

Математическая основа в задачах по функциональной грамотности

ЗАДОРЖНАЯ ОЛЬГА ВЛАДИМИРОВНА
ДОЦЕНТ КАФЕДРЫ МАТЕМАТИКИ,
ИНФОРМАТИКИ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО
ОБРАЗОВАНИЯ
ИРО КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

Математика и жизнь



Задачи про время



Задача. Если бы сейчас было на два часа позже, то до полуночи оставалось бы в два раза меньше времени, чем если бы сейчас было на час позже. Который сейчас час?



Про часы?

Кто придумал эту задачу?

Решение

Обозначим текущее время за x .

Через два часа будет $x+2$.

До полуночи оставалось бы $24-(x+2)$.

Через час будет $x+1$.

До полуночи в этом случае останется $24-(x+1)$.

По условию «до полуночи оставалось бы в два раза меньше времени...», поэтому

$$24-(x+2) < 24-(x+1)$$

$$2(24-(x+2)) = 24-(x+1)$$

$$2(22-x) = 23-x$$

$$x = 21$$

Получается, что на часах сейчас 21:00.

Если бы сейчас было на два часа позже, то до полуночи оставалось бы в два раза меньше времени, чем если бы сейчас было на час позже. Который сейчас час?

Проверка

Условие.

Если бы сейчас было на два часа позже, то до полуночи оставалось бы в два раза меньше времени, чем если бы сейчас было на час позже. Который сейчас час?



Задача. Откуда взять время на курсы?

На курсах «Быстрый старт в искусственный интеллект» можно прослушать лекции в обычном режиме, а можно в ускоренном. Одна из лекций длится 35 минут. Дмитрий Сергеевич прослушал лекцию с увеличением скорости в 1,75 раз. А Ольга Владимировна решила, что такая скорость слишком быстрая, поэтому увеличила скорость лишь в 1,25 раза.

- 1) На сколько минут раньше закончит слушать лекцию Дмитрий Сергеевич, чем Ольга Владимировна, если они начали одновременно слушать лекцию с разных компьютеров.
- 2) Во сколько закончили слушать лекцию Дмитрий Сергеевич и Ольга Владимировна, если они начали в 13:18 часов?

Решение

1) Дмитрий Сергеевич слушал лекцию $35: 1,75 = 35: 7/4 = 35 \times 4/7 = 20$ минут.

Ольга Владимировна слушала лекцию $35: 1,25 = 35: 5/4 = 35 \times 4/5 = 28$ минут.

На 8 минут.

2) Дмитрий Сергеевич закончил слушать лекцию в 13:38 часов.

Ольга Владимировна закончила слушать лекцию в 13:46 часов.

Лекция длится 35 минут.

Дмитрий Сергеевич прослушал лекцию с увеличением скорости в 1,75 раз.

Ольга Владимировна увеличила скорость в 1,25 раза.

1) На сколько минут раньше закончит слушать лекцию Дмитрий Сергеевич, чем Ольга Владимировна, если они начали одновременно слушать лекцию с разных компьютеров.

2) Во сколько закончили слушать лекцию Дмитрий Сергеевич и Ольга Владимировна, если они начали в 13:18 часов?

Усложнение задачи

На курсах «Быстрый старт в искусственный интеллект» можно прослушать лекции в обычном режиме, а можно в ускоренном. Одна из лекций длится 22 минуты 24 секунды. Елена Николаевна прослушала лекцию с увеличением скорости в 1,75 раз. А Надежда Владимировна решила, что такая скорость слишком быстрая, поэтому увеличила скорость лишь в 1,5 раза.

- 1) Во сколько закончит слушать лекцию Елена Николаевна, если она началась в 10 часов 13 минут?
- 2) Успеет ли Надежда Владимировна ровно прослушать лекцию до 15 часов, если она включила ее в 14:42?

Решение

1) Переведем 22 минуты 24 секунды в минуты: $22 \frac{24}{60} = 22 \frac{2}{5} = 112/5$ минут.

$112/5 : 1,75 = 12,8$ минуты слушала лекцию Елена Николаевна.

$12 \text{ минут} + 0,8 \text{ минут} = 12 \text{ минут} + 0,8 \cdot 60 = 12 \text{ минут} 48 \text{ секунд}$.

Если лекция началась в 10 часов 13 минут, то прибавим 12 минут 48 секунд, получим 10 часов 25 минут 48 секунд.

2) $112/5 : 1,5 = 17,92$ минут слушала лекцию Надежда Владимировна.

$17 \text{ минут} + 0,92 \text{ минут}$

Если переводить 0,92 минут в секунды, то получится 55,2 секунды, не очень «удобное» число, но это и не надо. Главное определить, сможет ли до 15 часов.

Если она включила ее в 14:42, то до 15 часов остается 18 минут, а это меньше 17,92 минут, значит, успеет.

Лекция длится 22 минуты 24 секунды.

Елена Николаевна прослушала лекцию с увеличением скорости в 1,75 раз.

Надежда Владимировна увеличила скорость в 1,5 раза.

1) Во сколько закончит слушать лекцию Елена Николаевна, если она началась в 10 часов 13 минут?

2) Успеет ли Надежда Владимировна прослушать лекцию до 15 часов, если она включила ее в 14:42?

Математическое ядро – Диофантовы уравнения

В поездку из города Краснодар в Москву на экскурсию собрались учащиеся 10 «а» класса. В разделе «Льготы» было указано, что для школьников предоставляется скидка 50%. Всего было потрачено 24200 рублей. Сколько учащихся поедет в плацкартном вагоне, если цена билета в плацкартный вагон 1900 рублей, а в купейный 3200 рублей?



Решение.

Если скидка 50%, то цена билета в плацкартный вагон 950 рублей, а в купейный 1600 рублей.

Пусть

x учащихся поехало в плацкартном вагоне,

y учащихся поехало в купейном вагоне. Тогда

$$950x + 1600y = 24200$$

$$19x + 32y = 484$$

$$x = \frac{484 - 32y}{19}$$

1 способ.

$$x = \frac{484 - 32y}{19} = \frac{25 \cdot 19 + 9 - 38y + 6y}{19} = 25 - 2y + \frac{9 + 6y}{19} = 25 - 2y + k$$

$$k = \frac{9 + 6y}{19} \Rightarrow 6y = 19k - 9 \Rightarrow y = \frac{19k - 9}{6} = \frac{18k + k - 12 + 3}{6} = 3k - 2 + \frac{k + 3}{6} = 3k - 2 + n$$

$$n = \frac{k + 3}{6} \Rightarrow k = 6n - 3$$

$$y = 3k - 2 + n = 3(6n - 3) - 2 + n = 18n - 9 - 2 + n = 19n - 11$$

$$x = 25 - 2y + k = 25 - 2(19n - 11) + 6n - 3 = 25 - 38n + 22 + 6n - 3 = -35n + 47$$

$$\begin{cases} x = -35n + 47 & x \geq 0 & -35n + 47 \geq 0 & n \leq \frac{47}{35} = 1, \dots \\ y = 19n - 11 & y \geq 0 & 19n - 11 \geq 0 & n \geq \frac{11}{19} \end{cases} \Rightarrow n = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow x = 12, y = 8$$

2 способ.

$$x = \frac{484 - 32y}{19} = \frac{4(121 - 8y)}{19}$$

Так как 4 четное и не делится на 19, то $121 - 8y$ должно делиться на 19.

Методом подбора решим.

$y=0$, $121-0=121$ не делится на 19

$y=1$, $121-8=113$ не делится на 19

$y=2$, $121-16=105$ не делится на 19

$y=3$, $121-24=97$ не делится на 19

$y=4$, $121-32=89$ не делится на 19

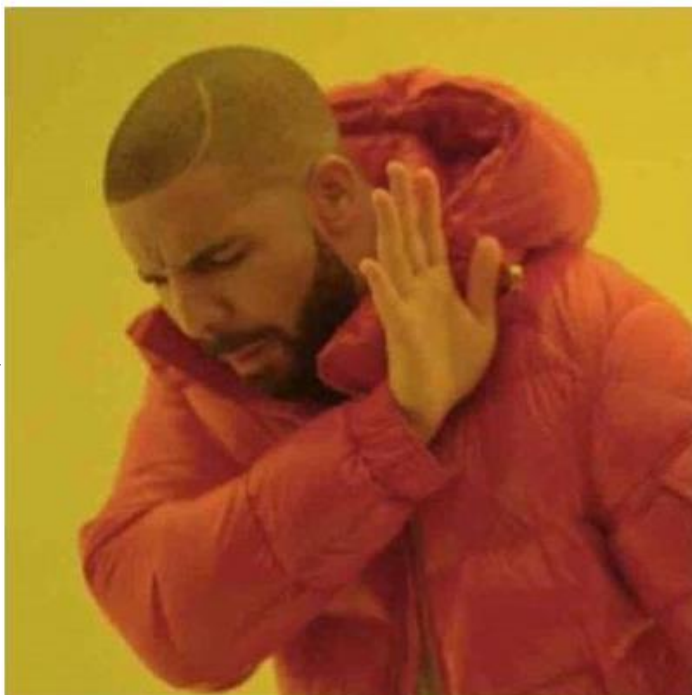
$y=5$, $121-40=81$ не делится на 19

$y=6$, $121-48=73$ не делится на 19

$y=7$, $121-56=65$ не делится на 19

$y=8$, $121-64=57=19 \cdot 3$ делится на 19

Ответ: 12 учащихся поедет в плацкартном вагоне.



Решать задачи
по
математической
грамотности?



Вот сочинять их!

Оригинальная задача

Лампа висит над центром круглого стола радиуса R . При какой высоте лампы над столом освещенность предмета, лежащего на краю стола, будет наилучшей (освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света)?



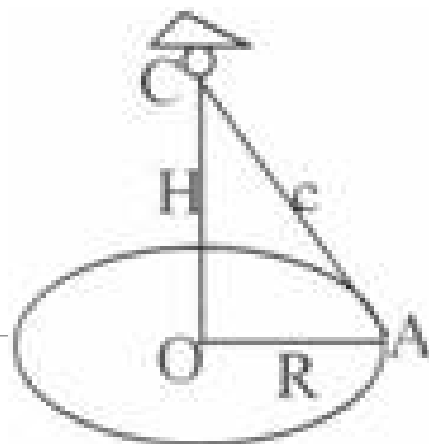
Задача для групповой работы

Для удобства подготовки к выпускным экзаменам родители купили Тане круглый стол и красивую лампу на потолок. Таня сама решила повесить лампу, но задумалась, она хотела, чтобы книги, лежащие на краю стола, удобно было читать при ярком свете.

Какие данные нужны Танюшке, чтобы решить задачу?

Для сведения: освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.

Решение



Обозначим освещенность буквой f . Угол падения, это угол $\alpha = \angle OCA$.

По условию $f = k \frac{\cos \alpha}{AC^2}$.

$$\cos \alpha = \frac{CO}{AC} = \frac{h}{AC}, \text{ где } AC = \sqrt{CO^2 + OA^2} = \sqrt{h^2 + R^2}.$$

$$\text{Имеем, } f = k \frac{\cos \alpha}{AC^2} = k \frac{\frac{h}{AC}}{AC^2} = k \frac{h}{AC^3} = k \frac{h}{(\sqrt{h^2 + R^2})^3}.$$

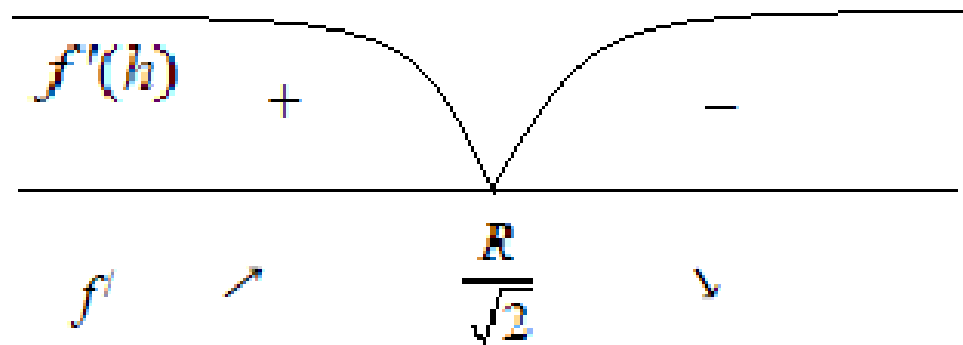
Освещенность должна быть наилучшей, значит, функция должна быть наибольшей.

Исследуем функцию $f = k \frac{h}{(\sqrt{h^2 + R^2})^3} = kh(h^2 + R^2)^{-\frac{3}{2}}$ на экстремум

$$\begin{aligned} f'(h) &= k \left(h(h^2 + R^2)^{-\frac{3}{2}} \right)' = kh'(h^2 + R^2)^{-\frac{3}{2}} - kh \frac{3}{2} (h^2 + R^2)^{-\frac{5}{2}} 2h = \\ &= k(h^2 + R^2)^{-\frac{3}{2}} - 3kh^2 (h^2 + R^2)^{-\frac{5}{2}} = (h^2 + R^2)^{-\frac{5}{2}} (k(h^2 + R^2) - 3kh^2) = \\ &= \frac{k(R^2 - 2h^2)}{(h^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

Стационарная точка $h = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Найдём знаки производной при переходе через эту точку, для определения экстремума.

$$f'\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{k \frac{R^2}{2}}{(R^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{k}{2^{\frac{7}{2}} R^{\frac{1}{2}}} > 0, \quad f'(R) = -\frac{kR^2}{(R^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{k}{2^{\frac{5}{2}} R^{\frac{1}{2}}} < 0$$



Значит, точка $h = \frac{R}{\sqrt{2}}$ является точкой максимума, а значение функции в этой точке — максимальным.

