ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЗАДАЧАМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ (№ 10) В ЕГЭ 2022 ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ

Задорожная Ольга Владимировна

Доцент кафедры математики, информатики и технологического образования ИРО Краснодарского края

Подготовительные задачи

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

По определению полагают 0! =1.

Пример 1. Вычислить:

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2! \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 2! \cdot 3 \cdot 4 = 3! \cdot 4 = 24$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 3! \cdot 4 \cdot 5 = 4! \cdot 5 = 120$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 4! \cdot 5 \cdot 6 = 5! \cdot 6 = 720$$

Пример 2. Найдите значения выражения:

а) $8!+9!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 8+1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 8\cdot 9=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 8(1+9)=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 8\cdot 10=403200$

б) $\dfrac{102!}{100!}=\dfrac{100!\cdot 101\cdot 102}{100!}=101\cdot 102=10302$

в) $\dfrac{6!-5!}{120}=\dfrac{5!\cdot 6-5!}{120}=\dfrac{5!(6-1)}{5!}=5$

Пример 3. Сократите дробь:

а) $$\frac{n!}{(n-1)!}=\frac{(n-1)!\cdot n}{(n-1)!}=n$$

б) $$\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{(n-2)!}{(n-2)!\cdot(n-1)\cdot n}=\frac{1}{(n-1)\cdot n}$$

в) $$\frac{(n-1)!}{(n-3)!}=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-3)(n-2)(n-1)}{(n-3)!}=(n-2)(n-1)$$

Перестановки

Перестановки можно образовывать из элементов любого конечного множества.

Например, два элемента *А* и *Б*: *АБ* или *БА* – два способа.

Три элемента *АБВ*: *АБВ*, *АВБ*, *БАВ*, *БВА*, *ВАБ*, *ВБА* – шесть способов.

Определение: Установленный в конечном множестве порядок называют **перестановкой** его элементов.

Число перестановок из n элементов обозначают через P_n.

Имеем, $P_1=1$, $P_2=2$, $P_3=6$.

Для общего случая $\boldsymbol{P_n=n!}$.

Пример 4. Из элементов множества A составить всевозможные перестановки, если

а) $A=\{7, 8\}$: (7,8) и (8,7) – два способа.

б) $A=\{1, 2, 3, 4\}$: $P_4=4!=24$ – двадцать четыре способа.

Пример 5. Сколькими способами можно составить список из 9 учеников?

$$P_9=9!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9=6!\cdot7\cdot8\cdot9=720\cdot7\cdot8\cdot9=362880.$$

Пример 6. Сколькими различными способами могут разместиться на скамейке 5 человек?

$$P_5=5!=120.$$

Размещения

Пример 7

Пусть даны 4 буквы: *А*, *Б*, *В*, *Г*. Требуется выделить из них две буквы, расположить эти две буквы в определенном порядке. Сколькими способами это можно сделать?

АБ	*АВ*	*АГ*
БА	*ВА*	*ГА*
БВ	*БГ*	
ВБ	*ГБ*	
ВГ		
ГВ		

Пример 8

Из трех элементов *a*, *b*, *c* составить множества по два элемента:

ab, *ac*, *bc*, *ba*, *ca*, *cb*.

Определение: Размещениями из n различных элементов по m элементов ($m \leq n$) называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

Число размещений из n элементов по m элементов обозначают A_n^m.

Мы уже считали, что $A_4^2 = 12$.

Легко видеть $A_n^1 = n$, $A_n^0 = 1$.

Число A_n^m размещений из n элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ по m равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример 9. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Искомое число сигналов: $A_6^2 = \frac{6!}{4!} = 5 \cdot 6 = 30$

Пример 10. Сколькими способами можно выбрать из класса, насчитывающего 40 учеников, старосту, профорга и физорга?

$$A_{40}^3 = \frac{40!}{37!} = 38 \cdot 39 \cdot 40 = 59280$$

Сочетания

Рассмотрим все подмножества множества {*А*, *Б*, *В*}.

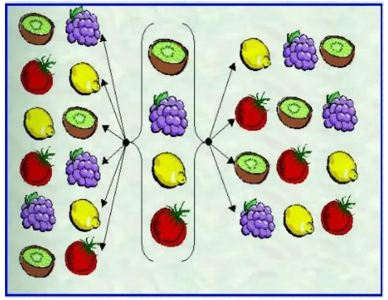
{*А*}, {*Б*}, {*В*} – три множества по одному элементу.

{*А*, *Б*}, {*Б*, *В*}, {*А*, *В*} – три множества по два элемента.

{*А*, *Б*, *В*} – одно множество из трех элементов.

{∅} – пустое множество.

Всего 8 подмножеств.



Число подмножеств по *m* элементов в каждом, содержащихся в множестве из *n* элементов, обозначается C_n^m

Конечные множества называют **сочетаниями**.

Определение 3. Сочетаниями из n различных элементов по m элементов называются комбинации (множества), составленные из данных n элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Число сочетаний определяется формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Заметим, что $C_n^0 = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1$

Пример 11. Найти $C_3^0, C_3^1, C_3^2, C_3^3$

$$C_3^0 = 1, C_3^1 = \frac{3!}{1!\cdot 2!} = 3,$$

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3, C_3^3 = \frac{3!}{3!\cdot 0!} = 1$$

Пример 12. Найти C_8^2, C_8^6

$$C_8^2 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8}{2!} = 28$$

$$C_8^6 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 8}{2!} = 28$$

$$C_8^2 = C_8^6$$

Будет ли выполняться равенство $C_n^m = C_n^{n-m}$

Рассмотрим

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m$$

Пример 13. Докажите, что верно равенство: $C_7^3 + C_7^4 = C_8^4$

$$C_7^3 + C_7^4 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} + \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 2 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 2 \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3!} = 70$$

$$C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$$

Пример 14. Докажите, что верно равенство: $C_{10}^5 + C_{10}^6 = C_{11}^6$

$$C_{10}^5 + C_{10}^6 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} + \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 252 + 210 = 462$$

$$C_{11}^6 = \frac{11!}{6! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} 462$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

Докажем

$$C_n^m + C_n^{m+1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m-1)!(n-m)} + \frac{n!}{m!(m+1)(n-m-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m-1)!}\left(\frac{1}{n-m} + \frac{1}{m+1}\right) = \frac{n!}{m!(n-m-1)!}\left(\frac{m+1+n-m}{(n-m)(m+1)}\right) =$$

$$= \frac{n!(n+1)}{m!(n-m-1)!(n-m)(m+1)} = \frac{n!(n+1)}{m!(m+1)(n-m-1)!(n-m)} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!}$$

С другой стороны

$$C_{n+1}^{m+1} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n+1-m-1)!} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!}$$

Для числа сочетаний справедливо еще одно равенство:

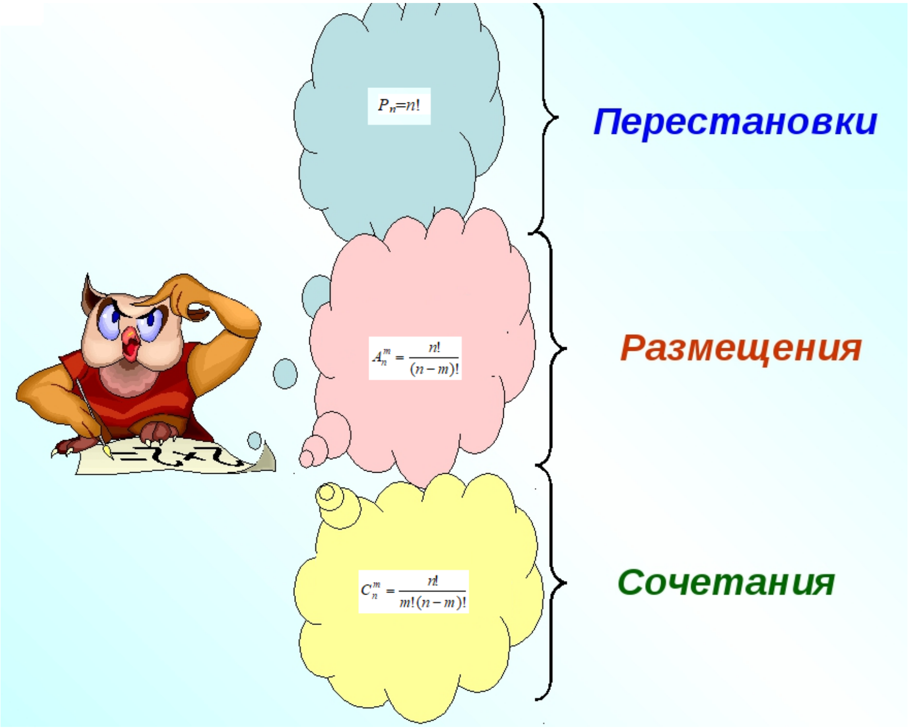
$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

Теорема. Число всех подмножеств множества, состоящего из n элементов, равно 2^n.

Число перестановок,

размещений и сочетаний

связаны равенством $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_n}$



Пример 15. Из 20 отличников школы нужно выделить 6 для поездки в Москву. Сколькими способами можно это сделать?

$$C_{20}^{6} = \frac{20!}{6!\cdot 14!} = 38760$$

Пример 16. Сколькими способами можно выбрать два подарка из коробки, содержащей 10 подарков?

Искомое число способов $$C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{9\cdot 10}{2} = 45$$

Различные задачи

Пример 17. Расписание одного дня содержит 5 уроков. Определить количество таких расписаний при выборе из 11 дисциплин.

Находим число размещений из 11 дисциплин по 5 уроков:

$$A_{11}^{5} = \frac{11!}{(11-5)!} = \frac{11!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 55440$$

Пример 18. Комиссия состоит из председателя, его заместителя и еще пяти человек. Сколькими способами члены комиссии могут распределить между собой обязанности?

Из семи человек следует выбрать и председателя, и его заместителя.

Это можно сделать $A_{7}^{2} = \frac{7!}{5!} = 6 \cdot 7 = 42$

Пример 19. Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из группы в 20 человек?

$$C_{20}^{3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{2 \cdot 3} = 3 \cdot 19 \cdot 20 = 1140$$

Пример 20. В ящике 20 шаров, среди которых 12 белых, остальные – красные. Отбирается наугад 2 шара. Сколькими способами можно отобрать: а) два белых шара, б) два красных; в) один белый, другой красный?

а) *два белых шара?*

Число способов, которыми можно выбрать 2 белых шара из 12, не зависит от порядка отбора и равно числу подмножеств из 12 по 2, различающихся только составом. Следовательно,

$$C_{12}^{2} = \frac{12!}{2!\cdot 10!} = 66$$

б) *два красных*

Число способов, которыми можно отобрать 2 красных шара из 8 равно $C_{8}^{2} = \frac{8!}{2!\cdot 6!} = 28$

в) *один белый, другой красный*. Число способов, которыми можно отобрать один белый, другой красный шар, равно $C_{12}^{1}\cdot C_{8}^{1} = \frac{12!}{1!\cdot 11!}\cdot\frac{8!}{1!\cdot 7!} = 12\cdot 8 = 96$

Пример 21. Стадион имеет четыре входа: *A*, B, *C*, *D*. Указать всевозможные способы, которыми посетитель может войти через один вход, а выйти через другой.

Из условия задачи ясно, что порядок выбора имеет значение. Решение сводится к подсчету комбинаций выбора 2-х входов без повторения с учетом порядка из 4-х возможных:

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12$$

Пример 22. Встретились несколько человек и стали здороваться друг с другом. Известно, что рукопожатий было от 60 до 70. Сколько человек пожали друг другу руки, если известно, что:

1) каждый здоровался с каждым;

2) только один не здоровался ни с кем;

3) только двое не поздоровались между собой;

4) четверо поздоровались только между собой.

Пусть было n человек.

1) *каждый здоровался с каждым;*

Число рукопожатий равно числу различных пар из n элементов без учета порядка выбора, поэтому:

$$60 \le C_n^2 \le 70$$

$$60 \le \frac{n(n-1)}{2} \le 70$$

$$120 \le n^2 - n \le 140 \Rightarrow n = 12$$

2) *только один не здоровался ни с кем;*

Если один не поздоровался ни с кем, то пары образовывались из n-1 элемента, т.е.:

$$60 \le C_{n-1}^{2} \le 70$$

$$60 \le \frac{(n-1)(n-2)}{2} \le 70$$

$$120 \le (n-1)(n-2) \le 140 \Rightarrow n = 13$$

3) *только двое не поздоровались между собой;*

Если двое не поздоровались между собой, то количество рукопожатий было на 1 меньше:

$$60 \le C_n^2 - 1 \le 70$$

$$61 \le \frac{n(n-1)}{2} \le 71$$

$$122 \le n^2 - n \le 142 \Rightarrow n = 12$$

4) *четверо поздоровались только между собой.*

В этом случае группа из n человек разделяется на две части; рукопожатиями обменивались только люди внутри этих частей, т.е.

$$60 \le C_{n-4}^{2} + C_{4}^{2} \le 70$$

$$60 \le C_{n-4}^{2} + 6 \le 70$$

$$54 \le \frac{n(n-1)}{2} \le 64$$

$$108 \le (n-4)(n-5) \le 128 \Rightarrow n = 15$$

Спасибо за внимание!