МЕТОДИЧЕСКИЙ ГОРИЗОНТ

«Методические особенности преподавания сложных тем курса математики при подготовке к итоговой аттестации»

Сложные геометрические задания в ОГЭ и ЕГЭ по математике. Некоторые свойства высот треугольника

Власова Александра Анатольевна

ГБОУ ИРО Краснодарского края

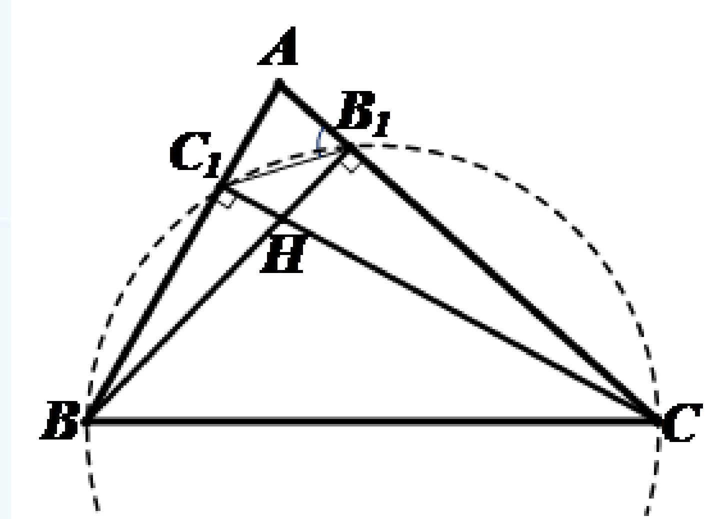
Старший преподаватель кафедры математики и информатики

Задача №1

Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Доказать, что $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC$

б) Найти BC, если $AH = 8\sqrt{3}$ и $\angle BAC = 60°$.



Доказательство, 1 способ:

1) Четырехугольник BC_1B_1C вписан, значит $\angle CBC_1 + \angle CB_1C_1 = 180°$,

2) $\angle AB_1C_1$ и $\angle C_1B_1C$ – смежные, значит $\angle AB_1C_1 + \angle C_1B_1C = 180°$,

3) т.о. из (1) и (2) $\angle C_1BC = \angle AB_1C_1$, значит $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC$ по двум углам

Доказательство, 2 способ:

1) ΔABB_1 : $\cos A = \frac{AB_1}{AB}$; ΔAC_1C : $\cos A = \frac{AC_1}{AC}$;

2) $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$, $\angle A$ – общий,

Значит $\Delta B_1AC_1 \sim \Delta BAC$

$k = |\cos A|$

Решение:

1) $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC$;

$k = \cos A$; $k = \cos 60^\circ = ½$

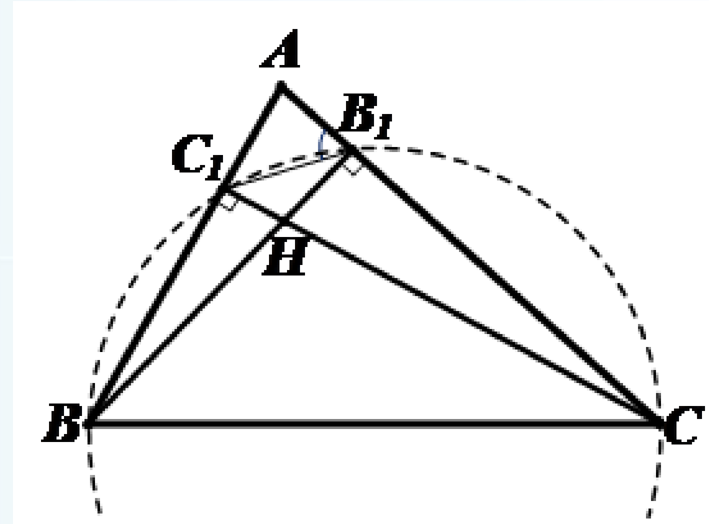
2) $B_1C_1 = 2R\sin A$;

$\angle AC_1H + \angle AB_1H = 90^\circ$, значит четырехугольник AC_1HB_1 вписан в окружность с диаметром AH.

$R = ½ AH$, $R = ½ \cdot 8\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

3) ΔAC_1B_1 вписан в эту же окружность, $B_1C_1 = 2 \cdot 4\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 12$;

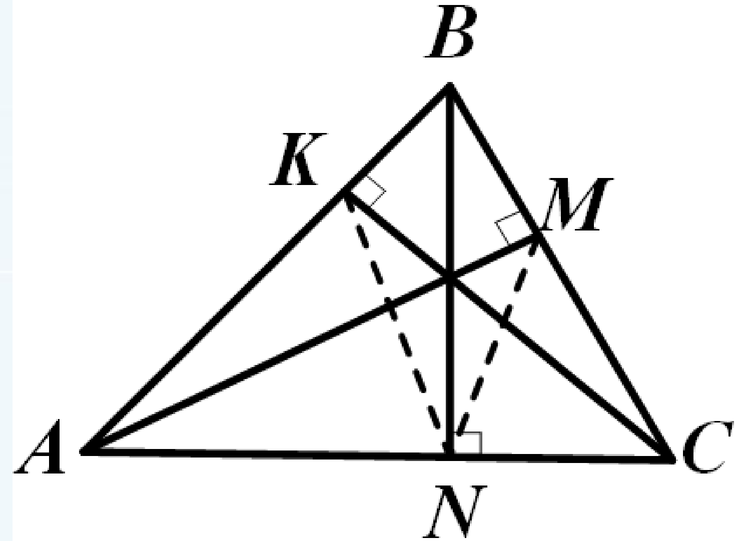
4) $BC = 2\,B_1C_1$; $BC = 2 \cdot 12 = 24$



Ответ: 24

Задача №2

Углы при вершинах A и C треугольника ABC равны 45° и 60° соответственно; AM, BN и CK – высоты треугольника. Найдите отношение $\frac{MN}{KN}$.



Решение:

1) Δ **MCN** $\sim$ Δ**ACB; k = cos60° =** $\frac{1}{2}$

$\frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$, **MN=** $\frac{1}{2}$**AB**

2) Δ **KAN** $\sim$ Δ**CAB; k = cos45° =** $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) Δ **ANB :AB =** $\frac{BN}{\sin 45^\circ}$ **= BN** $\cdot \sqrt{2}$; $\frac{KN}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, **KN =** $\frac{\sqrt{2}}{2}$**BC**

4) Δ **CNB : BC =** $\frac{BN}{\sin 60^\circ} = \frac{2BN}{\sqrt{3}}$

5) $\frac{MN}{KN} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{AB}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{BC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot BN\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2BN}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

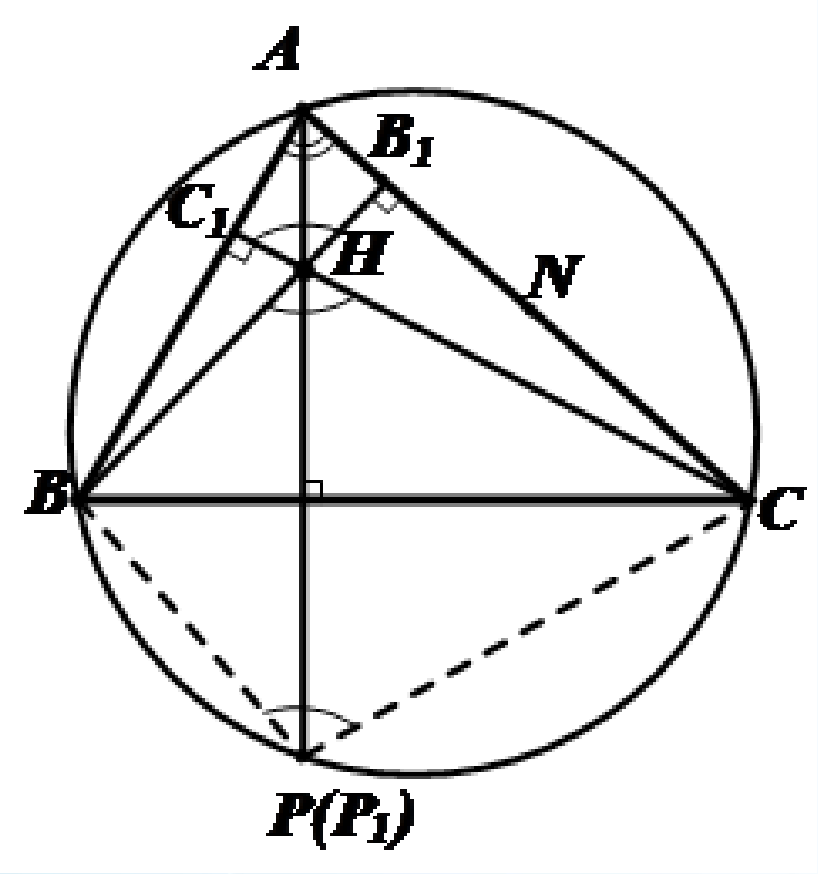
Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Задача №3

Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, образуют прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 10.

а) Доказать, что точки, симметричные ортоцентру H относительно сторон треугольника, лежат на описанной окружности треугольника

б) Найди радиус окружности, описанной около исходного треугольника.



Решение:

1) Продолжим высоты до пересечения с описанной окружностью, тогда **R**окр описанной около ΔABC равен **R**окр описанной около $\Delta A_2B_2C_2$;

2) A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 – средние линии,

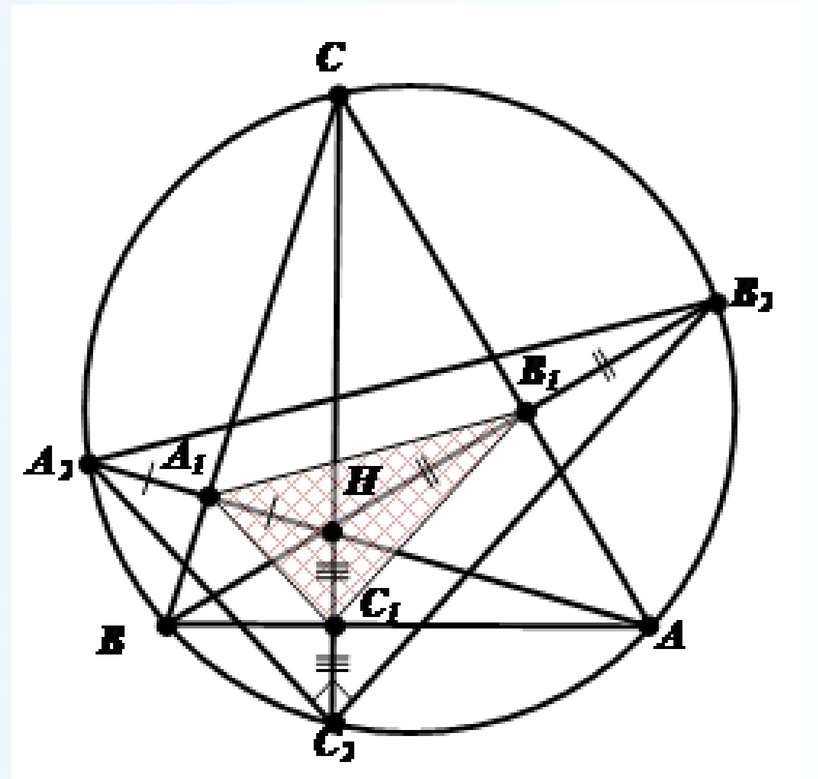
ΔA_2HB_2, ΔB_2HC_2, ΔC_2HA_2, следовательно $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$,

$\mathbf{R} = \frac{1}{2}$

$\mathbf{R}_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}A_1B_1 = 5;$

$\mathbf{R}_{A_2B_2C_2} = 2\,\mathbf{R}_{A_1B_1C_1} = 10$

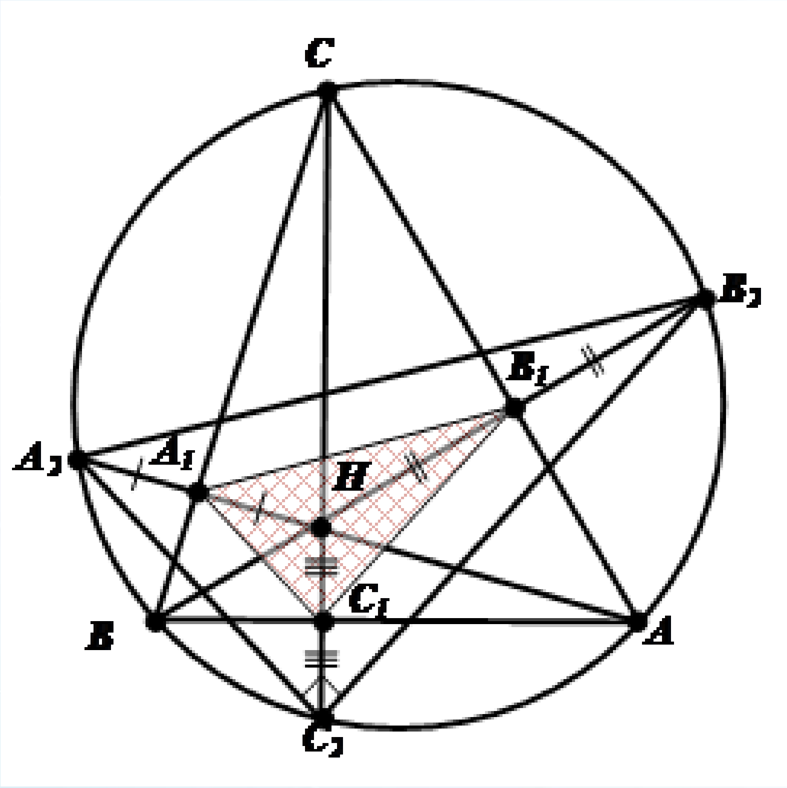
Ответ: 10



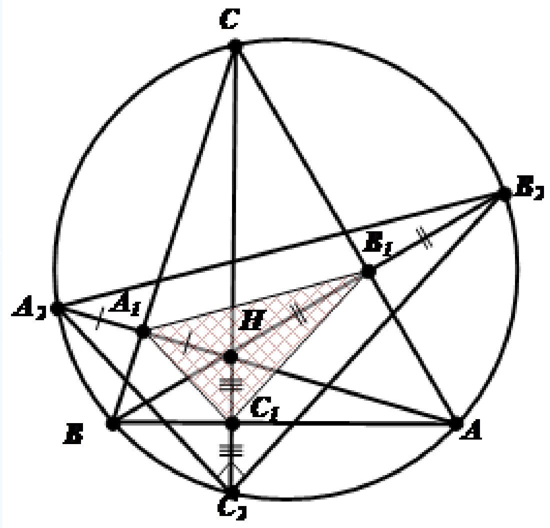
Задача №4

а) Точка H – точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC, а точка P симметрична точке H относительно стороны BC. Докажите, что точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

б) Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 – высоты треугольника ABC. Найдите радиус описанной окружности около треугольника $A_1B_1C_1$, если AB = 21, AC = 20, BC = 13.



Решение:



1) $HA_1 = A_1A_2$, $HB_1 = B_1B_2$, значит A_1B_1 – средняя линия ΔA_2HB_2

$A_1B_1 = \frac{1}{2}A_2B_2$

Аналогично,

B_1C_1 – средняя линия ΔB_2HC_2, A_1C_1 – средняя линия ΔA_2HC_2

2) Следовательно $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} = \frac{1}{2}$, значит $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$

$к = \frac{1}{2}$

3) Точки A_2, B_2, C_2 лежат на окружности, описанной около ΔABC

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$

$S_{ABC} = \sqrt{p\,(p - AB) \cdot (p - BC) \cdot (p - AC)}$

$p = (21 + 20 + 13) : 2 = 27$

$S_{ABC} = \sqrt{27\,(27 - 21) \cdot (27 - 20) \cdot (27 - 13)} = \sqrt{27 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 14} = \sqrt{9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 7} =$

$= 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7$

$R = \frac{21 \cdot 20 \cdot 13}{4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{65}{6}$

4) Радиус окружности, описанной около $\Delta A_1B_1C_1$ равен половине радиуса окружности, описанное около ΔABC, т.е. $\frac{65}{12}$

Ответ: $\frac{65}{12}$

http://www.problems.ru/ - интернет-проект «Задачи»

http://zadachi.mccme.ru/ - информационно-поисковая система «Задачи по геометрии»

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!