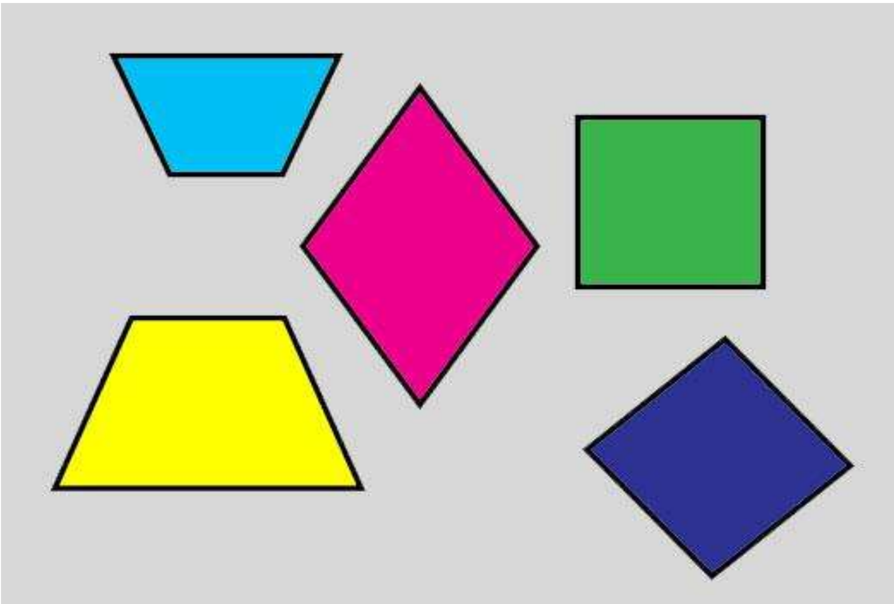
Методическое пособие для подготовки к ОГЭ по теме: «Четырехугольники» для учителей математики



Соболева Г. В. ,учитель математики

МБОУ ООШ №8 Славянского района

2020 г.

Содержание

Аннотация

В 2019 году в критериях оценивания экзаменационной работы ОГЭ выпускника 9 класса произошли значительные изменения. А именно, для преодоления порога успешности учащемуся необходимо было набрать также восемь баллов, но среди них обязательными должны быть два балла из модуля «Геометрия».

В связи с этим событием уроки по геометрии стали более актуальными. И если раньше некоторые педагоги посредствам уроков геометрии устраняли пробелы в знаниях по алгебре, то теперь значимость предмета «Геометрия» резко возросла.

Одним из этапов подготовки к ГИА-9 является отработка практического умения решать текстовые задачи геометрического содержания. И если задач по темам «Треугольники» и «Окружность» в различных учебниках предостаточно, то на тему «Четырёхугольники» их очень мало.

Конечно, можно воспользоваться открытым банком заданий ФИПИ, но в разделах этого банка стоит просто модуль «Геометрия» и найти там учителю задачи по конкретной теме крайне сложно и долго по времени. Да и наличие интернета в кабинетах математики различных школ оставляет желать лучшего.

Так и родилась идея создать методическое пособие в помощь учителям математики для решения задач ОГЭ. Эта разработка будет содержать в себе основной теоретический материал по теме «Четырехугольники», который будет являться помощником в решении ряда задач выносимых на экзамен. Помимо теории учащиеся и преподаватели найдут здесь разбор решения основных задач различных уровней, а также задачи для самостоятельной работы учащихся.

Цель пособия — помочь учителю наиболее эффективно организовывать, осуществлять и контролировать учебный процесс на уроках математики для подготовки к экзаменационной работе. Материал может быть использован при изучении темы «Четырехугольники». Структура предложенных заданий соответствует структуре экзаменационной работы по математике за курс основной школы. Надеюсь, что данный материал будет полезен коллегам.

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК (от греч. τετραγωνον) — это геометрическая фигура (многоугольник), состоящая из четырёх точек (вершин), никакие три из которых не лежат на одной прямой, и четырёх отрезков (сторон), последовательно соединяющих эти точки [1].

Одними из самых ярких представителей четырехугольников являются параллелограмм, трапеция, ромб, прямоугольник и квадрат. Ну, о каждом по порядку.

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Параллелограмм (рис.1) это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны [2].

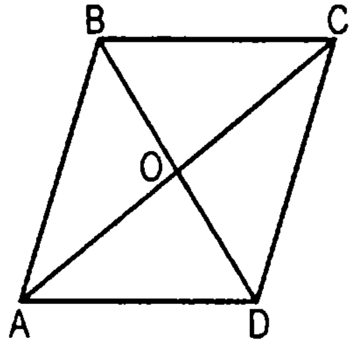


Рисунок 1

Признаки параллелограмма:

1) Если в четырехугольнике две противоположные стороны параллельны и равны, то этот четырехугольник параллелограмм.

2) Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник параллелограмм.

3) Если диагонали четырехугольника пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник параллелограмм.

Перечислим те сведения о параллелограмме, которые понадобятся для решения задач.

1. Противоположные стороны параллельны, то есть: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$;

2. Противоположные стороны равны, то есть: $AB=CD$, $DC=AD$;

3. Противоположные углы равны, то есть: $\angle A=\angle B$, $\angle C=\angle D$;

4. Диагонали точкой пересечения делятся пополам, то есть: AC и BD – диагонали, $AO=OC$, $BO=OD$.

5. Соседние углы в параллелограмме дают в сумме 180^0; то есть $\angle A+\angle B=180^0$; $\angle B+\angle C=180^0$; $\angle C+\angle D=180^0$; $\angle A+\angle D=180^0$.

6. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника; то есть треугольник ABD равен треугольнику BCD, а треугольник ABC равен треугольнику ACD.

7. Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник, то есть треугольник АВК равнобедренный (рис. 2).

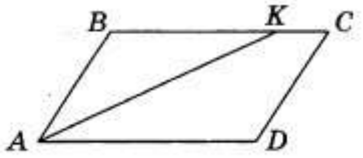


Рисунок 2

8. Биссектрисы двух противоположных углов параллелограмма параллельны или совпадают.

9. Биссектрисы двух соседних углов параллелограмма перпендикулярны.

10. Если в параллелограмм можно вписать окружность, то это ромб или квадрат.

11. Если вокруг параллелограмма описана окружность, то это прямоугольник.

12. Параллелограмм — это центрально-симметричная фигура. Центр симметрии параллелограмма – точка пересечения его диагоналей.

13. В параллелограмме из одного угла можно провести 2 высоты. Меньшая высота проведена к большей стороне. Большая - к меньшей.

14. Площадь параллелограмма.

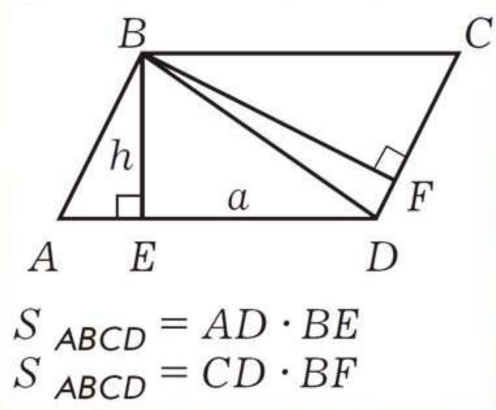


Рисунок 3

1) $S = AD \cdot BE$, где AD сторона, к которой проведена высота BE.

$S = CD \cdot BF$, где CD сторона, к которой проведена высота BF (рис. 3).

2) $S = \frac{1}{2} d1d2\sin\alpha = \frac{1}{2} d1d2\sin\beta$,

d1 - большая диагональ параллелограмма

d2 - меньшая диагональ параллелограмма

α, β - углы между диагоналями (в градусах)

3) $S = ab\sin\alpha$, где a,b- стороны, α - угол между сторонами.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача № 1

Диагональ BD параллелограмма ABCD образует с его сторонами углы, равные 65° и 50°. Найдите меньший угол параллелограмма (рис. 4).

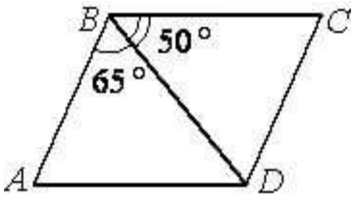


Рисунок 4

Решение. Найдем численное значение угла В. $\angle B = 65^0 + 50^0 = 115^0$. Так как соседние углы в параллелограмме дают в сумме 180^0, то $\angle A = 180^0 - 115^0 = 65^0$. Очевидно, что он и есть искомый.

Ответ:65^0.

Задача №2

Диагональ BD параллелограмма ABCD образует с его сторонами углы, равные 43° и 82°. Найдите меньший угол параллелограмма. (Ответ 55^0).

Задача №3

Диагональ AC параллелограмма ABCD образует с его сторонами углы, равные 45° и 13°. Найдите больший угол параллелограмма. (Ответ 122^0).

Задача №4

Диагональ AC параллелограмма ABCD образует с его сторонами углы, равные 17° и 49°. Найдите больший угол параллелограмма. (Ответ 114^0).

Задача №5

Сумма градусных мер трех углов параллелограмма равна 260^0. Найдите величину острого угла этого параллелограмма. (Ответ 50^0).

Задача №6

В параллелограмме ABCD диагональ BD в 2 раза больше стороны AB и угол BAC = 40°. Найдите тупой угол между диагоналями параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

Решение. Пусть AB= x, тогда и OB = x, OB = AB, треугольник ABO– равнобедренный. Значит и угол BOA равен 40^0 по свойству равнобедренного треугольника. Таким образом, угол COB равен 180^0-40^0=140^0, по свойству смежных углов.

Ответ:140^0.

Задача №7

В параллелограмме ABCD диагональ AC в 2 раза больше стороны AB и ∠ACD=10°. Найдите острый угол между диагоналями параллелограмма. Ответ дайте в градусах. (Ответ 85^0).

Задача №8

В параллелограмме ABCD диагональ AC в 2 раза больше стороны AB и ∠ACD=148°. Найдите тупой угол между диагоналями параллелограмма. Ответ дайте в градусах. (Ответ 164^0).

Задача № 9

В параллелограмме АВСД сторона АВ равна 7 см. Диагонали АС и ВД соответственно равны 18 и 10 см. Найти периметр треугольника СОД.

(Ответ 21)

Задача № 10

Найдите величину острого угла параллелограмма ABCD, если биссектриса угла A образует со стороной BC угол, равный 15°. Ответ дайте в градусах. (Ответ 30^0)

Задача № 11

Найдите величину острого угла параллелограмма ABCD, если биссектриса угла A образует со стороной BC угол, равный 28°. Ответ дайте в градусах.

(Ответ 56^0)

Задача №12

Высота BH параллелограмма ABCD делит его сторону AD на отрезки AH = 2 и HD = 12. Диагональ параллелограмма BD равна 13. Найдите площадь параллелограмма.

Решение: Сторона AD = 2 +12 = 14. Высоту BH легко можно найти используя теорему Пифагора из треугольника HBD. BH=5.

S = AH•BH; S = 14•5 = 70.

Задача № 13

Высота BH параллелограмма ABCD делит его сторону AD на отрезки AH=7 и HD=24. Диагональ параллелограмма BD равна 26. Найдите площадь параллелограмма. (Ответ 310)

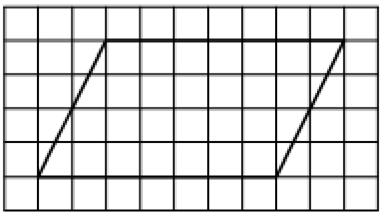


Рисунок 5

Задача № 14

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь (рис. 5). (Ответ 28).

Задача № 15

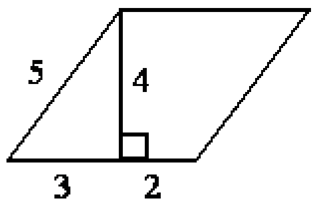


Рисунок 6

Найдите площадь параллелограмма изображенного на рисунке (рис. 6). (Ответ: 20)

Задача № 16

Найдите площадь параллелограмма изображенного на рисунке 7. (Ответ: 96)

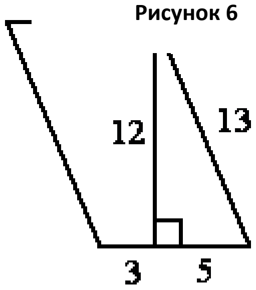


Рисунок 7

Задача № 17

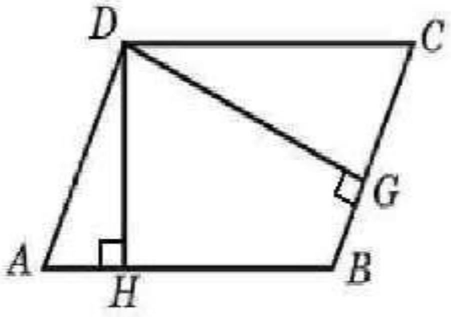


Рисунок 8

В параллелограмме ABCD проведены высоты DH и DG.Длины их равны соответственно 3 см и 4 см. Сторона AB равна 12 см. Найти сторону BC (рис. 8).

Решение: Известно, что площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, которая к ней проведена. Тогда площадь параллелограмма ABCD равна S=AB•DH=12•3=36см^2. Но площадь этого параллелограмма равна также

S= BC•DG, 36=BC•4, то есть BC= 9 см.

Ответ: 9 см.

Задачи на 2 балла.

Задача № 1

Биссектриса угла A параллелограмма ABCD пересекает сторону BC в точке M. Найдите периметр параллелограмма, если BM=6, MC=17.

Решение: Воспользуемся тем, что биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.

AM - биссектриса, поэтому треугольник BAM - равнобедренный, BA=BM=6, а стороны BC=AD=6+17=23, отсюда P=23+23+6+6=58.

Ответ: 58.

Задача № 2

Биссектриса угла A параллелограмма ABCD пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если BK=8, CK=12. (Ответ 56).

Задача № 3

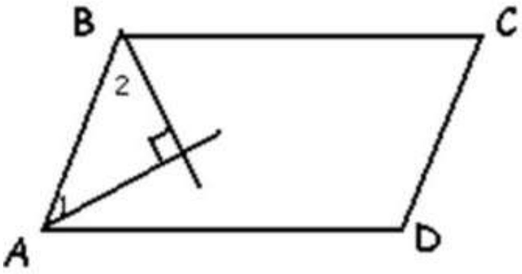


Рисунок 9

Биссектрисы углов A и B параллелограмма ABCD пересекаются в точке M. Найдите сторону AB параллелограмма ABCD, если AM равно 5, а BM равно 12 (рис. 9).

Решение: Известно, что сумма соседних углов в параллелограмме равна 180^0, так как они односторонние. Тогда, так как проведены биссектрисы этих углов, то сумма их половин равна 90^0. То есть, $\angle ABM+\angle BAM=90^0$. Исходя из того, что сумма углов треугольника равна 180^0, получаем $\angle BMA=90^0$. Тогда по теореме Пифагора из треугольника ABM, AB=13.

Ответ: 13.

Задача №4

Биссектрисы углов А и В параллелограмма АВСД пересекаются в точке К. Найдите сторону АВ параллелограмма АВСД, если АК равно 9, а ВК равно 12. (Ответ 15).

ТРАПЕЦИЯ

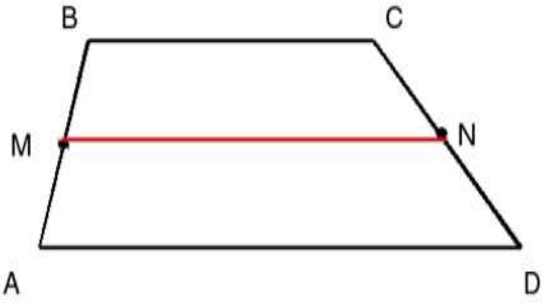


Рисунок 10

Трапе́ция (от др.-греч. τραπέζιον — «столик» от τράπεζα — «стол») — выпуклый четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны нет (рис. 10). Параллельные противоположные стороны называются основаниями трапеции, а две другие — боковыми сторонами [3].

Таким образом, BC∥AD. BC и AD – основания, AB и CD боковые стороны.

Средняя линия — отрезок, соединяющий середины боковых сторон. Она параллельна основаниям трапеции и равна их полу сумме. MN - средняя линия трапеции ABCD. То есть, MN//AD, MN//BC, MN = (BC+AD)/2.

Различают следующие виды трапеции: произвольная, равнобедренная и прямоугольная (рис. 11).

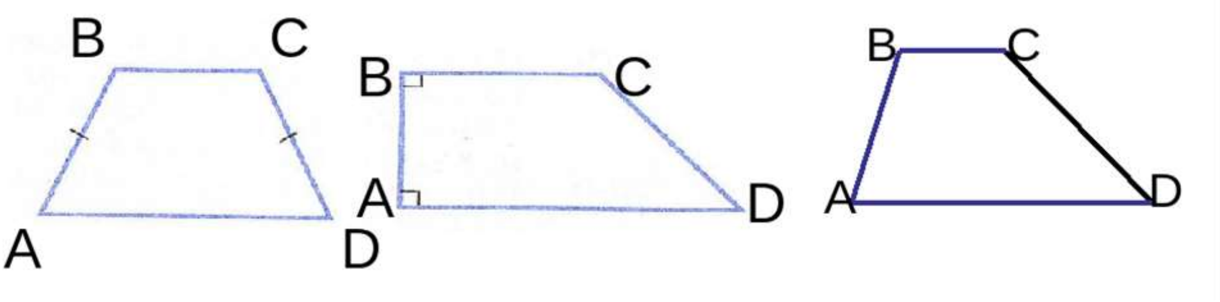


Рисунок 11

Равнобедренная Прямоугольная Произвольная

Перечислим те сведения о трапеции, которые понадобятся для решения задач.

1. Сумма двух углов прилегающих к боковой стороне равна 180^0. То есть, $\angle A+\angle B=180^0$; $\angle C+\angle D=180^0$;

2. В равнобедренной трапеции боковые стороны равны, углы при основаниях равны, диагонали равны. То есть, AB=CD, $\angle A=\angle D$, $\angle C=\angle B$, AC=BD;

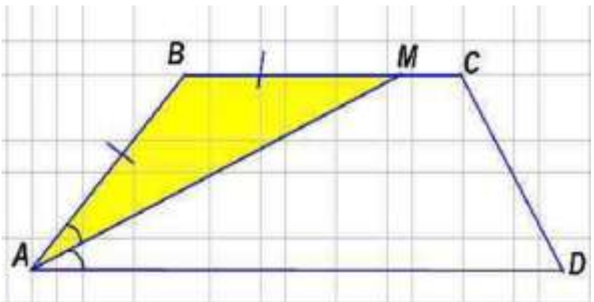


Рисунок 12

3. Биссектриса угла трапеции отсекает от него равнобедренный треугольник, то есть треугольник ABM равнобедренный (рис. 12).

4. Биссектрисы углов при боковой стороне трапеции перпендикулярны (рис. 13).

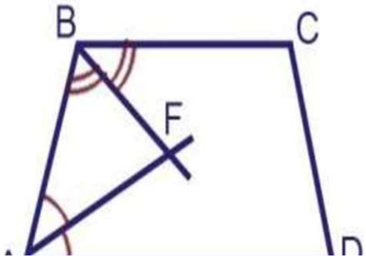


Рисунок 13

5. В прямоугольной трапеции боковая сторона перпендикулярна основаниям.

6. У равнобедренной трапеции есть ось симметрии. Она проходит через середины оснований им перпендикулярно.

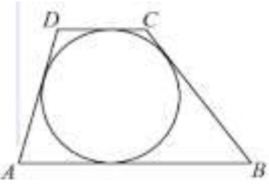


Рисунок 14

7. Если в трапецию можно вписать окружность, то сумма оснований равна сумме боковых сторон. То есть, AB+CD= BC+AD (рис. 14);

8. Если вокруг трапеции описана окружность, то сумма противоположных углов равна 180^0. То есть, $\angle A+\angle C = \angle B + \angle D=180^0$ (рис. 15);

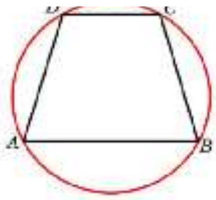
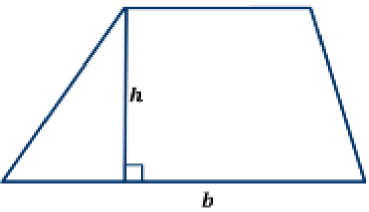


Рисунок 15

9. Площадь трапеции равна произведению средней линии трапеции на высоту. Или просто произведению полу суммы оснований на высоту (рис.16).

10. Если диагонали трапеции перпендикулярны, то ее площадь равна: $S=\frac{1}{2}d_1d_2$, где d_1 и d_2 ее диагонали.



$$S=\frac{1}{2}(a+b)\cdot h$$

Рисунок 16

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача № 1

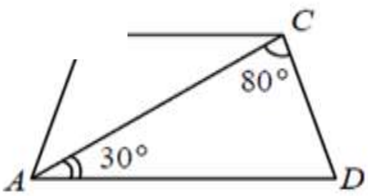


Рисунок 17

Найдите больший угол равнобедренной трапеции ABCD, если диагональ AC образует с основанием AD и боковой стороной CD углы, равные 30° и 80° соответственно (рис. 17).

Решение: Так как сумма углов треугольника равна 180^0, то из треугольника ACD угол D равен 180^0-$(30^0+80^0)=70^0$. Воспользуемся тем, что сумма двух углов прилегающих к боковой стороне трапеции равна 180^0. Таким образом, угол C равен 110^0. Очевидно, что он является одним из больших углов трапеции.

Ответ:110^0.

Задача №2

Найдите угол ADC равнобедренной трапеции ABCD, если диагональ AC образует с основанием BC и боковой стороной AB углы, равные 42° и 41° соответственно. (Ответ 97^0)

Задача № 3

Сумма двух углов равнобедренной трапеции равна 136°. Найдите больший угол трапеции. Ответ дайте в градусах.

Решение: Сумму 136^0 могут дать только два острых угла трапеции. Они равны, так как трапеция равнобедренная. Значит, каждый из них равен $136^0:2=68^0$. Исходя из того, что что сумма двух углов прилегающих к боковой стороне равна 180^0, больший угол равен $180^0-68^0=112^0$.

Задача № 4

Сумма двух углов равнобедренной трапеции равна 240°. Найдите меньший угол трапеции. Ответ дайте в градусах. (Ответ 60^0).

Задача № 5

Найдите меньший угол равнобедренной трапеции, если два ее угла относятся как 1:2. Ответ дайте в градусах. (Ответ 60^0).

Задача № 6

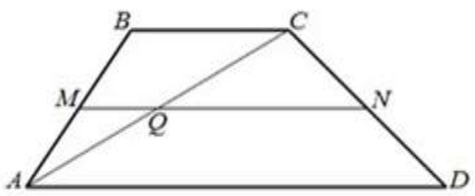


Рисунок 18

Основания трапеции равны 7 см и 12 см. Диагональ трапеции делит среднюю линию на два отрезка. Найдите длину большего из них (рис.18).

Решение: Так как MN средняя линия трапеции, то QN по теореме Фалеса средняя линия треугольника ACD. По условию AD равно 12, значит QN равно 6.

Ответ: 6.

Задача № 7

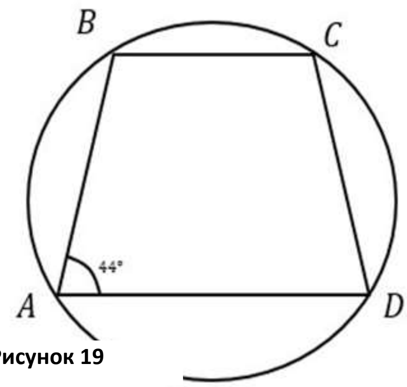


Рисунок 19

Около трапеции, один из углов которой равен 44°, описана окружность. Найдите остальные углы трапеции (рис. 19).

Решение: Воспользуемся тем, что если вокруг трапеции описана окружность, то сумма противоположных углов равна 180^0.

Тогда угол C равен 136^0. Углы C и D односторонние. Тогда угол D равен 44^0. По аналогии угол B равен 136^0.

Ответ: 136^0; 44^0; 136^0.

Задача № 8

Около трапеции, один из углов которой равен 152°, описана окружность. Найдите остальные углы трапеции. (Ответ 28^0; 152^0; 28^0)

Задача№ 9

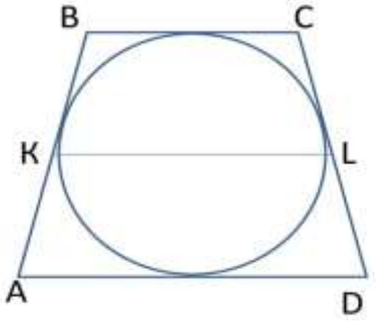


Рисунок 20

В трапецию, сумма длин боковых сторон которой равна 24, вписана окружность. Найдите длину средней линии трапеции (рис. 20).

Решение: Воспользуемся тем, что если в трапецию можно вписать окружность, то сумма оснований равна сумме боковых сторон. То есть, AB+CD= BC+AD=24. Средняя линия равна полу сумме оснований. Отсюда, KL равно 24:2=12.

Ответ: 12.

Задача № 10

В трапецию, сумма длин боковых сторон которой равна 17, вписана окружность. Найдите длину средней линии трапеции. (Ответ 8,5)

Задача № 11

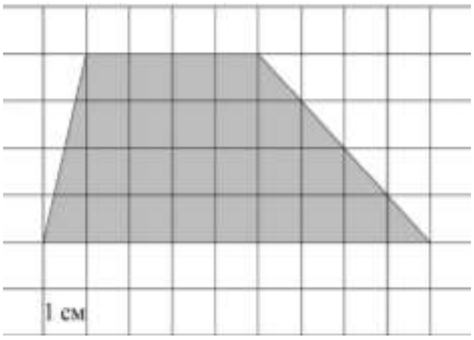


Рисунок 21

Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см 1 см (рис. 21). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Ответ: 26.

Задача № 12

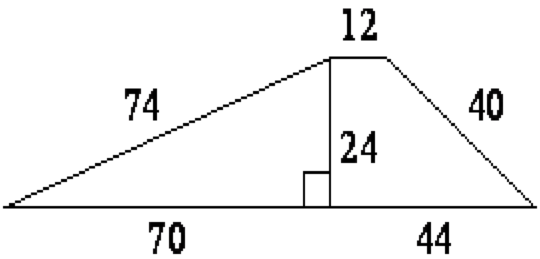


Рисунок 22

Найдите площадь трапеции изображенной на рисунке 22. (Ответ: 1512).

Задачи на 2 балла

Задача № 1

Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите AB, если AF = 28, BF = 21 (рис. 23).

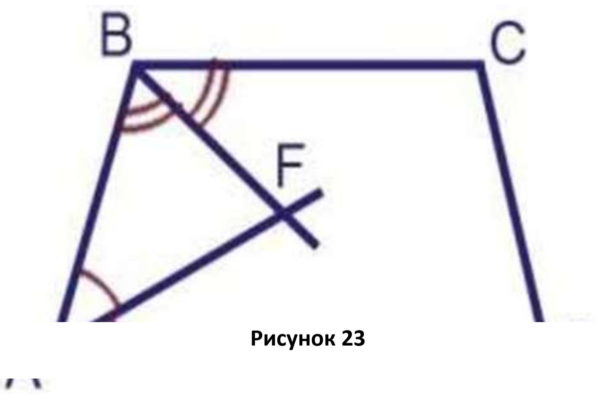


Рисунок 23

Решение: Известно, что сумма углов при боковой стороне трапеции равна 180^0, так как они односторонние. Тогда, так как проведены биссектрисы этих углов, то сумма их половин равна 90^0. То есть, $\angle ABF+\angle BAF=90^0$. Исходя из того, что сумма углов треугольника равна 180^0, получаем $\angle BFA=90^0$. Тогда по теореме Пифагора из треугольника ABF сторона AB равна 35.

Ответ: 35.

Задача № 2

Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите AB, если AF = 24, BF = 32. (Ответ 40)

Задача № 3

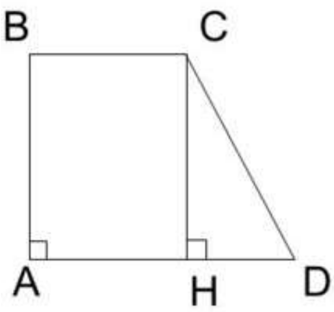


Рисунок 24

Тангенс острого угла прямоугольной трапеции равен $\frac{5}{6}$. Найдите её большее основание, если меньшее основание равно высоте и равно 15 (рис. 24).

Решение: Острым углом в этой трапеции является угол Д. Исходя из определения тангенса $\frac{CH}{HД}=\frac{5}{6}$, тогда поскольку CH=15, то НД=18.

AH=BC=15. Большее основание равно АН+НД=15+18=33.

Ответ: 33.

Задача № 4

Тангенс острого угла прямоугольной трапеции равен $\frac{3}{5}$. Найдите её большее основание, если меньшее основание равно высоте и равно 12.

(Ответ 32).

Задача № 5

Основания равнобедренной трапеции равны 50 и 104, боковая сторона 45. Найдите длину диагонали трапеции. (Ответ 85).

Указание: Для решения необходимо воспользоваться теоремой Пифагора дважды.

Задача № 6

Углы при одном из оснований трапеции равны 50^0 и 40^0 а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 15 и 13. Найдите основания трапеции. (Ответ 2;28).

Указание: Для решения необходимо продлить боковые стороны до пересечения и воспользоваться свойствами получившегося прямоугольного треугольника.

Задача № 7

Найдите боковую сторону AB трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 45° и 120°, а CD = 40. (Ответ $20\sqrt{6}$).

Указание: Для решения необходимо провести перпендикуляры из вершин C и B к основанию АД.

РОМБ

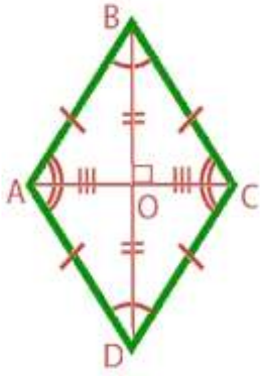


Рисунок 25

Ромб (др.-греч. ῥόμβος, лат. rombus, в буквальном переводе: «бубен») — это параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 25)[4].

Перечислим те свойства ромба, которые нам понадобятся для решения задач. Исходя из того, что ромб является параллелограммом по определению, то все свойства параллелограмма актуальны и для ромба. Но есть и индивидуальные особенности фигуры.

1. Диагонали ромба являются биссектрисами углов ромба. То есть, $\angle ABO=\angle OBC=\angle ODC=\angle ADO$;

$\angle BAO=\angle OCB=\angle DCO=\angle DAO$;

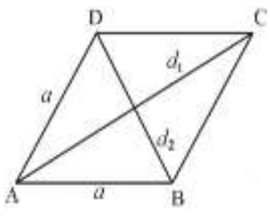


Рисунок 26

2. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны, то есть $AC\perp BD$;

3. Площадь ромба можно найти, используя формулы для нахождения площади параллелограмма. Но есть дополнительная формула нахождения площади ромба как площадь фигуры, имеющей перпендикулярные диагонали.

$S=\frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$, где d_1 и d_2 диагонали ромба (рис. 26).

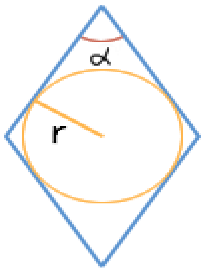


Рисунок 27

4. Также хотелось бы привести более редкие формулы площади ромба.

$S=2ar$; $S=a^2 \sin\alpha$, a - сторона ромба, r – радиус вписанной окружности , α-угол ромба (рис. 27).

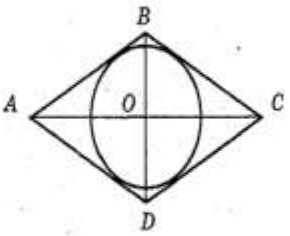


Рисунок 28

5. В ромб всегда можно вписать окружность. Её центр это точка пересечения диагоналей ромба (рис. 28).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача № 1

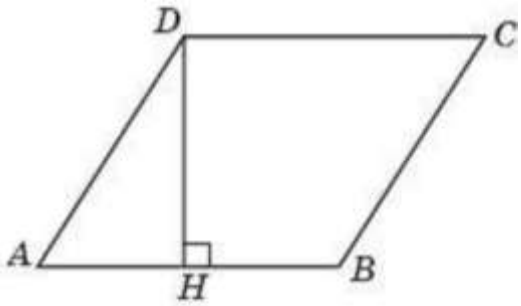


Рисунок 29

Сторона ромба равна 42, а острый угол равен 60° . Высота ромба, опущенная из вершины тупого угла, делит сторону на два отрезка. Каковы длины этих отрезков (рис. 29)?

Решение: Рассмотрев треугольник АДН, мы видим, что угол АДН равен 30^0. По свойству прямоугольного треугольника АН=42:2=21. У ромба все стороны равны, значит НВ=42-21=21.

Ответ: 21;21.

Задача № 2

Тупой угол ромба равен 120°. Сторона ромба равна 76. Высота ромба, опущенная из вершины тупого угла, делит сторону на два отрезка. Каковы длины этих отрезков? (Ответ 38; 38)

Задача № 3

Площадь ромба равна 99, а периметр равен 44. Найдите высоту ромба.

Решение: Исходя из того, что у ромба все стороны равны, получаем длину стороны, разделив периметр на 4. Таким образом, сторона равна 11. Площадь ромба, как параллелограмма, равна произведению высоты на сторону, к которой она проведена. Поэтому, высота равна 99:11=9.

Ответ: 9.

Задача № 4

Площадь ромба равна 414, а периметр равен 92. Найдите высоту ромба. (Ответ 18).

Задача № 5

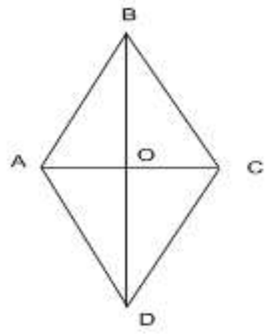


Рисунок 30

Диагональ ромба равна 10, а сторона равна 13. Найдите площадь ромба (рис. 30).

Решение: Пусть AC равно 10. Тогда по свойству параллелограмма коим является ромб, AO=10:2=5. Так как $AC \perp BD$ и AB=13 по условию, то из треугольника ABO по теореме Пифагора BO=12. Значит, ВД=24. Используя формулу площади ромба через диагонали, имеем $S=(10 \cdot 24)/2=120$.

Ответ: 120.

Задача №6

Диагональ ромба равна 20, а сторона равна 26. Найдите площадь ромба. (Ответ 480).

Задача №7

Сторона ромба равна 29, а диагональ равна 42. Найдите площадь ромба. (Ответ 840).

Задача № 8

Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 15 и 8. (Ответ 60).

Задача № 9

Периметр ромба равен 80, а один из углов равен 30°. Найдите площадь ромба. (Ответ 200).

Задача № 10

Сторона ромба равна 9, а расстояние от центра ромба до неё равно 1. Найдите площадь ромба. (Ответ18).

Задача № 11

Сторона ромба равна 17, а расстояние от центра ромба до неё равно 6. Найдите площадь ромба. (Ответ 204).

Задача № 12

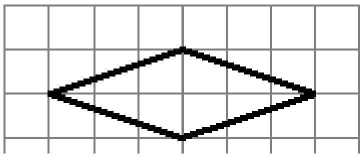


Рисунок 31

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите длину его большей диагонали (рис. 31).

Ответ: 6.

Задача № 13

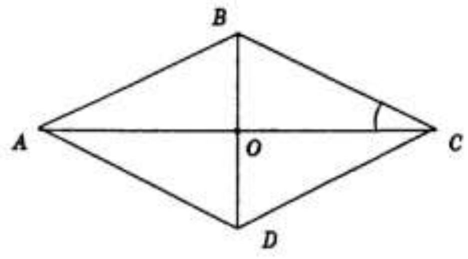


Рисунок 32

В ромбе АВСД диагонали пересекаются в точке О. Угол ВСО равен 50^0. Найти угол ОВС (рис. 32).

Решение: Воспользуемся тем фактом, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны. Значит в треугольнике ВСО угол О равен 90^0. Исходя из того, что сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90^0, нужный нам угол ОВС равен 40^0.

Ответ: 40^0.

Задача № 14

Диагонали АС и ВД ромба АВСД пересекаются в точке О. Угол АВО равен 27^0. Найти углы ромба. (Ответ 54^0; 126^0; 54^0; 126^0).

Задачи на 2 балла

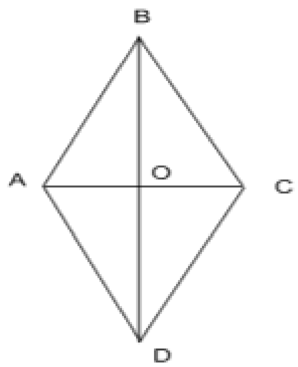


Рисунок 33

Задача № 1

Найти сторону ромба, если его диагонали относятся как 3 : 4, а площадь равна 24 (рис. 33).

Решение: Площадь ромба находится по формуле:

$S = 1/2 \cdot BD \cdot AC$.

$AC/BD = 3/4$ по условию задачи, поэтому $AC = 3/4 \cdot BD$ или $24 = 1/2 \cdot BD \cdot AC$. Подставив значение АС, имеем $24 = 1/2 \cdot 3/4 \cdot BD^2$,

$24 = 3/8 \cdot BD^2$. Значит $BD^2 = 24 : 3/8 = 64$, а $BD = 8$. $AC = 8 \cdot 3/4 = 6$. По теореме Пифагора $AB^2 = AO^2 + BO^2$. $BO = BD/2 = 4$, $AO = AC/2 = 3$, поэтому $AB^2 = 9 + 16 = 25$, а значит $AB = 5$.

Ответ: АВ = 5.

Задача № 2

Диагонали ромба равны 48 см и 14 см. Найти его сторону и радиус вписанной окружности. (Ответ 25 см, 6,72 см)

Указание: Для решения можно воспользоваться формулой площади ромба через радиус описанной окружности.

Задача № 3

Найти диагонали ромба, если одна из них в 1,5 раза больше другой, а площадь ромба равна 27см^2. (Ответ AC = 6 см, BD = 9 см).

Задача № 4

Высота AH ромба ABCD делит сторону CD на отрезки DH=8 и CH=2. Найдите высоту ромба. (Ответ 6).

ПРЯМОУГОЛЬНИК

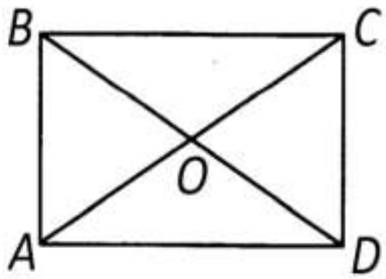


Рисунок 34

Прямоугольник — параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 34)[5].

Исходя из того, что прямоугольник является параллелограммом по определению, то все свойства параллелограмма актуальны и для него. Но есть и индивидуальные особенности фигуры.

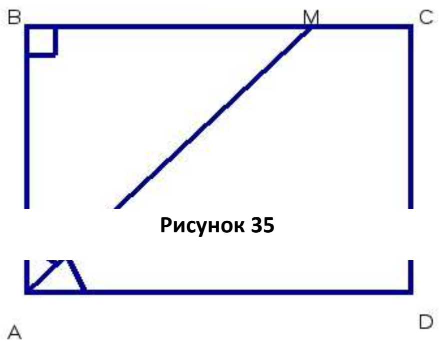


Рисунок 35

1. Диагонали прямоугольника равны. То есть AC=ВД;
2. Диагонали прямоугольника разделяют его на четыре равновеликих треугольника. То есть, площади всех четырех образованных треугольников равны.
3. При пересечении диагоналей образуется четыре равных отрезка. То есть AO=OB=OC=OД.
4. Биссектриса угла прямоугольника отсекает прямоугольный равнобедренный треугольник. То есть треугольник ABM равнобедренный (рис. 35).

5. Все четыре треугольника образованные пересечением диагоналей являются равнобедренными.

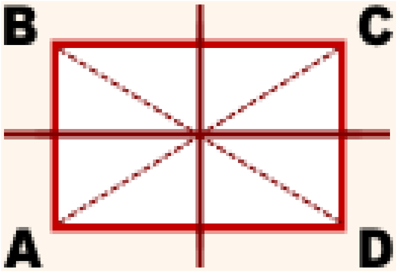


Рисунок 36

6. Прямоугольник имеет две оси симметрии. Осями симметрии прямоугольника являются прямые, проходящие через точку пересечения диагоналей параллельно сторонам (рис. 36).

7. Прямоугольник как частный случай параллелограмма — это центрально-

симметричная фигура. Центр симметрии прямоугольника – точка пересечения его диагоналей.

8. Вокруг прямоугольника можно описать окружность. Её центром будет точка пересечения диагоналей прямоугольника.
9. Если в прямоугольник можно вписать окружность, то этот прямоугольник квадрат.
10. Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон. То есть, S=AB•AD.
11. Также можно найти площадь, зная площадь любого из четырех треугольников, образованных при пересечении диагоналей. Просто умножить её на четыре. То есть, $S=4\cdot S\triangle ABO$;
12. Площадь прямоугольника можно найти, зная длину его диагонали и угол между диагоналями. $S=\frac{1}{2}\cdot AC^2\cdot \sin\alpha$, где α- угол между диагоналями прямоугольника.

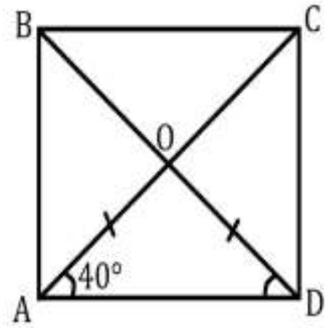


Рисунок 37

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача №1

Диагональ прямоугольника образует угол 40° с одной из его сторон. Найдите острый угол между диагоналями этого прямоугольника. Ответ дайте в градусах (рис. 37).

Решение: Рассмотрим треугольник АОД. Он равнобедренный. Значит угол АДО тоже 40^0. Так как сумма углов треугольника 180^0, то угол АОД равен 100^0. Найдем смежный с ним угол. Он равен 80^0. Этот угол искомый.

Ответ:80^0.

Задача № 2

Диагональ прямоугольника образует угол 75° с одной из его сторон. Найдите острый угол между диагоналями этого прямоугольника. Ответ дайте в градусах. (Ответ 30^0).

Задача № 3

Диагонали прямоугольника пересекаются под углом 80^0. Найдите углы которые образует диагональ со смежными сторонами прямоугольника. (Ответ 50^0; 40^0)

Задача № 4

В прямоугольнике АВСД диагонали пересекаются в точке О. Угол ОДС равен 40^0. Найти угол ВОС. (Ответ 80^0).

Задача № 5

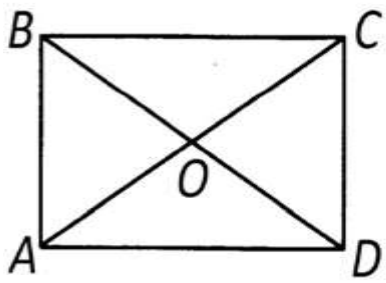


Рисунок 38

Меньшая сторона прямоугольника равна 14, диагонали пересекаются под углом 60^0. Найдите диагонали прямоугольника (рис. 38).

Решение: Рассмотрим треугольник АОВ. Он является равнобедренным. Используя свойство равнобедренного треугольника, то что угол АОВ равен 60^0 и сумма углов треугольника 180^0 , получаем $\angle ABO = \angle BAO = 60^0$. Делаем вывод, что треугольник равносторонний. А значит и ОА=14. Тогда диагональ равна 28.

Ответ: 28.

Задача № 6

В прямоугольнике АВСД диагонали АС и ВД пересекаются в точке О. Сторона АД равна 12 см. Диагональ АС равна 16 см. Найти периметр треугольника ВОС. (Ответ 28)

Задача № 7

Найдите диагональ прямоугольника, две стороны которого равны 6 и 8.

(Ответ 10).

Указание: Для решения воспользоваться теоремой Пифагора.

Задача № 8

Стороны прямоугольника относятся как 4:7. Найдите меньшую сторону прямоугольника, если его периметр равен 66.

Решение: Пусть х это одна часть, тогда 4х+7х=33; так как сумма смежных сторон прямоугольника это есть полупериметр. 11х=33, х=3. Одна часть равна трем. Тогда меньшая сторона равна $4 \cdot 3 = 12$.

Ответ: 12.

Задача № 9

Площадь прямоугольника равна 18. Найдите его большую сторону, если она на 3 больше меньшей стороны.

Решение: Площадь прямоугольника равна произведению его соседних сторон. Обозначим AD как x, тогда DC будет равно x+3. Можем записать:

x(x+3)=18; Решив квадратное уравнение получим кони 3 и –6. Отрицательный корень не удовлетворяет по смыслу. Поэтому меньшая сторона равна 3, а большая 6.

Ответ: 6.

Задача № 10

Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 48, а отношение соседних сторон равно 3 : 4. (Ответ 28).

Задача № 11

В прямоугольнике расстояние от точки пересечения диагоналей до меньшей стороны на 2 больше, чем расстояние от нее до большей стороны. Периметр прямоугольника равен 72. Найдите меньшую сторону прямоугольника. (Ответ 34).

Задача № 12

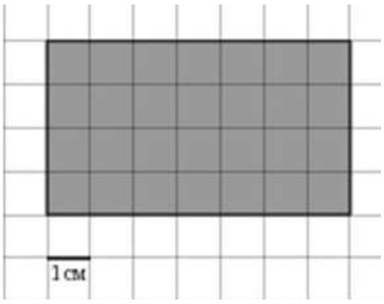


Рисунок 39

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён прямоугольник. Найдите его площадь (рис. 39).

Ответ:28.

Задачи на 2 балла

Задача № 1

Периметр прямоугольника равен 34, а площадь равна 60. Найдите диагональ этого прямоугольника.

Решение: Обозначим AD=x, AB=y.

Периметр равен 34, значит x+y=17, а $x \cdot y$=60. Решив систему из этих двух уравнений получаем, что стороны прямоугольника равны 5 и 12. Зная стороны прямоугольника, из треугольника АВД по теореме Пифагора находим диагональ ВД = 13.

Ответ: 13.

Задача № 2

Найдите диагональ прямоугольника, если его периметр равен 68, а периметр одного из треугольников, на которые диагональ разделила прямоугольник, равен 60. (Ответ 26).

Задача № 3

Середины последовательных сторон прямоугольника, диагональ которого равна 5, соединены отрезками. Найдите периметр образовавшегося четырехугольника. (Ответ 10).

Указание: Для решения необходимо доказать, что полученная фигура ромб.

КВАДРАТ

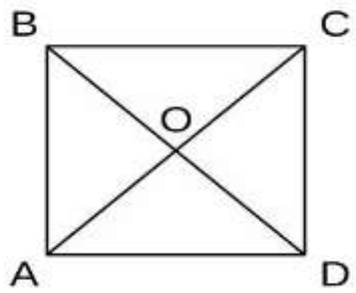


Рисунок 40

Квадра́т — правильный четырёхугольник, то есть четырёхугольник, у которого все углы равны и все стороны равны (рис. 40). Квадрат является одновременно частным случаем ромба и прямоугольника [6].

Так как квадрат является частным случаем прямоугольника, то все свойства прямоугольника для него актуальны. Однако перечислим те свойства квадрата, которые присущи только ему.

1. Периметр квадрата в 4 раза больше его стороны.
2. Диагональ квадрата в $\sqrt{2}$ раза больше его стороны.
3. В любой квадрат можно вписать окружность.
4. Вокруг любого квадрата можно описать окружность.
5. Центры вписанной в квадрат окружности и описанной вокруг квадрата окружности совпадают.
6. Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами углов квадрата.
7. Диагонали делят квадрат на четыре равных, равнобедренных, прямоугольных треугольника.

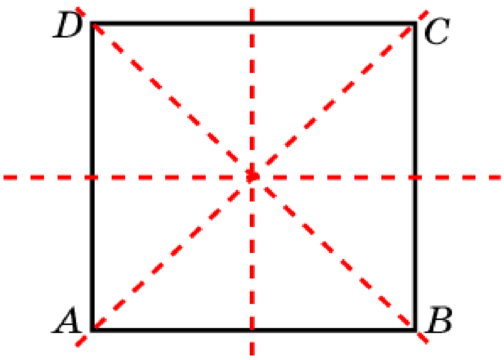


Рисунок 41

8. Квадрат имеет четыре оси симметрии (рис. 41).

9. Квадрат — это центрально-симметричная фигура. Центр симметрии квадрата – точка пересечения его диагоналей.

10. Площадь квадрата равна квадрату его стороны. То есть, $S=a^2$, где a- сторона квадрата.

11. Площадь квадрата можно найти, зная длину его диагонали.

$S=\frac{1}{2}d^2$, где d - диагональ квадрата.

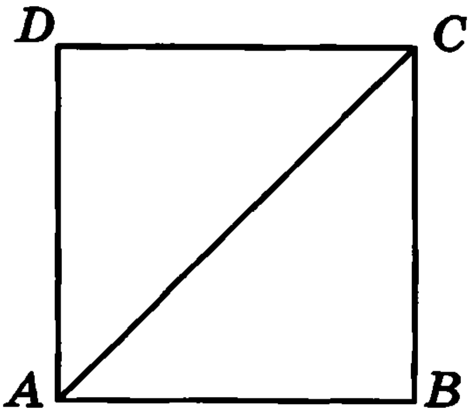


Рисунок 42

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача № 1

Найдите сторону квадрата, диагональ которого равна $\sqrt{18}$ (рис. 42).

Решение: Воспользуемся тем фактом, что диагональ квадрата в $\sqrt{2}$ раза больше его стороны. Получаем АД= $\sqrt{18}:\sqrt{2}=\sqrt{9}=3$.

Ответ: 3.

Задача № 2

Найдите сторону квадрата, диагональ которого равна $\sqrt{72}$. (Ответ 6).

Задача № 3

Найдите диагональ квадрата, если известно, что его площадь равна 32 см^2.

Решение: Известно, что площадь квадрата вычисляется по формуле: $S=\frac{1}{2}d^2$, где d - диагональ квадрата. Тогда подставив известное значение площади в эту формулу, получим уравнение: $32=\frac{1}{2}d^2$. Отсюда, d=8.

Ответ: 8 см.

Задача № 4

Найдите диагональ квадрата, сторона которого равна $\sqrt{8}$. (Ответ 4).

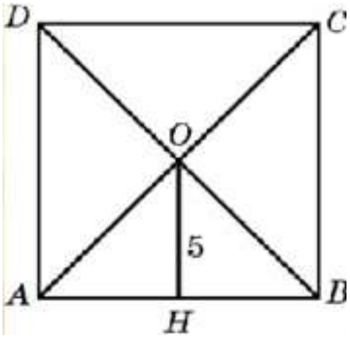


Рисунок 43

Задача № 5

В квадрате расстояние от точки пересечения диагоналей до одной из его сторон равно 5. Найдите периметр этого квадрата (рис. 43).

Решение: Нетрудно понять, что расстояние от точки пересечения диагоналей до стороны в два раза меньше самой стороны. Таким образом, периметр квадрата равен $10 \cdot 4$=40.

Ответ: 40.

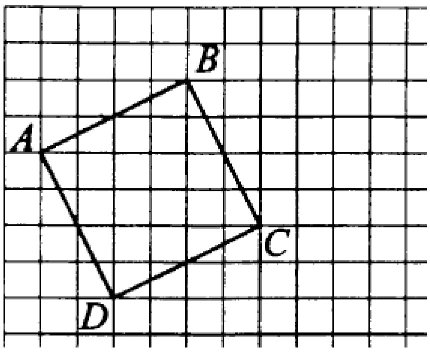


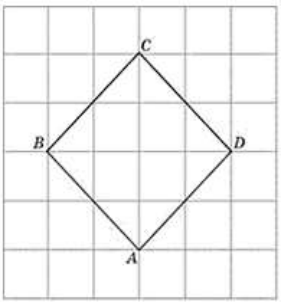
Рисунок 44

Задача № 6

Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат ABCD, считая стороны квадратных клеток равными $3\sqrt{5}$ (рис. 44).

Решение: радиус вписанной оокружности в квадрат равен половине его стороны.Рассмотрим прямоугольный треугольник в котором сторона AB будет являться гипотенузой. Катеты равны двум и четырем клеткам, то есть $6\sqrt{5}$ и $12\sqrt{5}$ соответственно. По теореме Пифагора для этого треугольника имеем AB= 30. Тогда радиус вписанной окружности равен 15.

Ответ: 15.



Задача № 7

Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат ABCD, считая стороны квадратных клеток равными $\sqrt{2}$ (рис. 45).

(Ответ 2).

Рисунок 45

Задача № 8

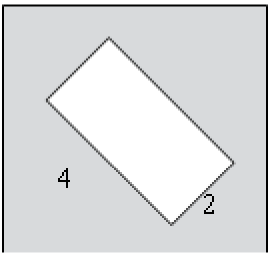


Рисунок 46

Из квадрата со стороной 6 вырезали прямоугольник со сторонами 4 и 2. Найти площадь полученной фигуры (рис. 46).

(Ответ: 28).

Задачи на 2 балла

Задача № 1

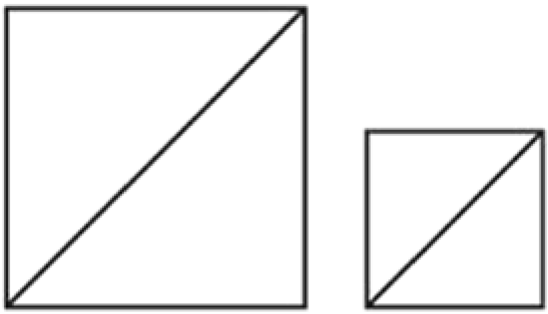


Рисунок 47

Даны два квадрата, диагонали которых равны 10 и 6. Найдите диагональ квадрата, площадь которого равна разности площадей данных квадратов (рис. 47).

Решение: Известно, что площадь квадрата можно найти, зная длину его диагонали. $S=\frac{1}{2}d^2$, где d - диагональ квадрата. Таким образом, $S_1=50$, а $S_2=18$. Найдем их разность:

$S_3=50-18=32$. Такова должна быть площадь квадрата, диагональ которого мы ищем. Получаем уравнение:

$32=\frac{1}{2}\cdot d^2$. Решая это уравнение, получаем d=8.

Ответ: 8.

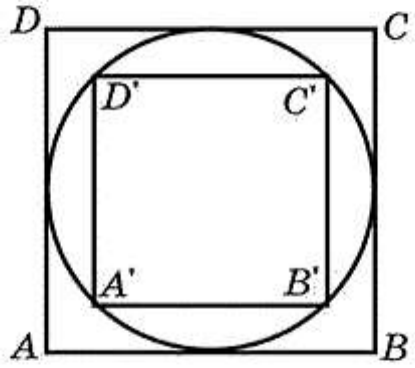


Рисунок 48

Задача № 2

Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в эту окружность? (рис. 48)(Ответ: в 2 раза).

Список используемой литературы:

1. https://ru.wikipedia.org/wiki/Четырёхугольник;
2. https://ru.wikipedia.org/wiki/Параллелограмм;
3. https://ru.wikipedia.org/wiki/Трапеция;
4. https://ru.wikipedia.org/wiki/Ромб;
5. Геометрия. 7–9 кл. : учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе / [авт. : Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. – 3-е изд. – М. : Просвещение, 2014. – 382 с. : ил. + 1 CD-ROM. – Прил.: с. 337–367. – Предм. указ.: с. 368–373. – Библиогр.: с. 374. – ISBN 978-5-09-033352-8.
6. https://ru.wikipedia.org/wiki/Квадрат.