МБОУ СОШ №1
Красноармейского района
Краснодарского края

Тема: Решение задач по формулам полной вероятности

и формуле Байеса

учитель математики МБОУ СОШ №1
Красноармейского района
Краснодарского края
Бородина МБ

Полтавская

Тема: Решение задач по формулам полной вероятности и формуле Байеса

На практике нам часто известны именно условные вероятности интересующего нас события А и по ним надо восстановить безусловную вероятность Р(А). Это можно сделать с помощью формулы полной вероятности.

Рассмотрим важное следствие **теорем сложения и умножения вероятностей** и научимся решать типовые задачи по теме.

Рассмотрим **зависимое событие** A, которое может произойти лишь в результате осуществления одной из несовместных ***гипотез*** $B_1, B_2, B_3, .., B_n$, которые образуют **полную группу**. Пусть известны их вероятности $P(B_1), P(B_2), P(B_3), .., P(B_n)$ и соответствующие условные вероятности $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), P_{B_3}(A), .., P_{B_n}(A)$. Тогда вероятность наступления события A равна:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

Эта формула получила название **формулы полной вероятности**. В учебниках она формулируется теоремой, доказательство которой элементарно: согласно **алгебре событий**, $A = B_1A + B_2A + B_3A + \ldots + B_nA$ *(произошло событие* B_1 ***и*** *после него наступило событие* A ***или*** *произошло событие* B_2 ***и*** *после него наступило событие* A ***или*** *произошло событие* B_3 ***и*** *после него наступило событие* A ***или*** *....* ***или*** *произошло событие* B_n ***и*** *после него наступило событие* A*)*. Поскольку гипотезы $B_1, B_2, B_3, .., B_n$ несовместны, а событие A – зависимо, то по **теореме сложения вероятностей несовместных событий** *(первый шаг)* и **теореме умножения вероятностей зависимых событий** *(второй шаг)*:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1A + B_2A + B_3A + \ldots + B_nA) = \\ &= P(B_1A) + P(B_2A) + P(B_3A) + \ldots + P(B_nA) = \\ &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A) \end{aligned}$$

Задачи на формулы Байеса

Материал тесно связан с содержанием предыдущего. Пусть событие A наступило в результате осуществления одной из гипотез $B_1, B_2, B_3, .., B_n$. Как определить вероятность того, что имела место та или иная гипотеза?

При условии, что событие A **уже произошло**, вероятности гипотез *переоцениваются* по формулам, которые получили фамилию английского священника Томаса Байеса:

$P_A(B_1)=\dfrac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_1;

$P_A(B_2)=\dfrac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_2;

$P_A(B_3)=\dfrac{P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_3;

…

$P_A(B_n)=\dfrac{P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_n.

На первый взгляд кажется полной нелепицей – зачем пересчитывать вероятности гипотез, если они и так известны? Но на самом деле разница есть:

$P(B_1), P(B_2), P(B_3), .., P(B_n)$ – это *априорные* (оцененные **до** испытания) вероятности.

$P_A(B_1), P_A(B_2), P_A(B_3), .., P_A(B_n)$ –

это *апостериорные* (оцененные **после** испытания) вероятности тех же гипотез, пересчитанные в связи «со вновь открывшимися обстоятельствами » – с учётом того факта, что событие A **достоверно произошло**.

Рассмотрим примеры:

1. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Решение. Джон промахнется, если схватит пристрелянный револьвер и промахнется из него, или если схватит непристрелянный револьвер и промахнется из него. По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно $0{,}4\cdot(1-0{,}9)=0{,}04$ и $0{,}6\cdot(1-0{,}2)=0{,}48$. События схватить пристрелянный или непристрелянный револьвер образуют полную группу (они несовместны и одно из них непременно наступает), поэтому, по формуле полной вероятности, Джон промахнется с вероятностью $0{,}04+0{,}48=0{,}52$.

Ответ: 0,52.

Приведем другое решение.

Джон попадает в муху, если схватит пристрелянный револьвер и попадет из него, или если схватит непристрелянный револьвер и попадает из него. По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно $0{,}4\cdot0{,}9=0{,}36$ и $0{,}6\cdot0{,}2=0{,}12$. События схватить пристрелянный или непристрелянный револьвер образуют полную группу, поэтому по формуле полной вероятности получаем: $0{,}36 + 0{,}12 = 0{,}48$. Событие, состоящее в том, что Джон промахнется, противоположное. Его вероятность равна $1 - 0{,}48 = 0{,}52$.

2. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение. Вероятность того, что стекло сделано на первой фабрике и оно бракованное: $0{,}45 \cdot 0{,}03 = 0{,}0135$.

Вероятность того, что стекло сделано на второй фабрике и оно бракованное: $0{,}55 \cdot 0{,}01 = 0{,}0055$.

Поэтому по формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна $0{,}0135 + 0{,}0055 = 0{,}019$.

Ответ: 0,019.

3. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Решение. Анализ пациента может быть положительным по двум причинам: A) пациент болеет гепатитом, его анализ верен; B) пациент не болеет гепатитом, его анализ ложен. По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно $0{,}9 \cdot 0{,}05 = 0{,}045$ и $0{,}01 \cdot 0{,}95 = 0{,}0095$.

События быть больным или быть здоровым образуют полную группу (они несовместны и одно из них непременно наступает), поэтому можно применить формулу полной вероятности. Получим: $0{,}045 + 0{,}0095 = 0{,}0545$.

Ответ: 0,0545.

4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Решение. Ситуация, при которой батарейка будет забракована, может сложиться в результате следующих событий: батарейка действительно неисправна и забракована справедливо или батарейка исправна, но по ошибке забракована. По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно $0{,}02 \cdot 0{,}99$ и $0{,}98 \cdot 0{,}01$.

События быть неисправной батарейкой или быть исправной образуют полную группу (они несовместны и одно из них непременно происходит), поэтому можно применить формулу полной вероятности. Получим:

$$0,0198+0,0098=0,0296.$$

Ответ: 0,0296.

5. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что яйцо имеет высшую категорию, события B_1 и B_2 состоят в том, что яйцо произведено в первом и втором хозяйствах соответственно. Тогда события $A|B_1$ и $A|B_2$ — события, состоящие в том, что яйцо высшей категории произведено в первом и втором хозяйстве соответственно. По формуле полной вероятности, вероятность того, что будет куплено яйцо высшей категории, равна:

$$P(AB_1)+P(AB_2)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)=$$
$$=0,4\cdot P(B_1)+0,2\cdot(1-P(B_1))=0,2P(B_1)+0,2.$$

По условию эта вероятность равна 0,35, поэтому для вероятности того, что купленное яйцо произведено в первом хозяйстве имеем:

$$P(B_1)=(0,35-0,2):0,2=0,75.$$

ИЛИ

Это решение можно записать коротко. Пусть x — искомая вероятность того, что куплено яйцо, произведенное в первом хозяйстве. Тогда $1-x$ — вероятность того, что куплено яйцо, произведенное во втором хозяйстве. По формуле полной вероятности имеем:

$$0,4x+0,2(1-x)=0,35\Leftrightarrow 0,2x=0,15\Leftrightarrow x=0,75.$$

Ответ: 0,75.

Приведем другое решение.

Пусть в первом хозяйстве агрофирма закупает x яиц, в том числе, $0,4x$ яиц высшей категории, а во втором хозяйстве — y яиц, в том числе $0,2y$ яиц высшей категории. Тем самым, всего агрофирма закупает $x+y$ яиц, в том числе $0,4x+0,2y$ яиц высшей категории. По условию, высшую категорию имеют 35% яиц, тогда:

$$\frac{0,4x+0,2y}{x+y}=0,35\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,4x+0,2y=0,35(x+y)\Leftrightarrow 0,05x=0,15y\Leftrightarrow x=3y.$$

Следовательно, у первого хозяйства закупают в три раза больше яиц, чем у второго. Поэтому вероятность того, что купленное яйцо окажется из первого хозяйства равна

$$\frac{3y}{3y+y}=\frac{3}{4}=0,75.$$

6. В пирамиде 5 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле

из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок производит один выстрел из наудачу взятой винтовки.

Решение: в этой задаче количество винтовок точно такое же, как и в предыдущей, но вот гипотезы всего две:

B_1 – стрелок выберет винтовку с оптическим прицелом;

B_2 – стрелок выберет винтовку без оптического прицела.

По **<u>классическому определению вероятности</u>**: $P(B_1)=\frac{3}{5}=0{,}6;\quad P(B_2)=\frac{2}{5}=0{,}4$.

Контроль: $P(B_1)+P(B_2)=0{,}6+0{,}4=1$

Рассмотрим событие: A – стрелок поразит мишень из наугад взятой винтовки.

По условию: $P_{B_1}(A)=0{,}95;\quad P_{B_2}(A)=0{,}7$.

По формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=0{,}6\cdot 0{,}95+0{,}4\cdot 0{,}7=0{,}57+0{,}28=0{,}85$$

7. На склад поступило 2 партии изделий: первая – 4000 штук, вторая – 6000 штук. Средний процент нестандартных изделий в первой партии составляет 20%, а во второй – 10%. Наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным. Найти вероятность того, что оно: а) из первой партии, б) из второй партии.

Первая часть **решения** состоит в использовании формулы полной вероятности. Иными словами, вычисления проводятся в предположении, что испытание <u>ещё не произведено</u> и событие *«изделие оказалось стандартным»* пока не наступило.

Рассмотрим две гипотезы:

B_1 – наудачу взятое изделие будет из 1-й партии;

B_2 – наудачу взятое изделие будет из 2-й партии.

Всего: 4000 + 6000 = 10000 изделий на складе. По **классическому определению**:

$$P(B_1)=\frac{4000}{10000}=0{,}4;\quad P(B_2)=\frac{6000}{10000}=0{,}6$$.

Контроль: $P(B_1)+P(B_2)=0{,}4+0{,}6=1$

Рассмотрим зависимое событие: A – наудачу взятое со склада изделие <u>будет</u> стандартным.

В первой партии 100% – 20% = 80% стандартных изделий,

поэтому: $P_{B_1}(A)=\frac{80}{100}=0{,}8$ – вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным **при условии**, что оно принадлежит 1-й партии.

Аналогично, во второй партии 100% – 10% = 90% стандартных изделий и $P_{B_2}(A)=\frac{90}{100}=0,9$ – вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным **при условии**, что оно принадлежит 2-й партии.

По формуле полной вероятности:
$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=0,4\cdot 0,8+0,6\cdot 0,9=0,32+0,54=0,86$ – вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным.

Часть вторая. Пусть наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным. Эта фраза прямо прописана в условии, и она констатирует тот факт, что событие A **произошло**.

По формулам Байеса:

а) $P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{0,4\cdot 0,8}{0,86}=\frac{0,32}{0,86}=\frac{32}{86}=\frac{16}{43}\approx 0,37$ – вероятность того, что выбранное стандартное изделие принадлежит 1-й партии;

б) $P_A(B_2)=\frac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}{P(A)}=\frac{0,6\cdot 0,9}{0,86}=\frac{0,54}{0,86}=\frac{54}{86}=\frac{27}{43}\approx 0,63$ – вероятность того, что выбранное стандартное изделие принадлежит 2-й партии.

После *переоценки* гипотезы B_1, B_2, разумеется, по-прежнему образуют **полную группу**:
$P_A(B_1)+P_A(B_2)=\frac{16}{43}+\frac{27}{43}=\frac{43}{43}=1$

Ответ: а) $\frac{16}{43}\approx 0,37$; б) $\frac{27}{43}\approx 0,63$

8. В тире имеются 5 различных по точности боя винтовок. Вероятности попадания в мишень для данного стрелка соответственно равны 0,5; 0,55; 0,7; 0,75 и 0,4. Чему равна вероятность попадания в мишень, если стрелок делает один выстрел из случайно выбранной винтовки?

   Рассмотрим гипотезы B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, состоящие в том, что стрелок выберет 1-ю, 2-ю, 3-ю, 4-ю и 5-ю винтовку соответственно. Выбор любой винтовки равновозможен, следовательно: $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=P(B_4)=P(B_5)=\frac{1}{5}=0,2$.
   Рассмотрим событие A – стрелок попадёт в мишень из наугад взятой винтовки.
   По условию: $P_{B_1}(A)=0,5;\quad P_{B_2}(A)=0,55;\quad P_{B_3}(A)=0,7;\quad P_{B_4}(A)=0,75;\quad P_{B_5}(A)=0,4$.
   По формуле полной вероятности:
   $$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)+P(B_4)\cdot P_{B_4}(A)+P(B_5)\cdot P_{B_5}(A)=$$
   $$=0,2\cdot 0,5+0,2\cdot 0,55+0,2\cdot 0,7+0,2\cdot 0,75+0,2\cdot 0,4=0,1+0,11+0,14+0,15+0,08=0,58$$

Ответ: 0,58

9. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго - 0,5; для третьего - 0,8. Мишень не поражена. Найти вероятность того, что выстрелы произведены первым стрелком.

Решение. Возможны три гипотезы:

A_1 - на линию огня вызван первый стрелок,

A_2 - на линию огня вызван второй стрелок,

A_3 - на линию огня вызван третий стрелок.

Так как вызов на линию огня любого стрелка равновозможен, то $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$.

В результате опыта наблюдалось событие B - после произведенных выстрелов мишень не поражена. Условные вероятности этого события при сделанных гипотезах равны:

$$P(B \mid A_1) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49;$$
$$P(B \mid A_2) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25;$$
$$P(B \mid A_3) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04.$$

по формуле Байеса находим вероятность гипотезы A_1 после опыта:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{0,49 \cdot 1/3}{1/3 \cdot 0,49 + 1/3 \cdot 0,25 + 1/3 \cdot 0,04} = \frac{0,49}{0,78} = 0,628.$$

Ответ:0,628

10. Имеются три урны; в первой 3 белых шара и 1 чёрный, во второй - 2 белых шара и 3 чёрных, в третьей - три белых шара. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из неё один шар. Этот шар оказался белым. Найти послеопытные (апостериорные) вероятности того, что этот шар вынут из первой, второй, третьей урны.

Решение. Гипотезы:

B_1 - выбрана первая урна; B_2 - выбрана вторая урна; B_3 - выбрана третья урна.

Так как урна выбирается наугад, то априорные вероятности гипотез раны:

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = 1/3.$$

В результате опыта появилось событие A - из выбранной урны вынут белый шар.

Условные вероятности события A относительно каждой из гипотез:

$P(A|B_1)=3/4$, $P(A|B_2)=2/5$, $P(A|B_3)=1$.

Применяя **формулу Байеса**, находим апостериорные вероятности гипотез:

$P(B_1|A)=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot 1}=\dfrac{15}{43}$; $P(B_2|A)=\dfrac{8}{43}$; $P(B_3|A)=\dfrac{20}{43}$.