM = \frac{AM}{2} = 2,5$$

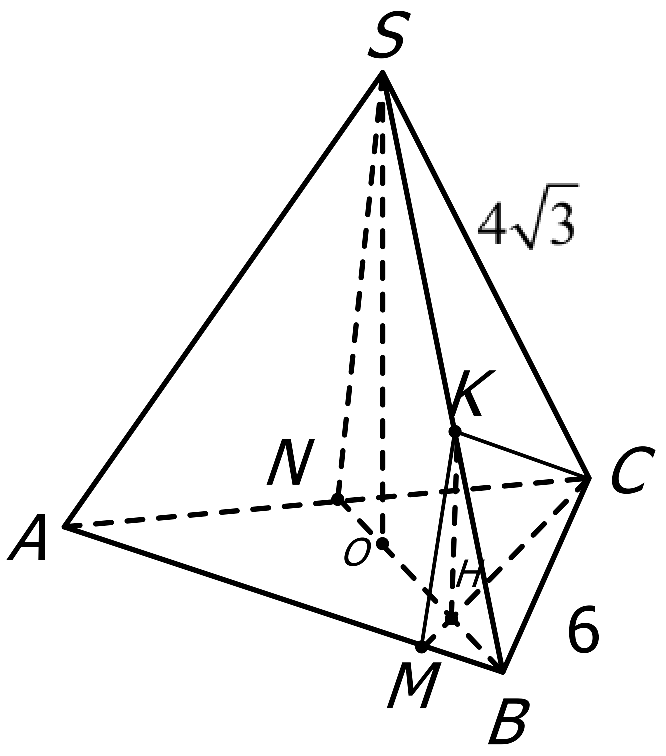
$$BH_1 = \frac{BM}{BL}\cdot BN = \frac{2}{7}BN$$

№ 14

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $4\sqrt{3}$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = 5$, $SK : KB = 4 : 3$. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и K.

а) Докажите, что плоскость α содержит точку C.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABC$ плоскостью α.



$$OB = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}\cdot\frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = 6$$

$$KH = \frac{KB}{SB}\cdot SO = \frac{18}{7}$$

$$CM = \sqrt{BM^2 + BC^2 - 2BM\cdot BC\cdot\cos 60^\circ} = \sqrt{31}$$

$$S = \frac{1}{2}CM\cdot KH$$

$$\frac{9\sqrt{31}}{7}$$

№ 15

15 Решите неравенство $2\log_2\left(x\sqrt{5}\right)-\log_2\left(\frac{x}{1-x}\right)\le\log_2\left(5x^2+\frac{1}{x}-2\right)$. 2018 (0,25)

15 Решите неравенство $\log_3(9-9x)>\log_3\left(x^2-3x+2\right)+\log_3(x+4)$. 2019 (0,43)

15 Решите неравенство $x^2\log_{343}(x+3)\le\log_7\left(x^2+6x+9\right)$. 2020 (0,35)

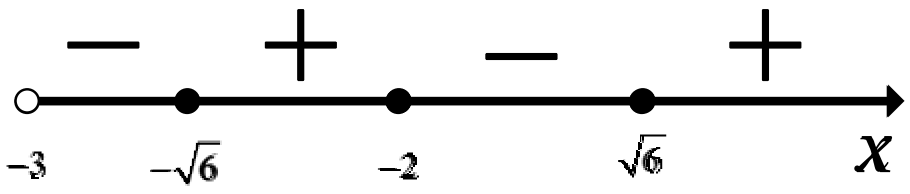
№ 15

15 Решите неравенство $x^2\log_{343}(x+3)\le\log_7\left(x^2+6x+9\right)$.

$$\frac{x^2}{3}\log_7(x+3)\le 2\log_7(x+3),\quad x>-3$$

$$\frac{1}{3}\left(x^2-6\right)\log_7(x+3)\le 0$$

$$\left(x-\sqrt{6}\right)\left(x+\sqrt{6}\right)\log_7(x+3)\le 0$$



$$\left(-3;-\sqrt{6}\right);\left[-2;\sqrt{6}\right]$$

№ 16

16 Окружность проходит через вершины A, B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и M и пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке N.
а) Докажите, что $AM = AN$.
б) Найдите отношение $CD : DN$, если $AB : BC = 1 : 2$, а $\cos\angle BAD = \frac{2}{3}$.

2018 (0,02)

16 Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P.
а) Докажите, что $OP = CP$.
б) Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если расстояние от точки P до прямой AC равно 18, $\angle ABC = 60°$.

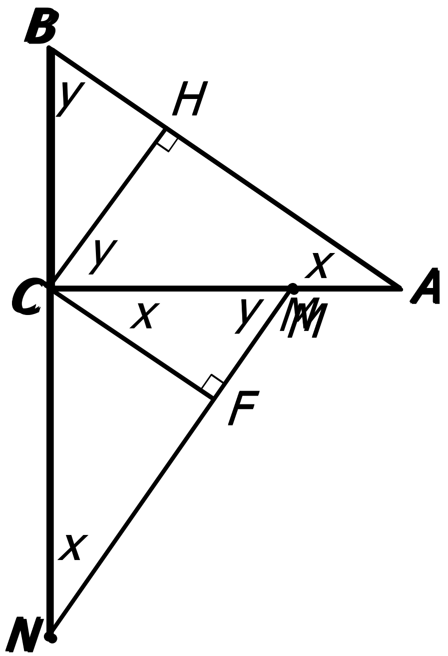
2019 (0,03)

16 В прямоугольном треугольнике ABC точка M лежит на катете AC, а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C, причём $CM = BC$ и $CN = AC$.
а) Отрезки CH и CF — высоты треугольников ACB и NCM соответственно. Докажите, что прямые CH и CF перпендикулярны.
б) Прямые BM и AN пересекаются в точке L. Найдите LM, если $BC = 4$, а $AC = 8$.

2020 (0,18)

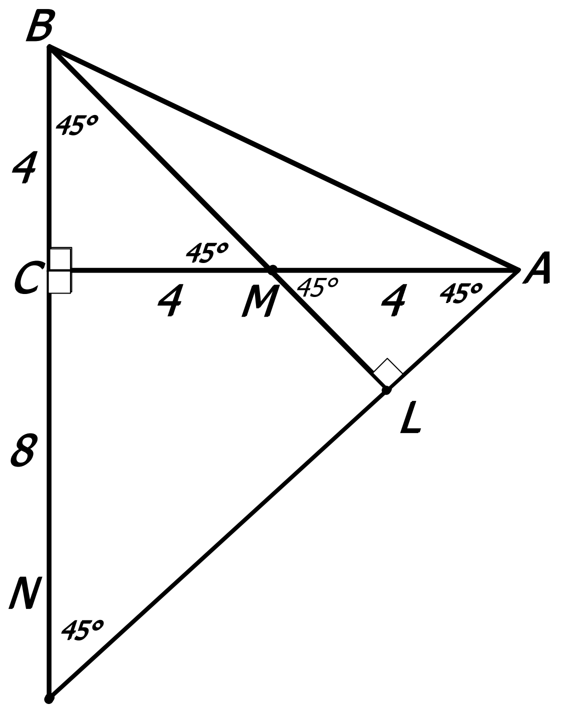
№ 16

16 В прямоугольном треугольнике ABC точка M лежит на катете AC, а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C, причём $CM = BC$ и $CN = AC$.
а) Отрезки CH и CF — высоты треугольников ACB и NCM соответственно. Докажите, что прямые CH и CF перпендикулярны.
б) Прямые BM и AN пересекаются в точке L. Найдите LM, если $BC = 4$, а $AC = 8$.



т.к. $ABC=CMN$

$x+y=90^\circ$



$$ML^2 + AL^2 = 16$$

$$2\sqrt{2}$$

№ 17

2018 (0,04)

17 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— 15-го числа 10-го месяца долг составит 300 тысяч рублей;

— к 15-му числу 11-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1388 тысяч рублей?

2019 (0,54)

17 15-го января планируется взять кредит в банке на 49 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного его погашения равнялась 2 млн рублей?

(Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

2020 (0,24)

17 В июле 2026 года Иванов планирует взять кредит на пять лет в размере 220 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным 220 тыс. рублей;

— выплаты в 2030 и 2031 годах равны;

— к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.

Найдите r, если известно, что долг будет выплачен полностью и общий размер выплат составит 420 тыс. рублей.

№ 17

$$k = 1 + \frac{r}{100}$$

17 В июле 2026 года Иванов планирует взять кредит на пять лет в размере 220 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным 220 тыс. рублей;

— выплаты в 2030 и 2031 годах равны;

— к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.

Найдите r, если известно, что долг будет выплачен полностью и общий размер выплат составит 420 тыс. рублей.

$$\begin{cases} 3\cdot 220(k-1)+2x=420 \\ \left(220k-x\right)\cdot k-x=0 \end{cases}$$

$$3\cdot 220(k-1)+2x=660k-660+\frac{440k^2}{k+1}=\frac{1100k^2-660}{k+1}=420$$

$$k=1,2$$

20

№ 18

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 12a - 28, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

2018 (0,01)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 + x + a}{x^2 - 2x + a^2 + 6a} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

2019 (0,06)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{16 - y^2} = \sqrt{16 - a^2 x^2}, \\ x^2 + y^2 = 8x + 4y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

2020 (0,05)

№ 18

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{16-y^2}=\sqrt{16-a^2x^2},\\ x^2+y^2=8x+4y\end{cases}\qquad -4\le y\le 4$$

имеет ровно два различных решения.

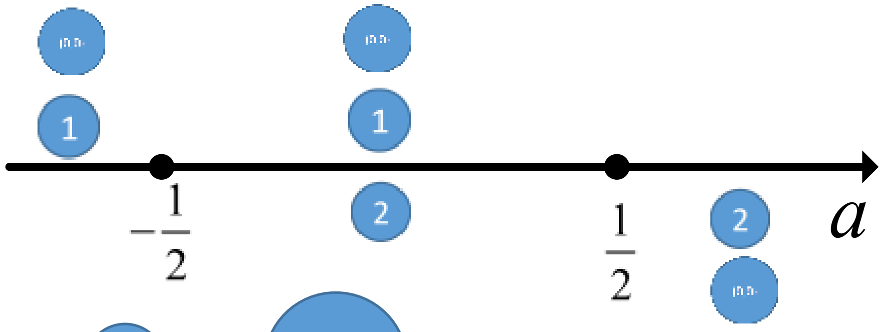
$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} y=ax \\ y=-ax\end{array}\right.\\ x^2+y^2=8x+4y\end{cases}$$

$$a=0\ \begin{cases}\sqrt{16-y^2}=4\\ x^2+y^2=8x+4y\end{cases};\ (0;0)\quad(8;0)$$

$$(0;0)$$

1 $\left(\dfrac{4a+8}{a^2+1};\dfrac{4a^2+8a}{a^2+1}\right)\quad a\le\dfrac{1}{2}$

2 $\left(\dfrac{4a-8}{a^2+1};\dfrac{4a^2-8a}{a^2+1}\right)\quad a\ge-\dfrac{1}{2}$



При a=-2 1 = (0;0)

При a=2 2 = (0;0)

$$a<-2;\ -2<a<-\frac{1}{2};\ a=0;\ \frac{1}{2}<a<2;\ a>2$$

№ 19

2018 (0,04)

19 В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом, причём в школе №2 средний балл равнялся 42.
Один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах. В результате средний балл в школе №1 уменьшился на 10%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 10%.
а) Сколько учащихся могло писать тест в школе №2 изначально?
б) Каждый учащийся школы №2, писавший тест, набрал больше баллов, чем перешедший в неё учащийся школы №1. Какое наибольшее количество баллов мог набрать учащийся школы №2?
в) Какое наибольшее количество учащихся могло писать тест в школе №1 изначально?

2019 (0,06)

19 Последовательность (a_n) состоит из 100 натуральных чисел. Каждый следующий член последовательности, начиная со второго, либо вдвое меньше предыдущего, либо больше него на 90.
а) Может ли такая последовательность быть образована ровно четырьмя различными числами?
б) Чему может быть равно a_{100}, если $a_1 = 89$?
в) Какое наименьшее значение может принимать самое большое из чисел в такой последовательности?

2020 (0,75)

19 На доске написано несколько различных натуральных чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 6.
а) Может ли сумма этих чисел быть равна 198?
б) Может ли сумма этих чисел быть равна 270?
в) Какое наибольшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 1518?

№ 19

19 На доске написано несколько различных натуральных чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 6.
а) Может ли сумма этих чисел быть равна 198?
б) Может ли сумма этих чисел быть равна 270?
в) Какое наибольшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 1518?

а) 6, 36 и 156

б) Каждое из написанных чисел оканчивается на 6, поэтому если их сумма оканчивается на 0, то их количество должно делиться на 5. Сумма пяти наименьших чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 6 равна 6+36+66+96+126=330. Значит, сумму 270 получить невозможно.

в) Пусть на доске записано n чисел, заметим, что любое число, которое оканчивается на 6 можно представить в виде 5к+1, значит сумма всех чисел написанных на доске, равна 1518=5m+n. Следовательно, n даёт остаток 3 при делении на 5.

Предположим n>=13, тогда сумма наименьших чисел, удовлетворяющих условиям:

$$6+36+66+\ldots+336+366=\frac{13\cdot(6+366)}{2}=2418>1518$$

Значит n<13, т.е. n<=8, например сумме восьми чисел 6, 36, 66, 96, 126, 156, 186, 846 равна 1518
Т.е. n==8

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Председатель комиссии ЕГЭ по математике
Заведующий кафедрой общей математики КубГТУ
к.ф.-м.н, доцент
Терещенко Игорь Викторович