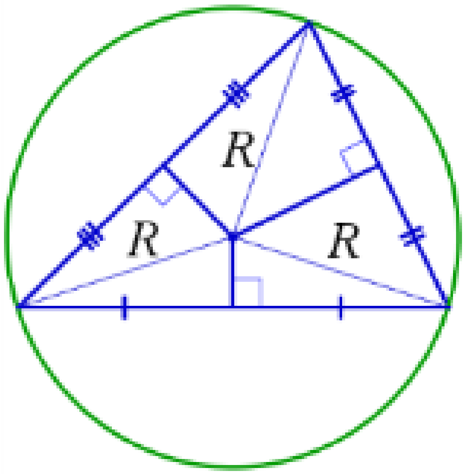
Особенности повторения темы: «Треугольник. Вписанная и описанная окружность»

Бушман Жанна Анатольевна,
учитель математики МБОУ СОШ № 11 им. Ф.Ф. Ушакова город Кропоткин

Описанная окружность:



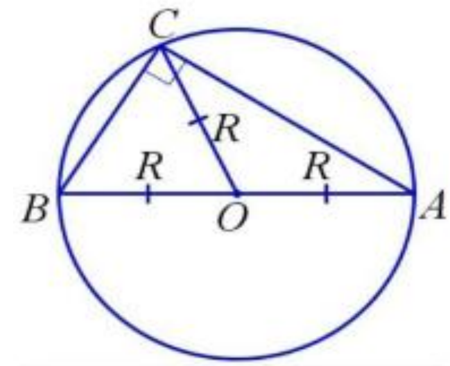
Если все вершины треугольника лежат на окружности, то окружность называется ***описанной*** около треугольник, а треугольник называется вписанным в эту окружность.

Около любого треугольника можно описать окружность и только одну.

Центр описанной окружности в треугольник – это точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Окружность, описанная около прямоугольного треугольника

Если треугольник ***прямоугольный***, то центр описанной окружности – это ***середина*** гипотенузы.



Радиус описанной окружности равен половине гипотенузы или длине медианы, проведенной из вершины прямого угла к гипотенузе.

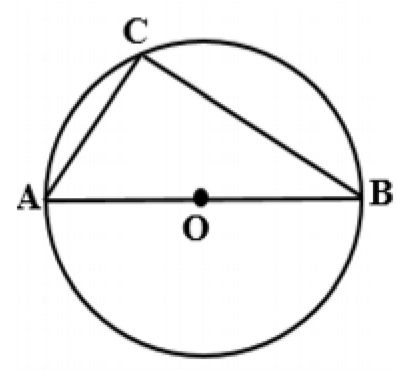
$$\mathbf{OB = OC = OA = R = \frac{1}{2}AB}$$

Если центр окружности, описанной около треугольника принадлежит его стороне, то треугольник – **прямоугольный**.

Задача 1

$$\boldsymbol{R = \frac{1}{2}c}$$

Центр окружности, описанной около треугольника *ABC* лежит на стороне *AB*. Радиус окружности равен 10. Найдите *BC*, если *AC* = 16.



Решение

Так как центр окружности, описанной около треугольника принадлежит его стороне, то треугольник ABC – **прямоугольный**. AB-гипотенуза.
AB=2R= 2 ·10=20
Из прямоугольного треугольника ABC по теореме Пифагора BC=

$$=\sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12$$

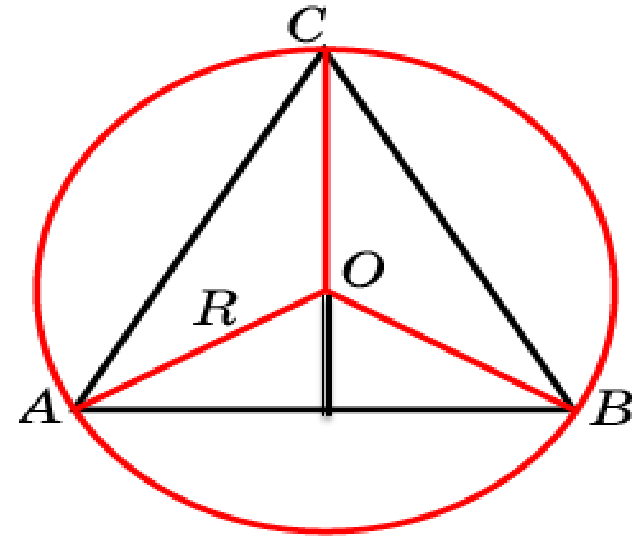
Ответ: 12

Окружность, описанная около равностороннего треугольника

Если треугольник ***равносторонний***, то

$$\boldsymbol{R}= \frac{2}{3} \cdot \mathbf{h}, \text{ где } \boldsymbol{h}= \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{a}$$

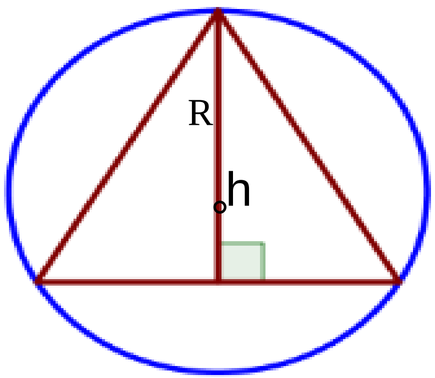
$$\textbf{или } \boldsymbol{R}= \boldsymbol{a}\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \mathbf{R = 2r}$$



Задача 2

$$\boldsymbol{R}= \frac{2}{3} \cdot h$$

Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен 6. Найдите высоту этого треугольника



Решение.

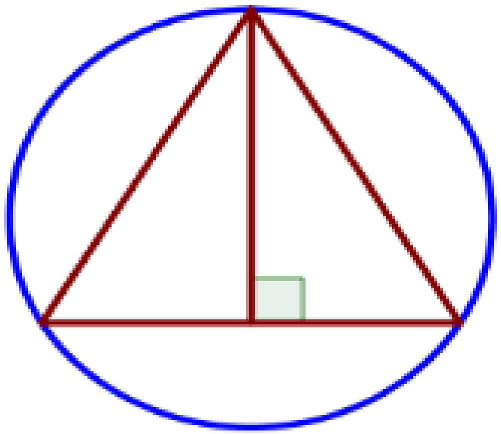
$$h= \frac{3R}{2}, \quad h= \frac{3}{2} \cdot 6=9$$

Ответ : 9

Задача 3

$$R = a\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Сторона равностороннего треугольника равна $4\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



Решение

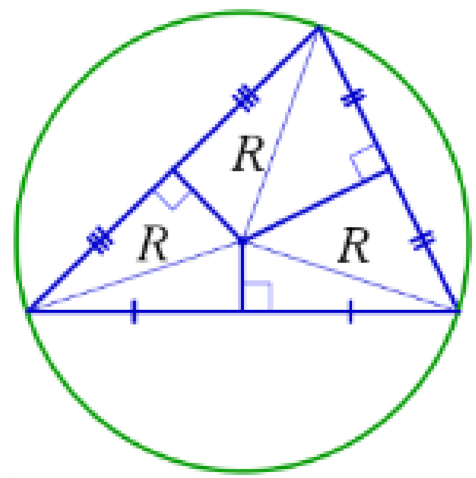
$$R=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 4\sqrt{3}=4\cdot\frac{3}{3}=4.$$

Ответ:4

Окружность, описанная около произвольного треугольника

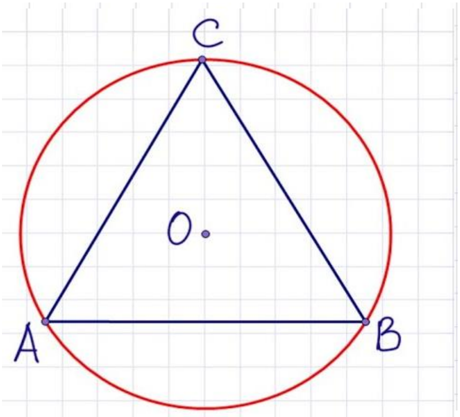
Если треугольник ***произвольный***, то

$$\mathbf{R}=\frac{abc}{4S} \qquad \mathbf{R}=\frac{a}{2sin\alpha}$$



Задача 4

$$\frac{a}{sin\alpha} = 2R$$



В треугольнике АВС $\angle B = 60^0$. Радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен $\sqrt{3}$. Найдите сторону АС треугольника АВС.

Решение.

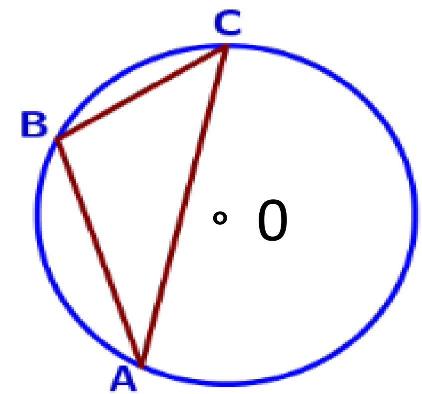
$a = 2R\sin\angle B = 2\sqrt{3}\sin 60° = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$

Ответ:3

Задача 5(№23)

$$\frac{a}{sin\alpha} = 2R$$

Вершины треугольника делят описанную окружность на три дуги, длины которых относятся как 5:3:10. Найдите радиус описанной окружности, если меньшая из сторон треугольника равна 9.



Длины дуг относятся так же, как их градусные меры
◡ AB = 5x ,◡ BC=3x, ◡ AC=10x. Три дуги в сумме дают окружность.

$3x+5x+10x=360$

$18x=360$

$x=360:18$

$x=20$

◡ AB=5·20=100°, ◡ BC = 3·20=60° , ◡ AC=10·20=200°.

∠BAC=1/2·60°=30°(вписанный угол равен половине дуги, на которую опирается).

Меньший угол треугольника лежит против меньшей стороны.

BC- меньшая сторона

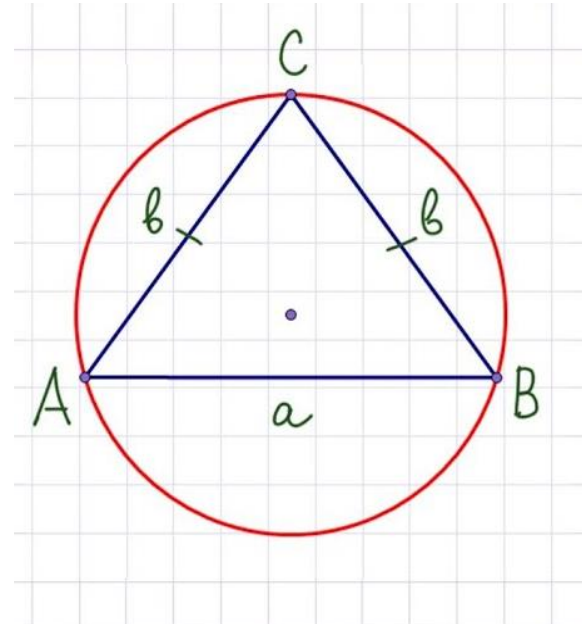
$$R = \frac{9}{2 \cdot \sin 30^\circ} \qquad R= \frac{9}{2 \cdot \frac{1}{2}} =9$$

Ответ: 9

Задача 6

$$\mathbf{R}= \frac{abc}{4S}$$

Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 40, основание равно 48. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



Решение.

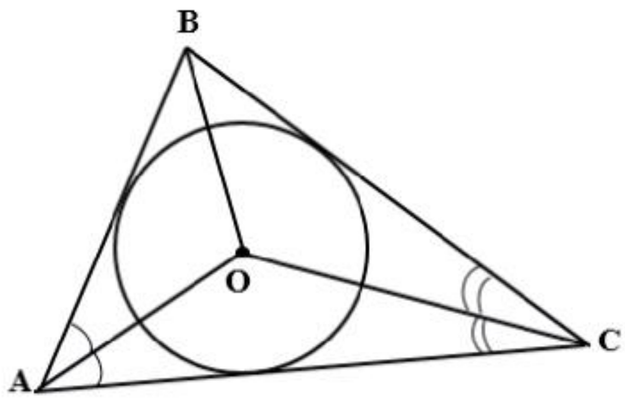
$\mathbf{R}= \frac{abc}{4S} = \frac{a \cdot b^2}{4S}$; $S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)^2}=$

$=(p-b)\sqrt{p(p-a)}=(64-40)\sqrt{64(64-48)}=24\cdot 8 \cdot 4$

$R=\frac{48 \cdot 40 \cdot 40}{4 \cdot 24 \cdot 8 \cdot 4}= 5\cdot 5=25$

Ответ: 25

Вписанная окружность:

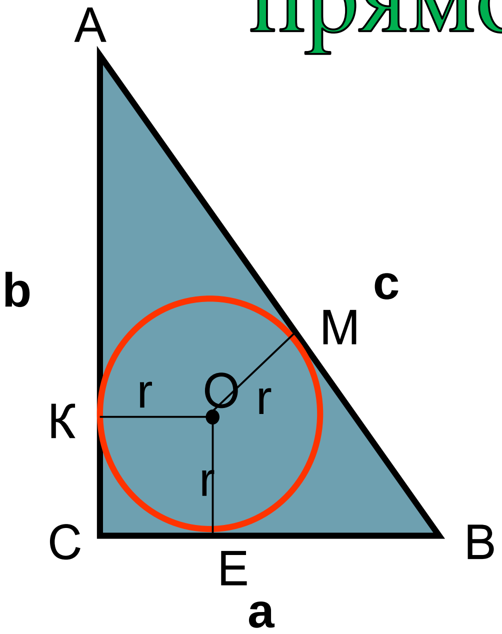


Окружность называется ***<u>вписанной</u>*** в треугольник, если она касается всех его сторон, а треугольник называется описанным около окружности.

В любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну.

Центр вписанной окружности в треугольник – это точка пересечения его биссектрис.

Окружность вписанная в прямоугольный треугольник

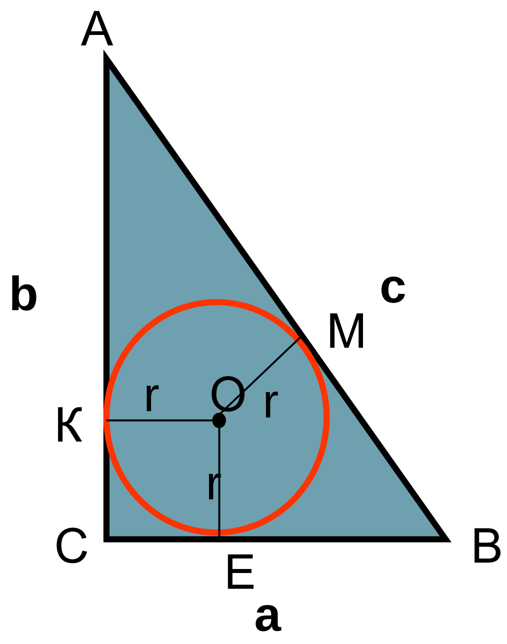


$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

где r – радиус вписанной окружности,
a и b - катеты, c - гипотенуза

Задача 7(№23)

В прямоугольном треугольнике длины катетов равны a и b , длина гипотенузы c. Докажите, что радиус вписанной окружности этого треугольника равен $r = \dfrac{a + b - c}{2}$



Доказательство:

M ,K, E – точки касания вписанной окружности и сторон треугольника.

AK=b-r ,BE=a-r ,

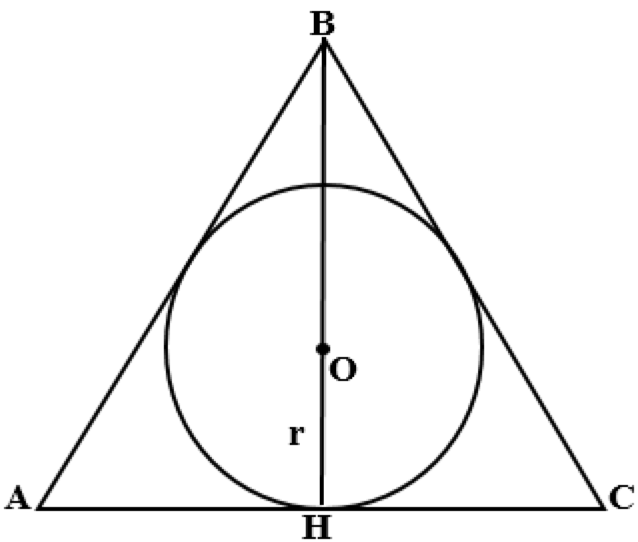
AK=AM ,MB=BE (отрезки касательных, проведенные из одной точки к окружности , равны), **тогда c=AM+MB**

c= b-r+a-r =a+b-2r

2r =a+b-c

r= $\dfrac{a + b - c}{2}$

Окружность вписанная в равносторонний треугольник



Радиус вписанной окружности равностороннего треугольника равен одной трети его биссектрисы (она же является медианой и высотой равностороннего треугольника),

$r = \frac{1}{3}\ BH$

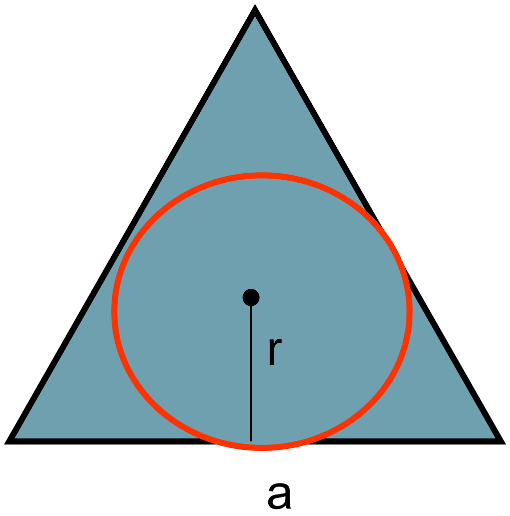
Если сторона треугольника равна *а, то*

$r = a\frac{\sqrt{3}}{6}$

Задача 8

$$r = a\frac{\sqrt{3}}{6}$$

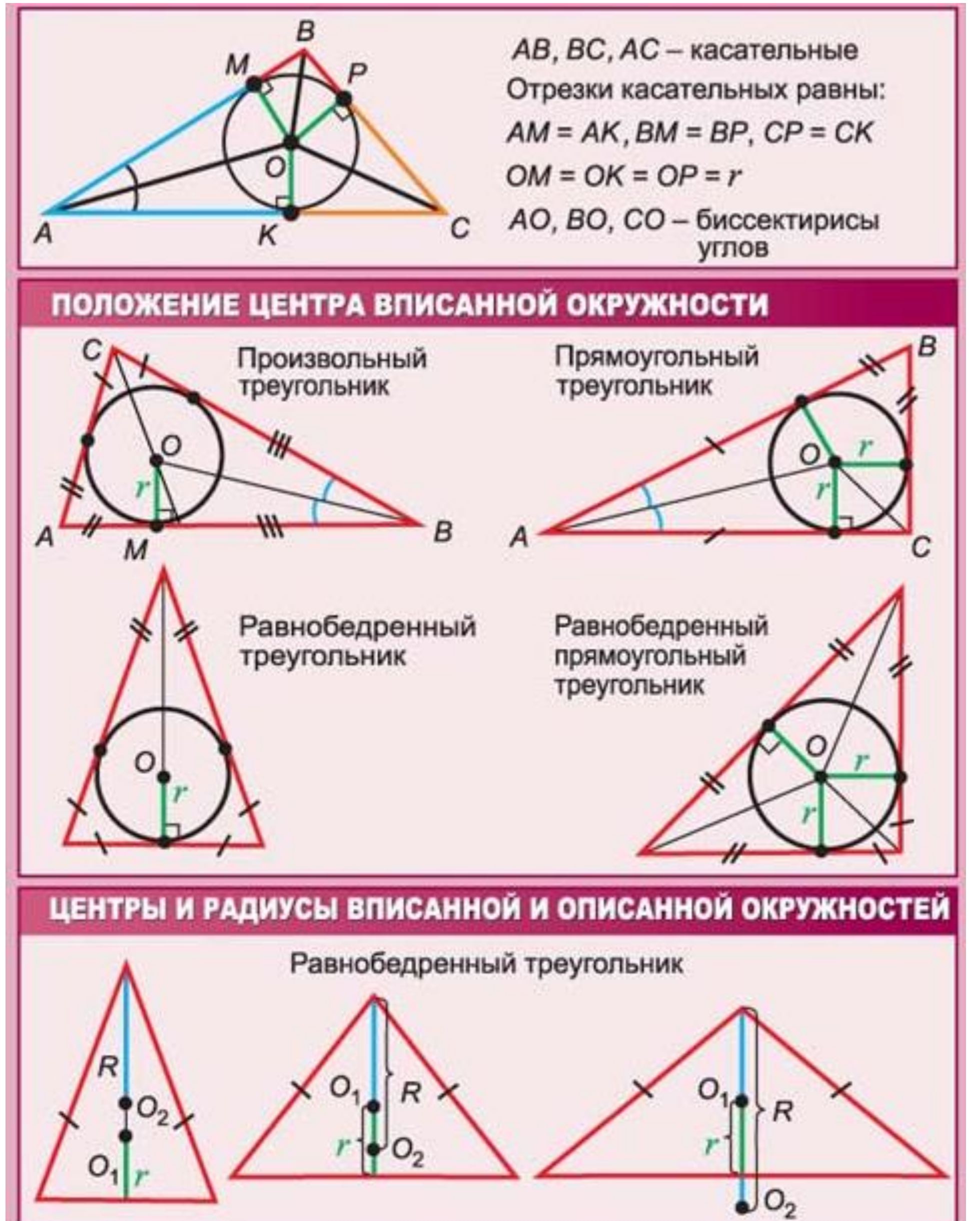
В равносторонний треугольник со стороной 4 см вписана окружность. Найдите её радиус.



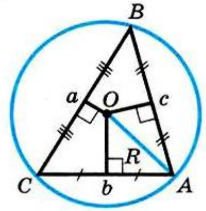
r = $\frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК



Описанная окружность



O — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника;

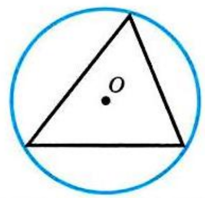
$OA = OB = OC = R$

$$R = \frac{a}{2\sin A}$$

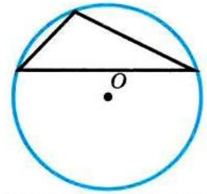
$$R = \frac{abc}{4S}$$

Положение центра описанной окружности

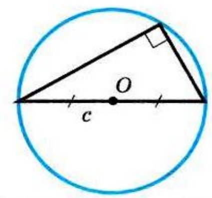
остроугольный треугольник



тупоугольный треугольник



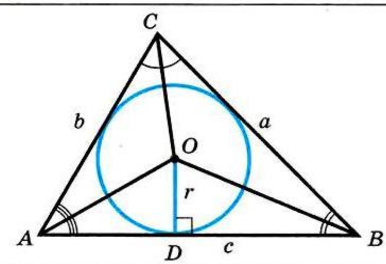
прямоугольный треугольник



O — середина гипотенузы

$$R = \frac{c}{2}$$

Вписанная окружность

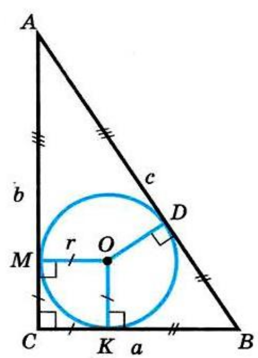


O — точка пересечения биссектрис внутренних углов треугольника;

$OD = r$; $OD \perp AB$

$$r = \frac{2S_{\Delta ABC}}{a+b+c}$$

В прямоугольном треугольнике

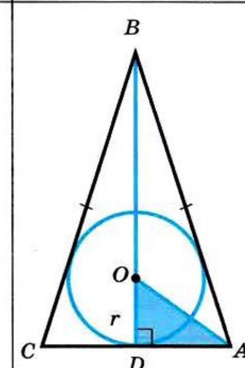


$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

$OK = OM = OD = r$

($OKCM$ — квадрат)

В равнобедренном треугольнике



$AB = DC$;

BD — высота, медиана и биссектриса;

AO — биссектриса угла A

$$OD = r$$