

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА В ШКОЛЕ

Высоцкий Иван Ростиславович, заведующий  
лабораторией теории вероятностей МЦНМО



# История вопроса

- 1913. Полемика между А.А.Марковым и ректором МГУ П.А.Некрасовым:

<http://ptlab.mccme.ru/node/165>

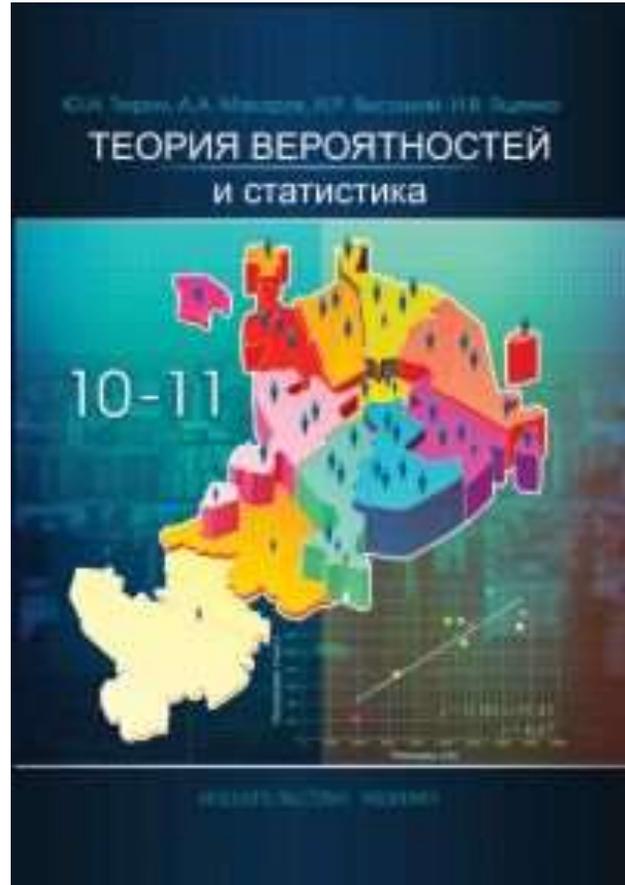
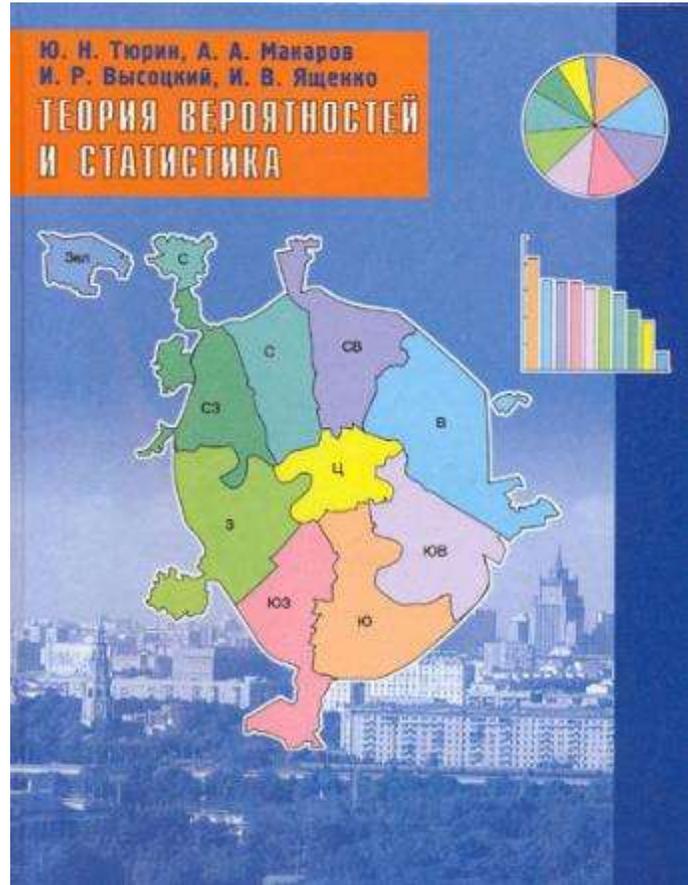
- 1960-е. Попытка построить школьную математику на наивной теории множеств. Попытка внедрить комбинаторику.



- 1990-е. Появление первых учебников для общеобразовательной школы
- 2004. Фраза во ФГОС про «элементы ТВ, статистики, комбинаторики и алгоритмики»
- 2004. Мет. подходы (Ю.Н.Тюрин и др.)
- 2008–09. Рег. к/работы для 7–8 в Статград
- 2009. Соглашение о терминах и обозначениях в школьном курсе:  
[http://ptlab.mccme.ru/sites/ptlab.mccme.ru/files/mat\\_7\\_09\\_general.pdf](http://ptlab.mccme.ru/sites/ptlab.mccme.ru/files/mat_7_09_general.pdf)
- 2012. Появление ТВ в ОГЭ и ЕГЭ

- 2013. ТВ указана как отдельное направление в Концепции РМО
- 2015 – 16. Примерные образовательные программы сначала для основной, затем для средней школы: <http://ptlab.mccme.ru/node/266>

# Учебный комплект под редакцией Ю.Н.Тюрина

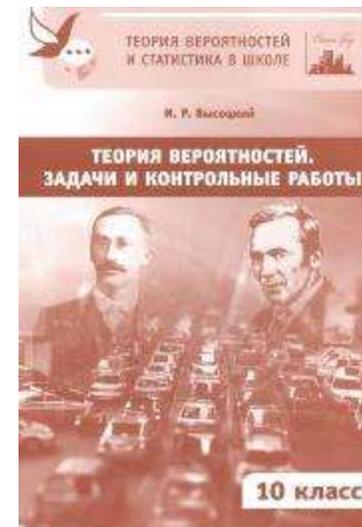
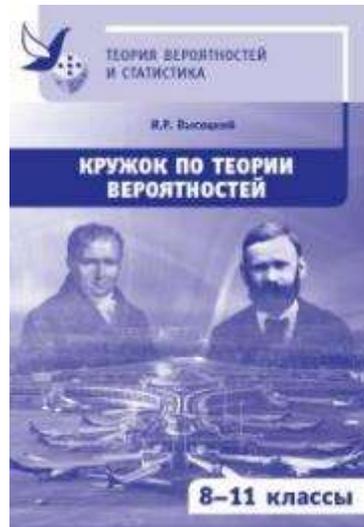
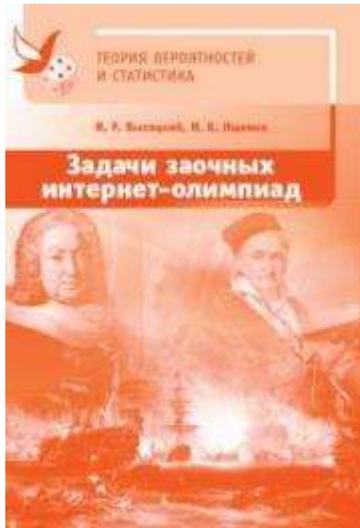


## Ключевые проблемы

- Отсутствие школьных традиций
- Недооценка роли самого предмета
- Недооценка роли статистики
- Переоценка роли комбинаторики и «классического определения» вероятности
- Главы в школьных учебниках – попытка трансляции вузовского курса в школу

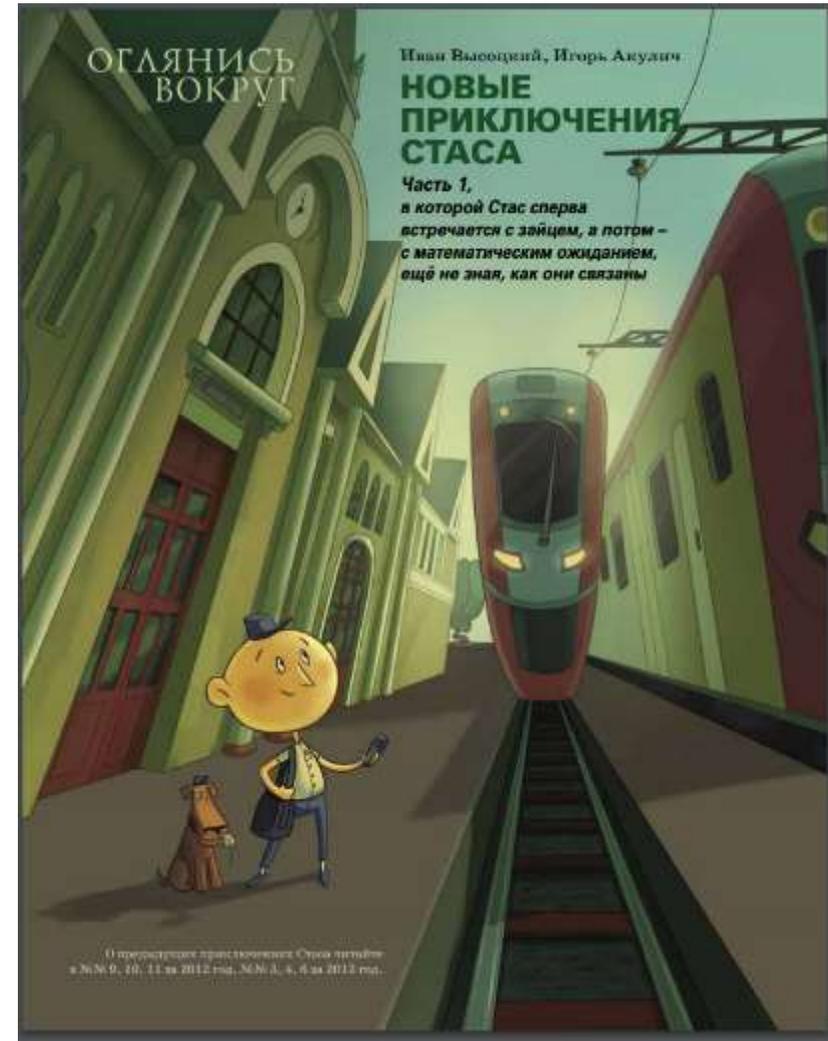
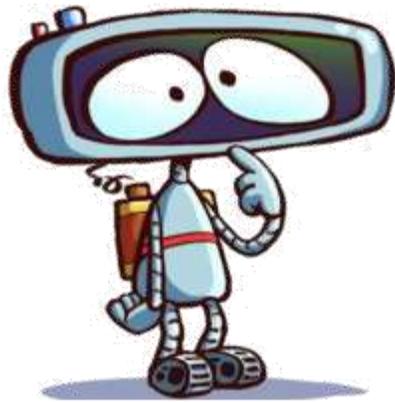
# Олимпиада и кружки, метод литература МЦНМО

- Ежегодная олимпиада с 2008 года  
<http://ptlab.mccme.ru/olympiad>
- 2017 издание сборника задач кружка в серии  
«ТВ и статистика в школе»



- С 2012 года статьи по теории вероятностей в журнале «Квантик»
- в свободном доступе на

<http://ptlab.mccme.ru/node/252>



# Сайт лаборатории ТВ и С МЦНМО



• НА СТРАНИЦЕ "КОНТРОЛЬНЫЕ" РАЗМЕЩЕНЫ МАТЕРИАЛЫ КР ПО ТВ ДЛЯ 7 И 8 КЛАСС

НОВОСТИ

КАЛЕНДАРЬ

УЧ.ПРОГРАММЫ

КОНТРОЛЬНЫЕ

ЕГЭ и ОГЭ

ЗАНЯТИЯ

ОЛИМПИАДА

ПУБЛИКАЦИИ

ЭЛ.РЕСУРСЫ

ИНФОРМАЦИЯ

Здравствуйтесь, Иван Ростиславович

Чтобы написать сообщение или посмотреть обсуждения и ответы на вопросы, перейдите в раздел [Консультации](#)

**29.06.2017 Занятия по ТВ и статистике на курсах ПК ВШЭ**

пройдут 30 июня и 1 июля 2017 года. В программе лекции и семинары А.А.Макарова, И.Р.Высоцкого, круглый стол, самостоятельная работа учителей.

## КОНСУЛЬТАЦИИ

VYSOTSKY

- Адреса
- ▷ Консультации
- Моя анкета
- Непрочитанные сообщения
- ▷ Создание материала
- ▷ Управлять
- Выйти

## Современное состояние

- ТВ и статистика описаны во ФГОС и ПООП на уровне элементов содержания
- Накопленный опыт («Математическая вертикаль», «Статград», учителя-энтузиасты)
- Устоявшееся понимание достижимых и важных целей, содержания ТВ в школе
- Появление регулярных учебных пособий
- Устоявшееся понимание о цели и содержании ТВ в школе



# Принципы построения курса

- Первичность статистики
- Некомбинаторный подход к теории вероятностей
- Школьная вероятность как математическое средство изучен случайности
- Практическая направленность и ясное школьное содержание
- Небольшое количество методов и алгоритмов
- Одна из целей – формирование представления о действии и роли закона больших чисел



# I Таблицы

Таблицы нужны, чтобы упорядочивать большие массивы данных. Гораздо легче искать информацию в таблице, чем в обычном тексте, потому что в таблице каждое значение находится в своей ячейке, а однородные сведения сгруппированы в одной графе. Если данные подходящим образом помещены в таблицу, то их удобно сравнивать. Кроме того, в таблицах удобно проводить несложные вычисления и подсчёты. А электронные таблицы позволяют быстро работать даже с большими массивами данных. В первой главе мы будем учиться представлять статистические данные с помощью таблиц и извлекать из них информацию.

- 1 Сбор данных и построение таблицы
- 2 Статистические данные в таблицах
- 3 Поиск информации в таблицах
- 4 Вычисления в таблицах
- 5 Крупнейшие города России
- 6 Подсчёты и измерения в таблицах
- 7 Упорядочивание данных в таблицах
- 8 Таблицы сопряжённости

# II Диаграммы

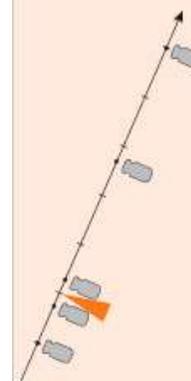
Диаграммы нужны для графического представления данных. В отличие от таблиц, диаграммы не передают информацию совершенно точно, зато они наглядны и позволяют сравнивать величины быстро — на глаз. Помимо общеизвестных столбиковых и круговых диаграмм существует множество специальных диаграмм, например демографические половозрастные пирамиды, диаграммы «стебель-листья», лепестковые диаграммы и множество других.

- 9 Столбиковые диаграммы
- 10 Демографическая статистика. Половозрастные пирамиды
- 11 Круговые диаграммы
- 12 Диаграммы «стебель-листья»

# III Описательная статистика. Средние значения и размах

В этой главе речь идёт о том, как описать одним-двумя числами важные свойства большого массива данных. Отсюда и название главы — «Описательная статистика». Существует множество описательных показателей, по которым можно судить о средних значениях, рассеивании, асимметричности и характере изменения статистических данных. В статистике широко используются среднее арифметическое и медиана. Иногда требуются другие средние, например, урезанное среднее.

- 13 Среднее арифметическое
- 14 Медиана
- 15 Наименьшее и наибольшее значения. Размах
- 16 Урезанное среднее
- 17 Как выбрать подходящее среднее



# V

## Случайная изменчивость

Неизменные величины в жизни встречаются крайне редко. Даже те величины, которые в физике называют постоянными обычно подвержены изменчивости. Иногда мы можем указать причины и даже законы изменчивости. Но помимо закономерной изменчивости почти всегда присутствует разнонаправленная случайная изменчивость, причины которой известны частично, а порой неизвестны вовсе.

В этой главе мы обсудим несколько важных примеров изменчивости, которую приходится учитывать в повседневной жизни. Например, мы будем говорить о погрешностях и о точности измерений.

Кроме того, мы увидим, как разные виды изменчивости отражаются на диаграммах.

- 22 Примеры случайной изменчивости
- 23 Точность и погрешность измерений
- 24 Тенденции и случайные отклонения
- 25 Группировка данных и гистограммы
- 26 Рост человека
- 27 Статистическая устойчивость и оценки с помощью выборки



Диаграмма 25. Цена барреля нефти в первом полугодии 2008 г.

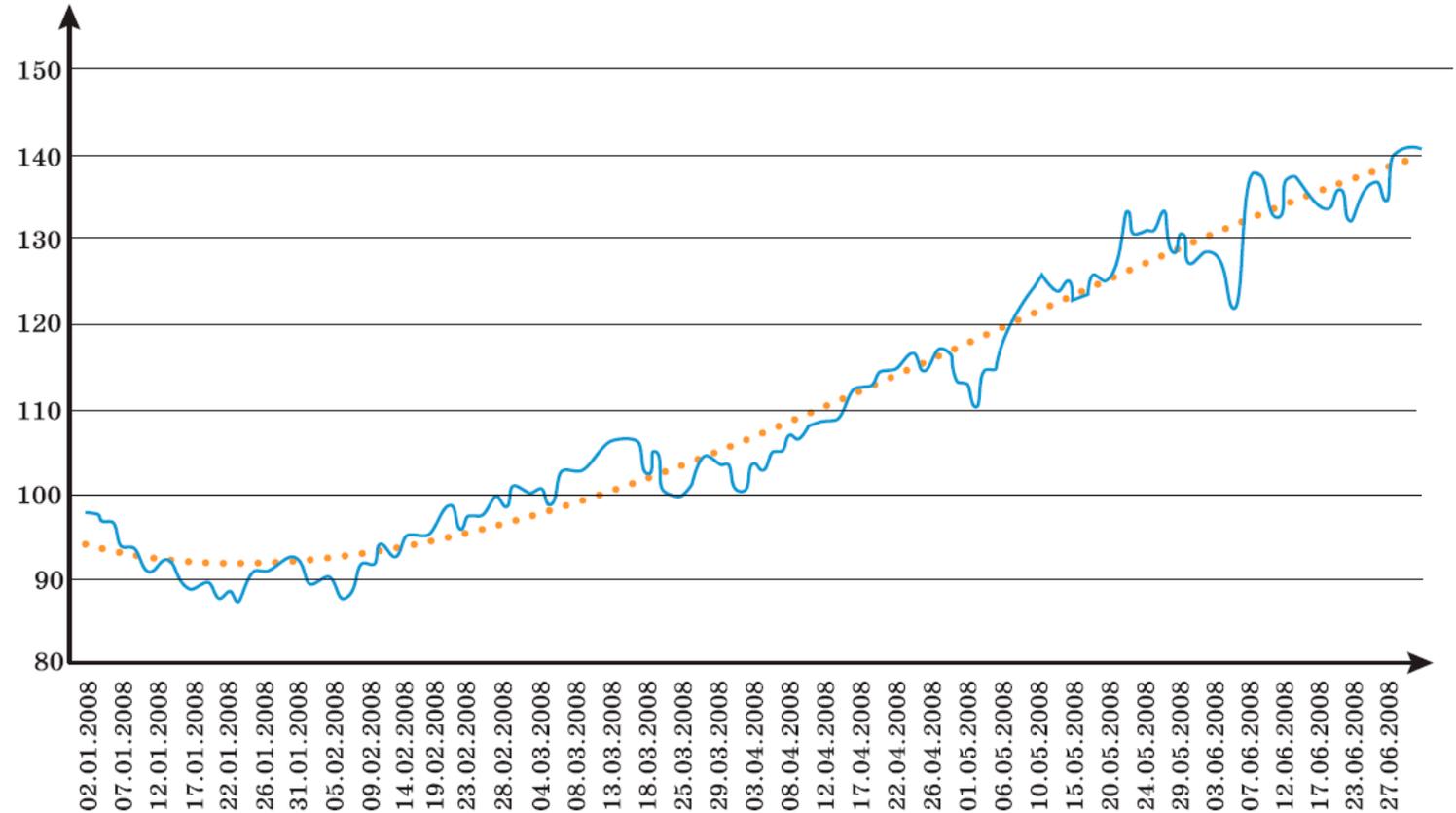


Диаграмма 33. Распределение роста девушек (300 наблюдений)

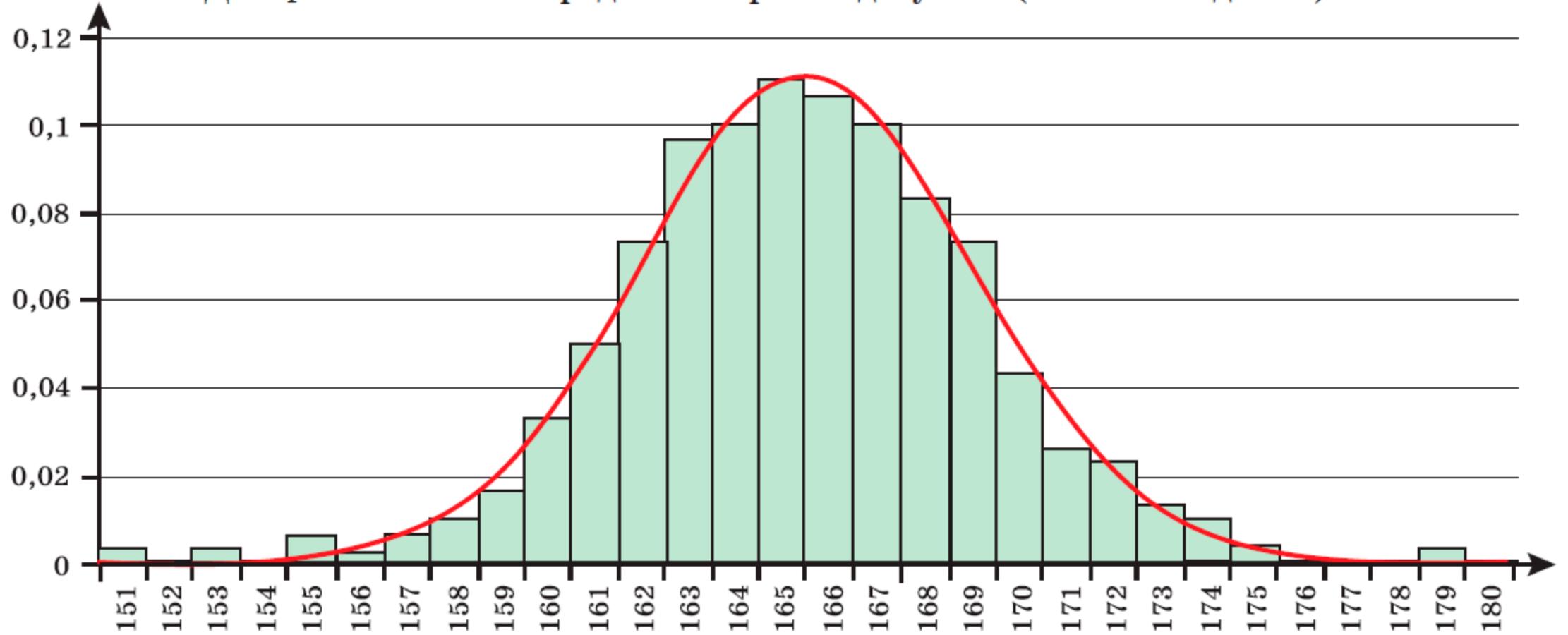
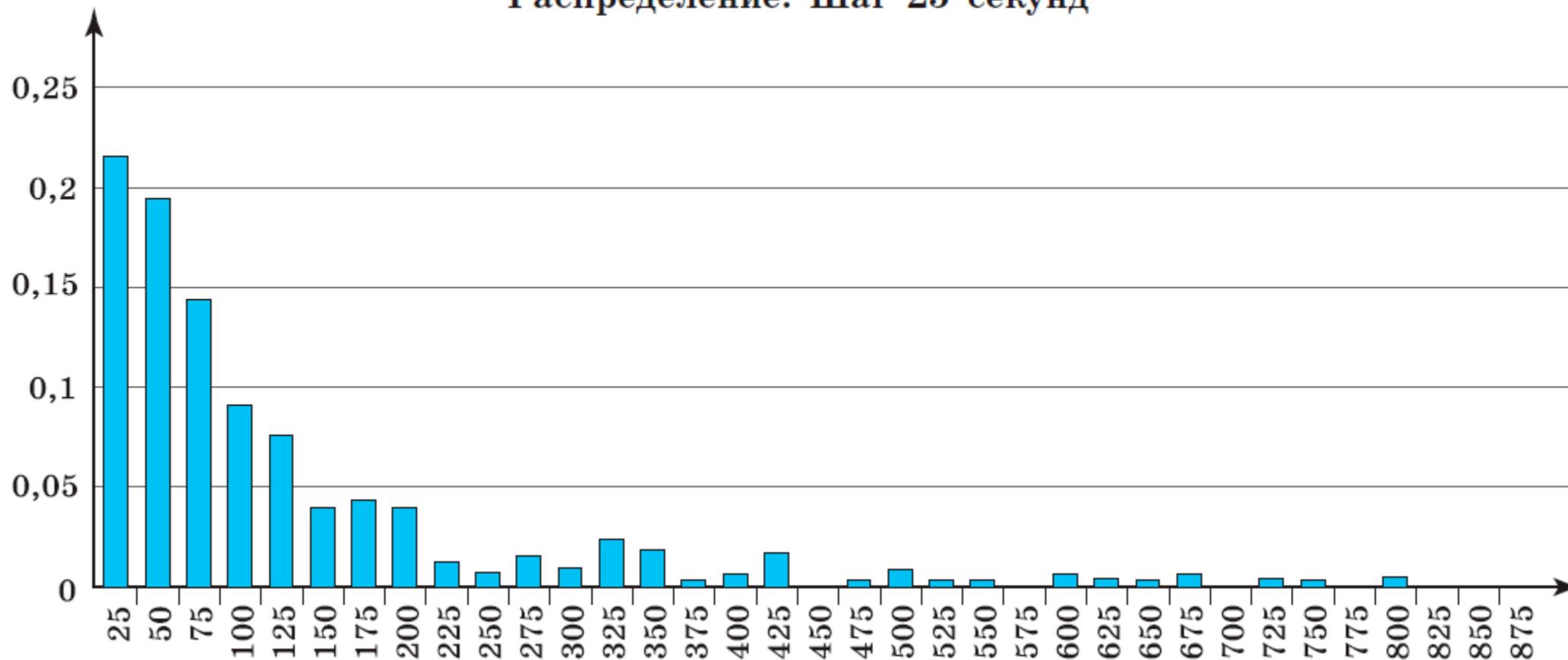


Диаграмма 30. Длительность телефонных разговоров.  
Распределение. Шаг 25 секунд



## VII Рассеивание данных

Занимаясь в главах III и IV описательной статистикой, мы говорили о центральных мерах. Но для более полного описания изменчивых данных нужно знать не только их среднее, но и то, как данные рассеяны относительно своего среднего.

Чаще всего для описания и измерения рассеивания числовых данных применяются дисперсия и стандартное отклонение. Мы расскажем о них. Кроме того, в этой главе мы познакомимся с двумя новыми для нас видами диаграмм.

- 33 Рассеивание числовых данных
- 34 Отклонения
- 35 Дисперсия числового набора
- 36 Стандартное отклонение числового набора
- 37 Диаграммы рассеивания
- 38\* Свойства дисперсии и стандартного отклонения
- 39\* Линейная связь на диаграмме рассеивания
- 40\* Диаграмма «ящик с усами»

## VIII Математическое описание случайных явлений

В этой главе мы повторим то, что уже знаем о вероятностях событий, и познакомимся с элементарными событиями — простейшими событиями случайного опыта. Все прочие события состоят из элементарных событий, подобно тому как геометрическая фигура состоит из точек. Интересной разновидностью случайного опыта служит опыт, в котором все элементарные события имеют одинаковые шансы на осуществление: они равновозможны. Чаще всего такие опыты искусственны; они связаны с играми или жребиями. Мы научимся вычислять вероятности событий в таких опытах.

- 41 Случайные опыты и элементарные события
- 42 Вероятности элементарных событий. Равновозможные элементарные события
- 43 Благоприятствующие элементарные события
- 44 Вероятности событий
- 45 Опыты с равновозможными элементарными событиями
- 46 Случайный выбор

## XII Испытания Бернулли

Испытание Бернулли, или просто испытание, — это простой случайный опыт, в котором всего два возможных элементарных события: успех и неудача. Пример испытания — бросание монеты. Из таких простых опытов можно составлять гораздо более сложные. В этой главе мы рассказываем о важных случайных опытах:

— испытание до наступления первого успеха;  
— серия, состоящая из заранее известного количества испытаний Бернулли.  
Помимо этого, мы займемся случайным выбором нескольких предметов из множества, которое состоит из предметов двух или нескольких видов.

- 61 Успех и неудача  
Испытания до первого успеха
- 62 Серия испытаний Бернулли
- 63 Число успехов в испытаниях Бернулли
- 64 Вероятности событий в испытаниях Бернулли
- 65\* Случайный выбор из конечной совокупности

**ПРИМЕР.** Предположим, банк выпустил карту, и первые 15 цифр такие:

2200 2476 0343 593\_

Нужно определить последнюю контрольную цифру. Умножаем на 2 цифры, стоящие на нечётных местах, и при необходимости вычитаем 9. Получаются цифры 4, 0, 4, 5, 0, 8, 1, 6. Теперь найдём сумму полученных цифр и цифр, стоящих на чётных местах:

$$(4 + 0 + 4 + 5 + 0 + 8 + 1 + 6) + (2 + 0 + 4 + 6 + 3 + 3 + 9) = 28 + 27 = 55.$$

Чтобы получить 60 (ближайшее сверху число, кратное 10), нужно добавить 5. Это и есть контрольная цифра. Таким образом, карта получает свой номер окончательно (рис. 26).

Если человек при вводе номера (или сканер при считывании) ошибётся, возникнет сообщение об ошибке. Можно ли случайно ввести неверный номер с правильной контрольной цифрой? Да, такое возможно, но маловероятно. Защита с помощью одной контрольной цифры считается достаточной.

Примерно также защищены от ошибки ввода номера банковских счетов, номер налогоплательщика, номер пенсионного свидетельства, лицевые счета на квартплату и многие другие персональные данные.

Похожим образом защищается от ошибок информация при передаче по мобильным сетям или Интернету. Каждый символ в сообщении кодируется числом, а в конце

группы чисел передаётся их сумма (контрольная сумма). Если из-за помех информация случайным образом исказилась, то практически наверняка контрольная сумма окажется неверной. Вероятность случайного совпадения настолько мала, что ею можно пренебречь.

Не так важно, что именно использовать для контроля: одну цифру, сумму, знаочередующуюся сумму или другие функции. Важно, что вместе с основной информацией передаётся избыточная информация, позволяющая проверить корректность передачи основной информации.



Рисунок 26. Правильный номер карты «Мир»



В редакторах электронных таблиц для вычислений вероятностей по распределениям предусмотрена функция

**ВЕРОЯТНОСТЬ()**

На рисунке показано решение примера 2.

$f_x$		=ВЕРОЯТНОСТЬ(C3:C8;D3:D8;2;5)	
C	D	E	F
Значения	Вероятности		
0	0,03	<b>0,8125</b>	
1	0,16		
2	0,31		
3	0,31		
4	0,16		
5	0,03		

## **70\*** Математическое ожидание случайной величины

### **Обязательное страхование автомобильной гражданской ответственности (ОСАГО)**

Полис ОСАГО должен иметь каждый владелец автомобиля. Владелец и страховая компания заключают договор страхования. Продавая автовладельцу полис, страховая компания берёт на себя обязательство возместить ущерб (в пределах определённой суммы), который этот автовладелец нанесёт окружающим в случае дорожно-транспортного происшествия, случившегося по его вине.

Чтобы определить стоимость полиса, нужно знать две величины: вероятность, с которой в течение года наступает страховой случай, то есть застрахованный автовладелец оказывается виновником ДТП, и среднюю сумму ущерба. Произведение этих величин даёт математическое ожидание страховой выплаты страховой компании на один застрахованный автомобиль.

Для каждого отдельного автомобиля эта выплата является случайной величиной. Разумеется, в стоимость полиса включается доход страховой компании, который идёт на выплату зарплаты сотрудникам, аренду и содержание офисов, налоги и все текущие расходы.

Поэтому стоимость страхового полиса складывается из дохода страховой компании и математического ожидания страховой выплаты.



## СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

<http://ptlab.mccme.ru>  
[i\\_r\\_vysotsky@hotmail.com](mailto:i_r_vysotsky@hotmail.com)



**Группа компаний «Просвещение»**

Адрес: 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, подъезд 8, бизнес-центр «Новослободский»

Горячая линия: [vopros@prosv.ru](mailto:vopros@prosv.ru)