МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПРОФИЛЬНОГО ЕГЭ (ЗАДАНИЕ №16)

1) Самое важное — правильная методика подготовки. Сначала — теория. Свойства геометрических фигур. Определения и теоремы

Лучшая тренировка на этом этапе задание №1 из первой части ЕГЭ по математике

2) Задача 16 Профильного ЕГЭ по математике оценивается в 3 первичных балла и состоит из двух пунктов. Первый пункт — доказательство

32 полезных факта

Углы, треугольники, четырехугольники

1. Биссектрисы смежных углов перпендикулярны

2. Свойство медианы прямоугольного треугольника

3. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма

4. Площадь выпуклого четырехугольника

5. Свойства трапеции: отрезок, соединяющий середины диагоналей

6. Свойства равнобедренной трапеции

7. Замечательное свойство трапеции

8. Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника

9. Свойства биссектрис треугольника

10. Свойства медиан треугольника

11. Свойство высот треугольника

Окружности

12. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам

13. Теорема о пересекающихся хордах

14. Теорема о серединном перпендикуляре к хорде

15. Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния

16. Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны

17. Угол между касательной и хордой

18. Теорема о секущей и касательной

19. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами

20. Угол между двумя секущими (с вершиной вне окружности) равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности

21. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c, равен $\frac{1}{2}(a+b-c)$

22. Прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним

23. Если расстояние между центрами окружностей радиусами R и r равно a и , a > R + r, то отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключенные между точками касания, равны соответственно $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$ и $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$

24. Четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180 градусов

25. В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны

26. Если окружность вписана в равнобедренную трапецию, то боковая сторона трапеции равна ее средней линии

27. Если M – точка касания со стороной AC окружности, вписанной в треугольник ABC, то AM = p – BC, где p – полупериметр треугольника ABC

28. Если окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC, то расстояние от вершины A до точки касания окружности с прямой AB равно полупериметру треугольника ABC

29. Если окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC соответственно в точках K, L, M, а угол BAC равен φ, то угол KLM $90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$

30. Если прямые, проходящие через точку A, касаются окружности S в точках B и C, то центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на окружности S

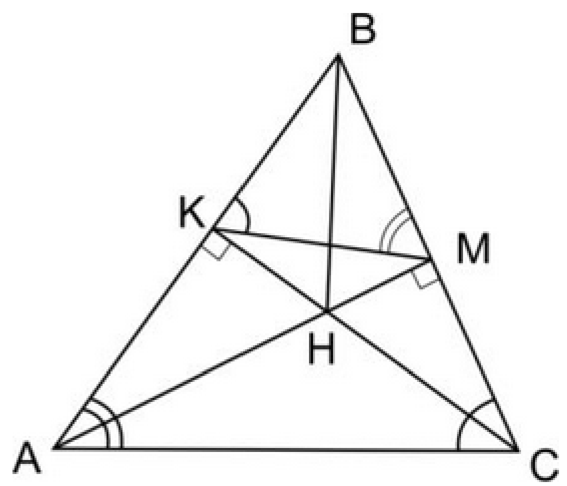
31. Если площадь треугольника равна S, то площадь треугольника, составленного из его медиан, равна $\frac{3}{4}S$

32. Свойство биссектрисы треугольника. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону в отношении длин прилежащих сторон

Оказывается, многие задачи по планиметрии строятся по одной из так называемых классических схем.

Схема 1. В треугольнике ABC проведены высоты AM и CK.

H – точка пересечения высот треугольника (ортоцентр), H=AM∩CK



1. Треугольники MBK и $\triangle ABC$, подобны, причем коэффициент подобия
$k = cosB$, если $\angle B < 90^\circ$, и $k = |cosB|$, если $\angle B > 90^\circ$

1. Четырехугольник AKMC можно вписать в окружность. Эта вспомогательная окружность поможет решить множество задач.
2. Четырехугольник BKMH также можно вписать в окружность.
3. Радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников ABC, AHC, BHC и ABH, равны.
4. $BH = 2R\,|cosB|$, где R – радиус описанной окружности $\triangle ABC$.

Схема 2. Пусть луч MA пересекает окружность в точках A и B, а луч MD – в точках C и D, причем MA > MB, MD > MC. Тогда треугольники BMC и DMA подобны.

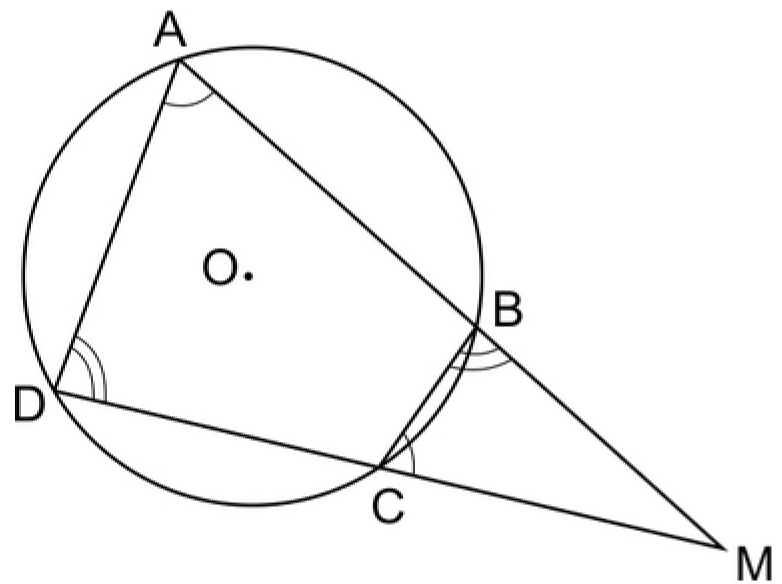


Схема 3. У треугольников ABC и AMC сторона AC – общая, угол B равен углу M, причем точки B и M лежат по одну сторону от прямой AC. Тогда точки A, B, C, M лежат на одной окружности.

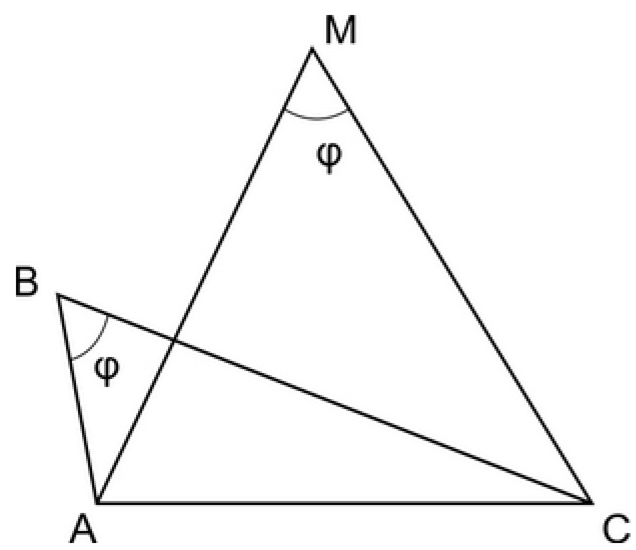


Схема 4. У треугольников АВС и АМС сторона АС – общая, углы В и М – прямые. Тогда точки А, В, С, М лежат на окружности, радиус которой равен половине АС.

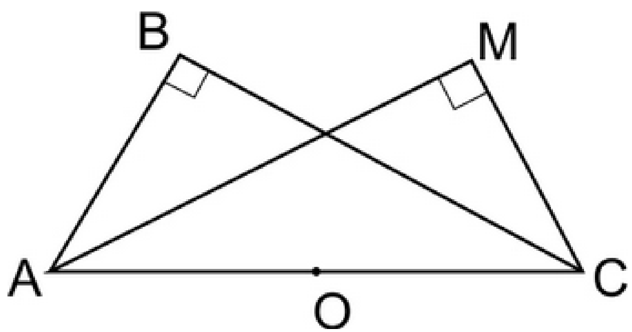
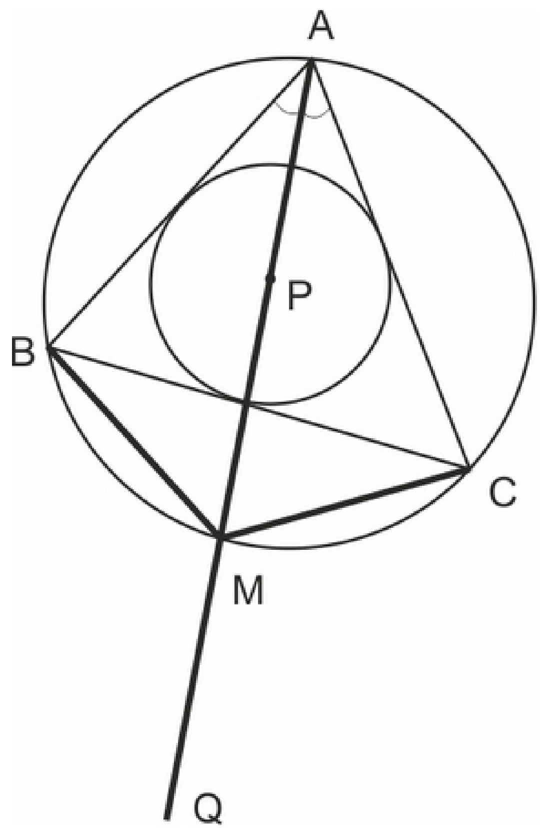


Схема 5. Лемма о трезубце (трилистнике)

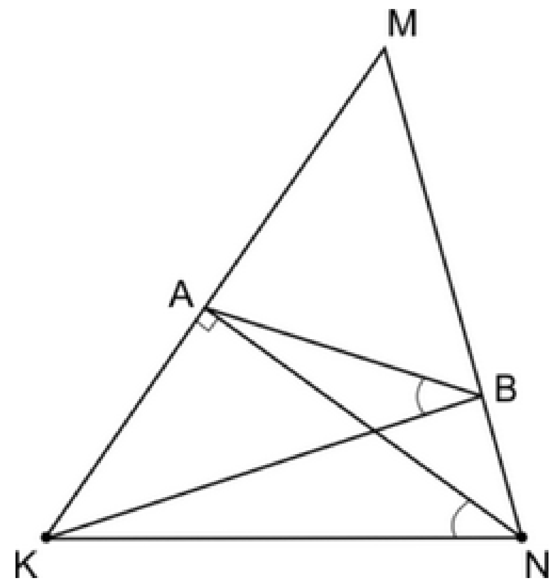


Любая задача из варианта ЕГЭ решается без сложных формул

В остроугольном треугольнике KMN проведены высоты KB и NA.

а) Докажите, что угол ABK равен углу ANK.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABM, если известно, что $KN = 8\sqrt{2}$ *и* $\angle KMN = 45°$



а) Докажем, что $\angle ABK = \angle ANK$.

$\triangle MBK \sim \triangle MAN$ (по двум углам). Запишем отношение сходственных сторон: $\frac{MA}{MB} = \frac{MN}{MK}$.

Но это значит, что $\triangle ABM \sim \triangle NKM$ (по углу и двум сторонам), причем $k = \frac{MA}{MN} = cos\angle KMN$.

$\angle MAB = \angle MNK$, $\angle BAK$ — смежный с углом $\angle MAB$,

$\angle BAK = 180° - \angle MAB = 180° - \angle BNK$,

$\angle BAK + \angle BNK = 180°$, четырехугольник ABNK можно вписать в окружность.

$\angle ABK = \angle ANK$ (опираются на одну дугу).

б) Найдем $R_{\triangle ABM}$, если $KN = 8\sqrt{2}$ и $\angle KMN = 45°$

$\triangle ABM \sim \triangle NKM$, $k = cos\angle KMN = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\frac{AB}{KN} = k$, $AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot KN = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 8$.

По теореме синусов,

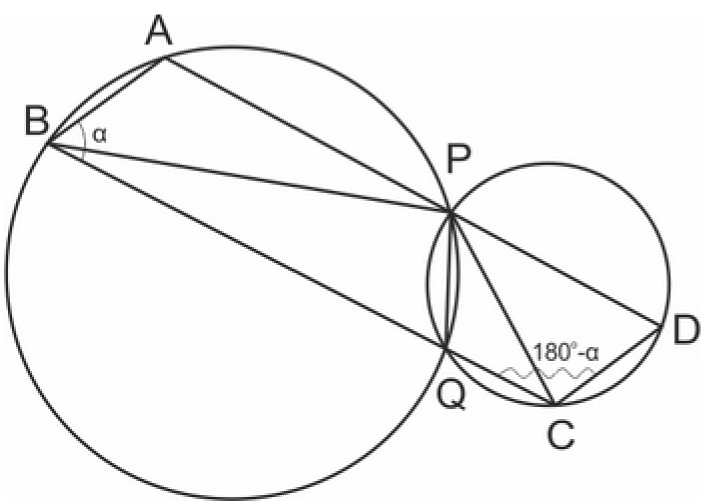
$R_{\triangle ABM} = \frac{AB}{2sin\angle AMB} = \frac{8 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

Задачи из сборника «36 тренировочных вариантов для подготовки к ЕГЭ по математике под редакцией И. В. Ященко», 2022 год. Вариант 12, задача 16

Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую – в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую – в точке C.

а) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

б) Найдите отношение $BP : PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.



а) Докажем, что $ABCD$ – параллелограмм.

$AD \parallel BC$ по условию, тогда $ABQP$ – трапеция, вписанная в окружность, следовательно $AB = PQ$ (трапецию можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая).

Пусть $\angle ABQ = \alpha$, тогда $\angle BQP = \alpha, \angle APQ = 180° - \alpha$.

Углы BQP и PQC – смежные, $\angle BQP = 180° - \alpha$, значит, $\angle QCD = 180° - \alpha$.

Получим, что $\angle ABQ = \angle QCD = 180°$;

$\angle ABQ$ и $\angle QCD$ – соответственные, значит, $AB \parallel CD$, $ABCD$ – параллелограмм.

б) Пусть $R = 2r$; найдём $BP : PC$.

$\triangle ABP$ вписан в окружность.

По теореме синусов, $\frac{BP}{sin\angle BAP} = 2R$.

Аналогично, $\triangle PQC$ вписан в окружность $\frac{PC}{sin\angle PQC} = 2r$;

$\angle BAP = \angle PQC$ (из пункта (а)), тогда $\frac{BP}{PC} = \frac{R}{r} = 2$.

5. Критерии проверки и оценка решений задания 16

Задание № 16 – это планиметрическая задача. В пункте *а* теперь нужно **доказать** геометрический факт, в пункте *б* – найти (вычислить) геометрическую величину.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

Задание 1

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.
а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

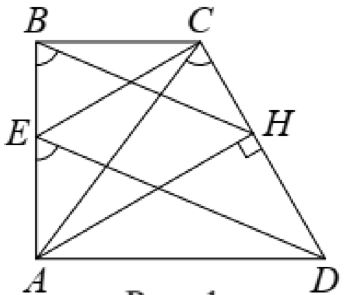


Рис. 1

Решение.
а) Поскольку

$$\angle ABC = \angle AHC = \angle ECD = \angle EAD = 90°,$$

около четырёхугольников $ABCH$ и $AECD$ можно описать окружности (рис. 1).
Значит,

$$\angle ABH = \angle ACH = \angle ACD = \angle AED,$$

то есть прямые BH и ED параллельны.
б) Опустим из точки B перпендикуляр BK на прямую CD (рис. 2). Стороны KH и CD треугольников BKH и ECD лежат на одной прямой, а стороны BK и EC, BH и ED попарно параллельны. Значит, треугольники BKH и ECD подобны.

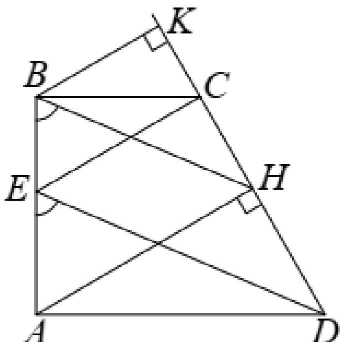


Рис. 2

Поскольку

$$BK = BC \cdot \sin\angle BCK = EC \cdot \cos\angle ECB \cdot \sin\angle BCK =$$

$$= EC \cdot \cos 30° \cdot \sin 60° = \frac{3}{4} EC,$$

коэффициент подобия равен $\frac{3}{4}$. Значит,

$$BH : ED = 3:4.$$

Ответ: б) $3:4$.

№16.

Дано:

ABCD-трапеция

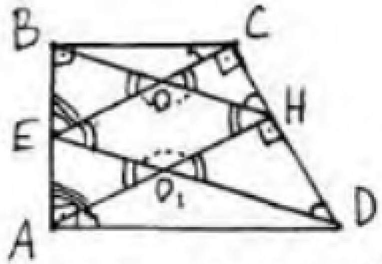
$BC \perp AB \perp AD$

$AH \perp CD$

$CE \perp CD$

а) Доказать:

$BH \parallel ED$



Доказательство:

1) т.к. $AH \perp CD$ и $CE \perp CD$, то $AH \parallel CE$;

2) AB – секущая при двух $\parallel$ прямых, значит $\angle BEC = \angle BAH$; 3) BH – тоже секущая, значит $\angle BOE = \angle COH = \angle BHA$;

4) ED – тоже секущая, значит $\angle CED = \angle EO_1A = \angle HO_1D$;

5) $\angle EOH = 180° - \angle COH$ (смеж. углы), $\angle EO_1H = 180° - \angle BHA$. т.к. $\angle COH = \angle BHA$, то $\angle EOH = \angle EO_1H$, следовательно, $EOHO_1$ – параллелограм, а его противолежащие стороны = и $\parallel$, значит, $BH \parallel ED$.

а) Доказательство.

1) $AH \perp CD$, $AB \perp BC$ $\Rightarrow$ около $ABCH$ можно описать окружность;

2) $EC \perp CD$, $AB \perp AD$ $\Rightarrow$ около $AECD$ можно описать окружность

3) $\angle ABH = \angle ACH = \frac{1}{2} \smile AH$

$\angle ACD = \angle AED = \frac{1}{2} \smile AD$

$\angle ACH = \angle ACD$

$\Rightarrow \angle ABH = \angle AED$

4) $\angle ABH$ и $\angle AED$ соответственные при прямых BH и ED и секущей AB,

$\angle ABH = \angle AED$ $\Rightarrow$ $BH \parallel ED$.

б)

Решение:

1) Построим $BK \perp CD$.

2) $\left.\begin{array}{l} BK \perp CD \\ EC \perp CD \end{array}\right| \Rightarrow BK \parallel EC$

3) $\left.\begin{array}{l} BK \parallel EC \\ BH \parallel ED \end{array}\right| \Rightarrow \triangle BKH \sim \triangle ECD.$

4) $\angle KCB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

5) $\triangle BKC$: $BK = BC \cdot \sin\angle BCK = BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

6) $\triangle CBE$: $\angle BCE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$BC = CE \cdot \cos\angle BCE = CE \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $BK = CE \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} CE$

8) $k = \frac{BK}{CE} = \frac{BH}{ED} = \frac{3}{4}.$

Ответ: 3:4

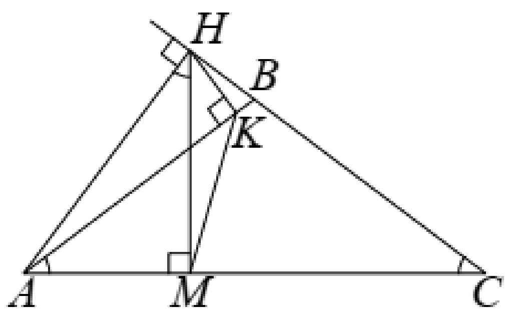
Задание 2

В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH. Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK, если $AB = 5$, $AC = 8$.

Решение.



а) Поскольку $\angle AMH = \angle AKH = 90°$, около четырёхугольника $AMKH$ можно описать окружность с диаметром AH. Получаем:

$$\angle BAC = \angle BCA = 90° - \angle HAC = \angle AHM,$$

поэтому $AM = MK$ как хорды, стягивающие равные дуги.

б) В прямоугольных треугольниках AHM и ACH имеем:

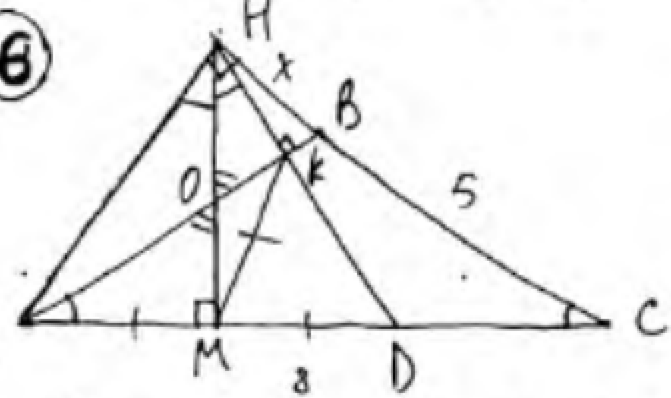
$$AM = AH \cdot \cos\angle HAM = AC \cdot \cos^2\angle HAM = AC \cdot \left(1 - \cos^2\angle ACB\right).$$

Поскольку $\cos\angle ACB = \dfrac{AC}{2BC} = \dfrac{4}{5}$, получаем:

$$MK = AM = \frac{72}{25}.$$

Ответ: б) $\dfrac{72}{25}$.

(16)



а) $\triangle ABC$: р/б $\Rightarrow \angle BAC = \angle BCA$ (1)

$\triangle AHC$: прямоуг. KM высота $\Rightarrow$

$\triangle ACH \sim \triangle AHM \Rightarrow \angle ACB = \angle AHM$ (2)

$\triangle AOM \sim \triangle OHK$ (уу) $\Rightarrow \angle OAM = \angle OHB$ (3)

(1), (2), (3) $\Rightarrow OK$ – бисс в $\triangle AHB$.

[redacted] продолжим прямую HK до стороны AC. $\triangle AHD$:

HM – выс и бисс $\Rightarrow \triangle AHD$ – р/б $\Rightarrow HM$ – медиана $\Rightarrow AM = MD$

$\triangle AKD$: прямоуг. $AM = MD \Rightarrow KM$ – бисс $\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2KM = AD \\ MA = MD \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$2KM = 2AM \Rightarrow KM = AM$

ч. т. д.

б) пусть $HB = x$ [redacted] $\triangle AHB$: прямоуг. $AH^2 = AB^2 - HB^2$

$\triangle AHC$: прямоуг $AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow AB^2 - HB^2 = AC^2 - HC^2$

$25 - \cancel{HB^2} = 64 - CB^2 - 2HB \cdot CB - \cancel{HB^2}$ $\quad HB = 1,4$

$\triangle AHC$: $HC^2 = MC \cdot AC$ $\quad (6,4)^2 = 8\,CM$ $\quad CM = 5,12$ [redacted]

$\left.\begin{matrix} AM = AC - MC = 8 - 5,12 = 2,88 \\ AM = MK \end{matrix}\right\} \Rightarrow MK = 2,88$

Ответ: б) $MK = 2,88$

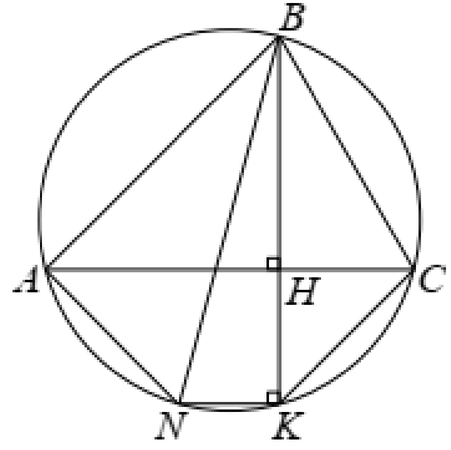
Задание 3

В остроугольном треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC, вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке K. Отрезок BN – диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите NK, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 16, $\angle BAC = 40°$, $\angle ACB = 85°$.

Решение.



а) Поскольку BN – диаметр описанной около треугольника ABC окружности, получаем

$$\angle ABN = 90° - \angle ANB = 90° - \angle ACB =$$
$$= 90° - \angle HCB = \angle CBH = \angle CBK.$$

Следовательно, хорды AN и CK стягивают равные дуги, а значит, они равны.

б) Пусть $R = 16$ – радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Имеем:

$$\angle ABN = \angle CBH = 90° - \angle HCB = 5°,$$
$$\angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle ACB = 55°;$$
$$\angle KBN = \angle ABC - \angle ABN - \angle CBK = 45°.$$

Следовательно, по теореме синусов

$$NK = 2R \cdot \sin \angle KBN = 2R \cdot \sin 45° = 16\sqrt{2}.$$

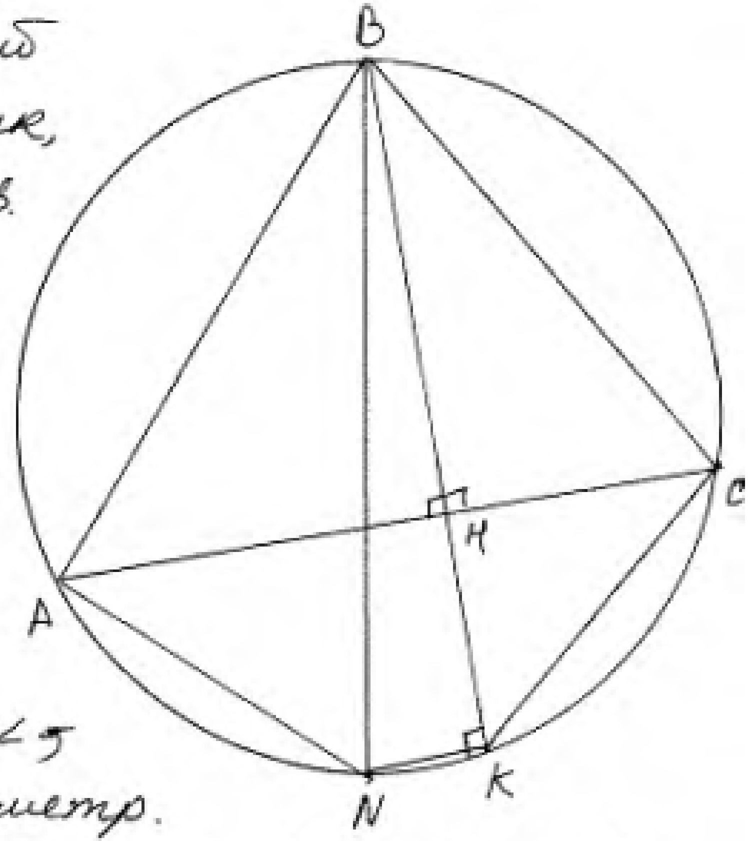
Ответ: б) $16\sqrt{2}$.

п.16.

2) Пусть ABC – произвольный остроугольный треугольник, вписанный в окружность. BN – диаметр, BH – высота Δ ABC, прямая BK содержит высоту BH и пересекает окр. в точке K. $\angle AHB = 90^\circ$ (т.к BH – высота.)

$\angle NKB$ – вписанный $\angle$, опирающийся на диаметр.

$\Rightarrow \angle NKB = 90^\circ \Rightarrow$ прямая AC $\parallel$ прямой NK $\Rightarrow$ ACKN – трапеция. По св-ву трапеции, вписанной в окружность ее стороны равны. AN = CK ч.т.д.



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!