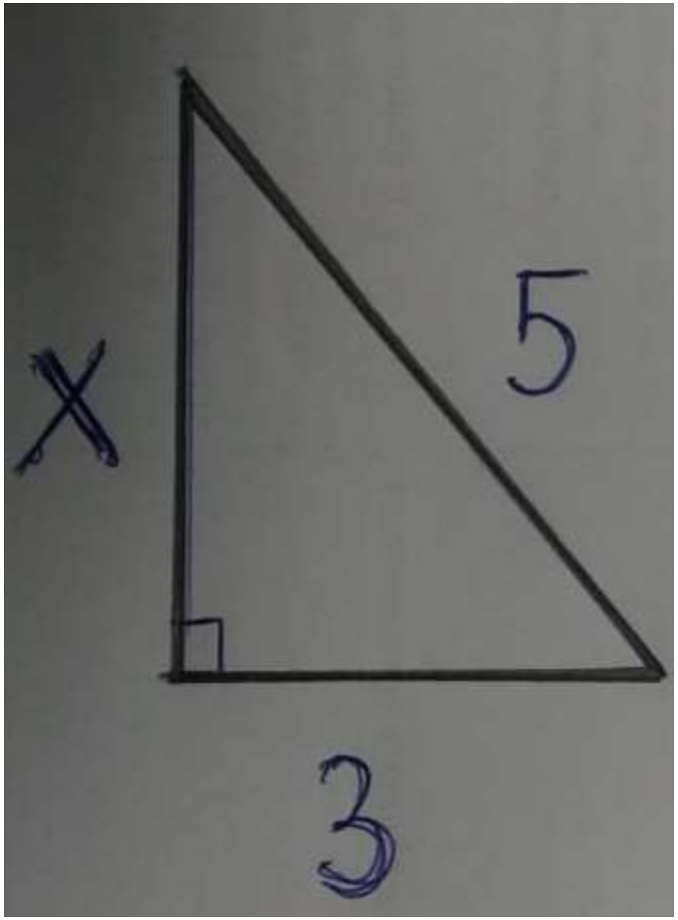
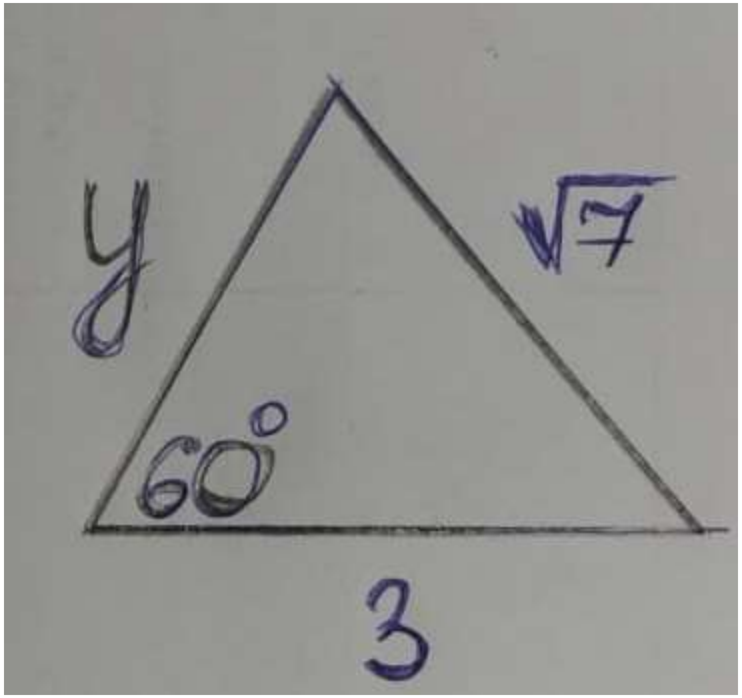
Геометрические решения алгебраических задач

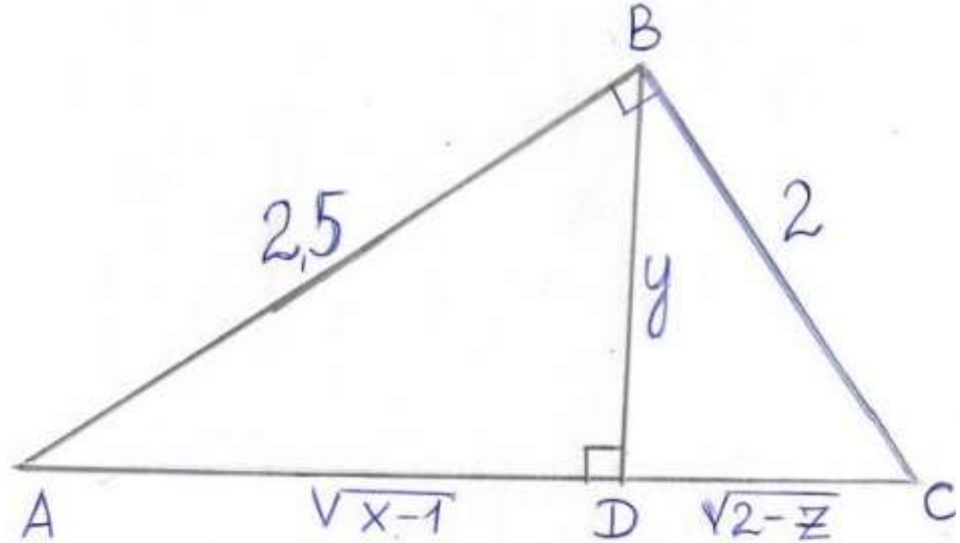




$x^2 + 3^2 = 5^2$

$(\sqrt{7})^2 = y2 + 32 - 2 \cdot y \cdot 3\ \cos 60^\circ$

Вычислите значение $y \cdot (\sqrt{x-1} + \sqrt{2-z})$, **если** $y>0$, $x + y^2 = 7{,}25$, $y^2 - z = 2$ и $y^2 = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2-z}$



Решение:

$x > 1, z < 2$

$(\sqrt{x-1})^2 + y^2 = 6{,}25$ и $y^2 + (\sqrt{2-z})^2 = 4$

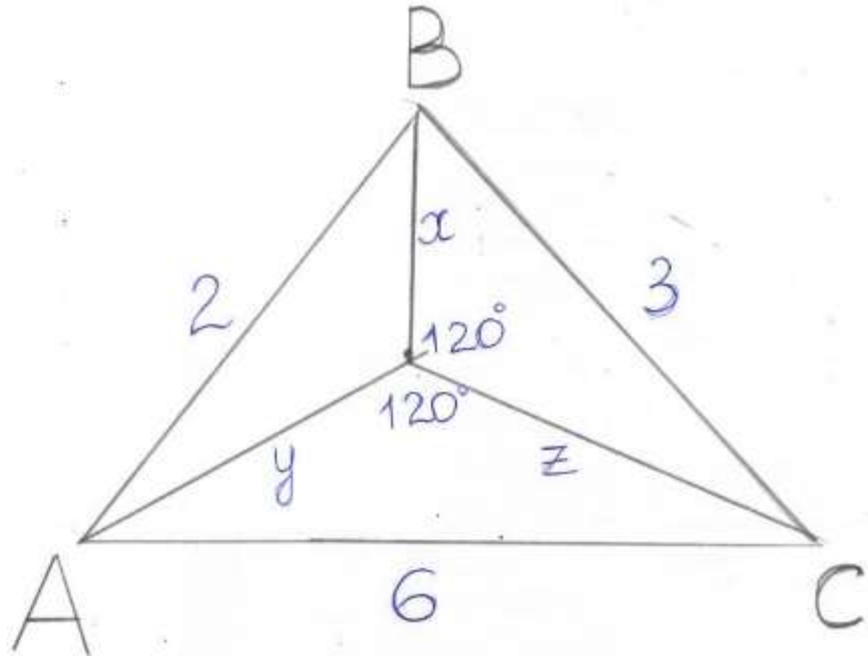
$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$

$y \cdot (\sqrt{x-1} + \sqrt{2-z}) = 2\,S_{ABC} = 2{,}5 \cdot 2 = 5$

Ответ: 5.

Имеет ли система уравнений решения для *x > 0, y > 0* и *z > 0*

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x^2 + xz + z^2 = 9 \\ y^2 + yz + z^2 = 36 \end{cases}$$



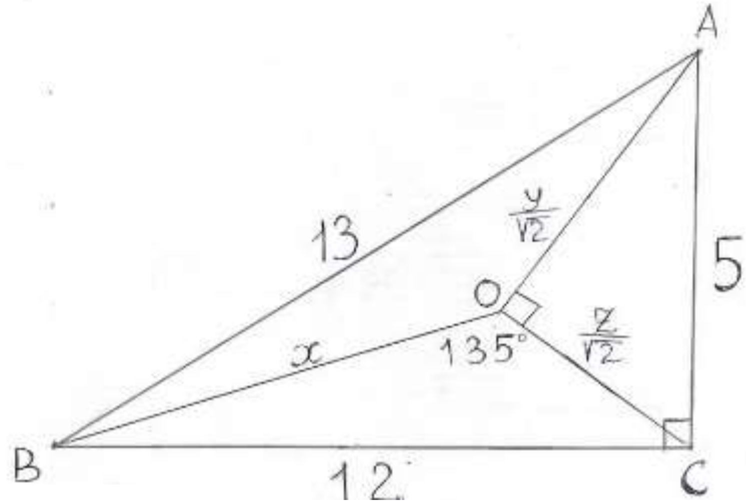
Решение:

AC < AB + BC, но 6 > 2 +3

Ответ: Ø

Для положительных x, y и z из условий $y^2 + z^2 = 50$, $x^2 + xy + \frac{y^2}{2} = 169$, $x^2 + xz + \frac{z^2}{2} = 144$, не находя значения x, y и z, вычислите значение выражения $xy + yz + zx$

Решение:



$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{2} = 169 \\ \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = 25 \\ x^2 + xz + \frac{z^2}{2} = 144 \end{cases}$$

$5^2 + 12^2 = 13^2$, значит

$S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin AOB$, $S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot x \frac{y}{\sqrt{2}} \cdot \sin 135^\circ = \frac{1}{4}\, xy$

$S_{AOC} = \frac{1}{2} OA \cdot OC$, $S_{AOC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{2}} \cdot \frac{z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\, yz$

$S_{BOC} = \frac{1}{2} OB \cdot OC \sin BOC$, $S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot x \frac{z}{\sqrt{2}} \cdot \sin 135^\circ = \frac{1}{4}\, xz$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$

$xy + yz + zx = 4\ SABC = 30 \cdot 4 = 120$

Ответ: 120

Для положительных x, y и z, не вычисляя их значений из системы уравнений $x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25$, $\frac{y^2}{3} + z^2 = 9$, $z^2 + xz + x^2 = 16$, определите $xy + 2yz + 3zx$

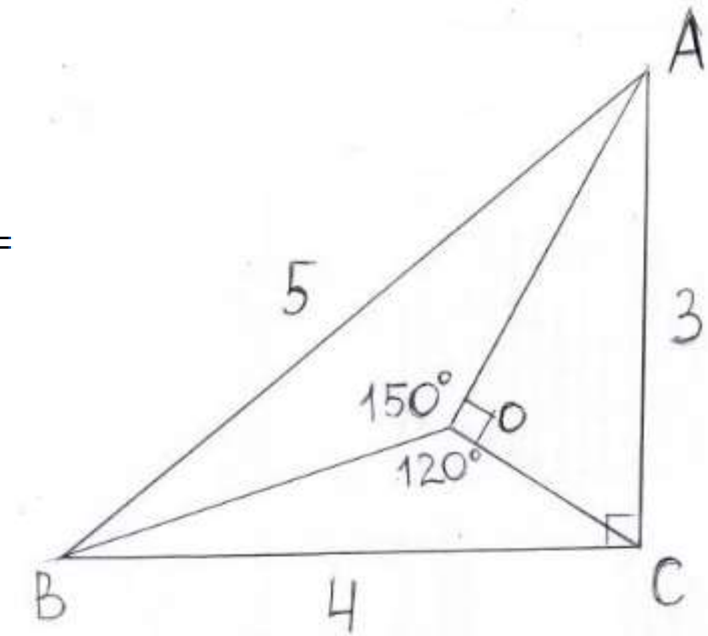
Решение:

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} x \frac{y}{\sqrt{3}} \sin 150^\circ + \frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{3}} z + \frac{1}{2} xz \sin 120^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} x \frac{y}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{3}} z + \frac{1}{2} xz \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}} (xy + 2yz + 3xz)$$



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC; \; S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$$

$$xy + 2yz + 3xz = 24\sqrt{3}$$

Ответ: $24\sqrt{3}$

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y\sqrt{x^2 - y^2} = 48 \\ x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 24 \end{cases}$$

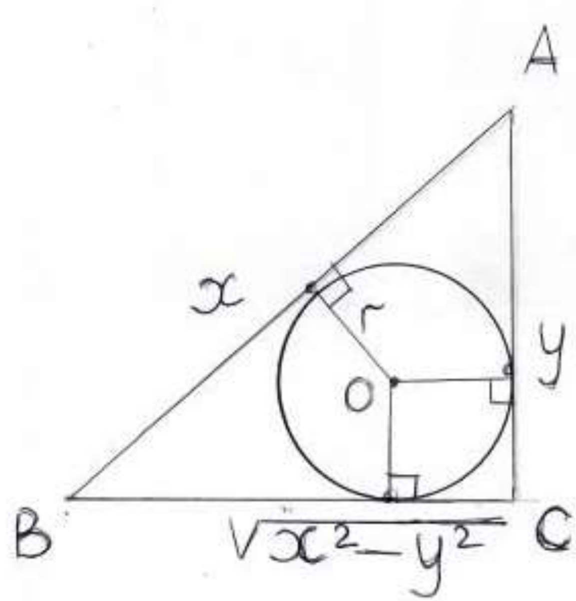
Решение:

1) $y^2 + (\sqrt{x^2 - y^2})^2 = x^2$, значит y, $\sqrt{x^2 - y^2}$, x – длины сторон прямоугольного треугольника

2) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$;

$S_{ABC} = \frac{1}{2} y \cdot \sqrt{x^2 - y^2}$;

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 48 = 24$



3) $P_{ABC} = AB + AC + BC$,

$P_{ABC} = x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 24$

4) $S = p \cdot r$; $r = 24 : 12 = 2$

5) $c = p - r$; $x = 12 - 2 = 10$

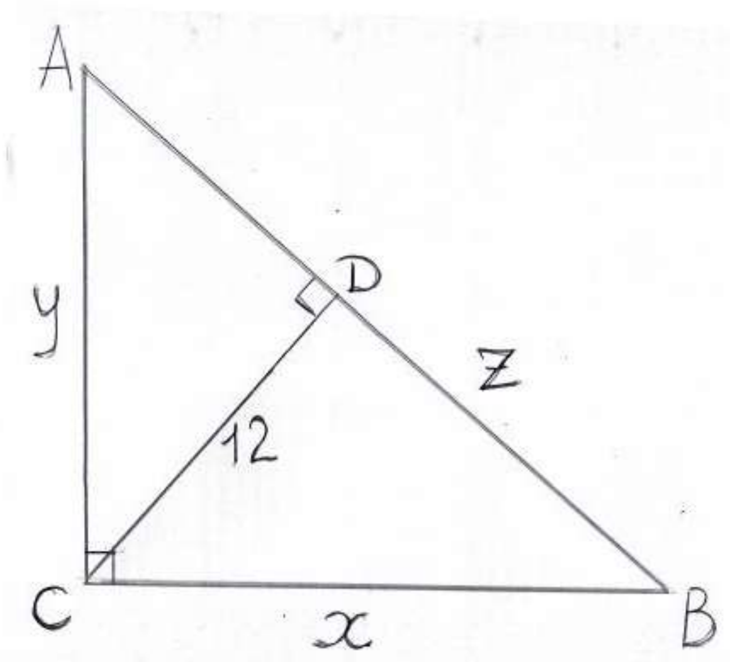
6) $y \cdot \sqrt{100 - y^2} = 48$, $y^2 \cdot (100 - y^2) = 48^2$

$$\left[\begin{array}{l} y = 6 \\ y = 8 \end{array}\right.$$

Ответ: (10; 6), (10; 8)

Решите системы уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ x^2 + y^2 = z^2 \\ \dfrac{xy}{z} = 12 \end{cases}$$



Решение:

1) $P_{ABC} = 60$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} x \cdot y$; $S_{ABC} = \frac{1}{2} hz$

2) $x \cdot y = h \cdot z$; $h = \frac{xy}{z}$; $h = 12$

3) $x + y = 60 - z$; $(x + y)^2 = (60 - z)^2$

4) $(x + y)^2 - 2xy = z^2$

$(x + y)^2 = z^2 + 2xy$

$(x + y)^2 = z^2 + 24z$

5) $(60 - z)^2 = z^2 + 24z$

$z = 25$

6) $\begin{cases} x + y = 35 \\ xy = 300 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 15 \\ y = 20 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 20 \\ y = 15 \end{cases}$

Ответ: (15;20;25), (20;15;25)