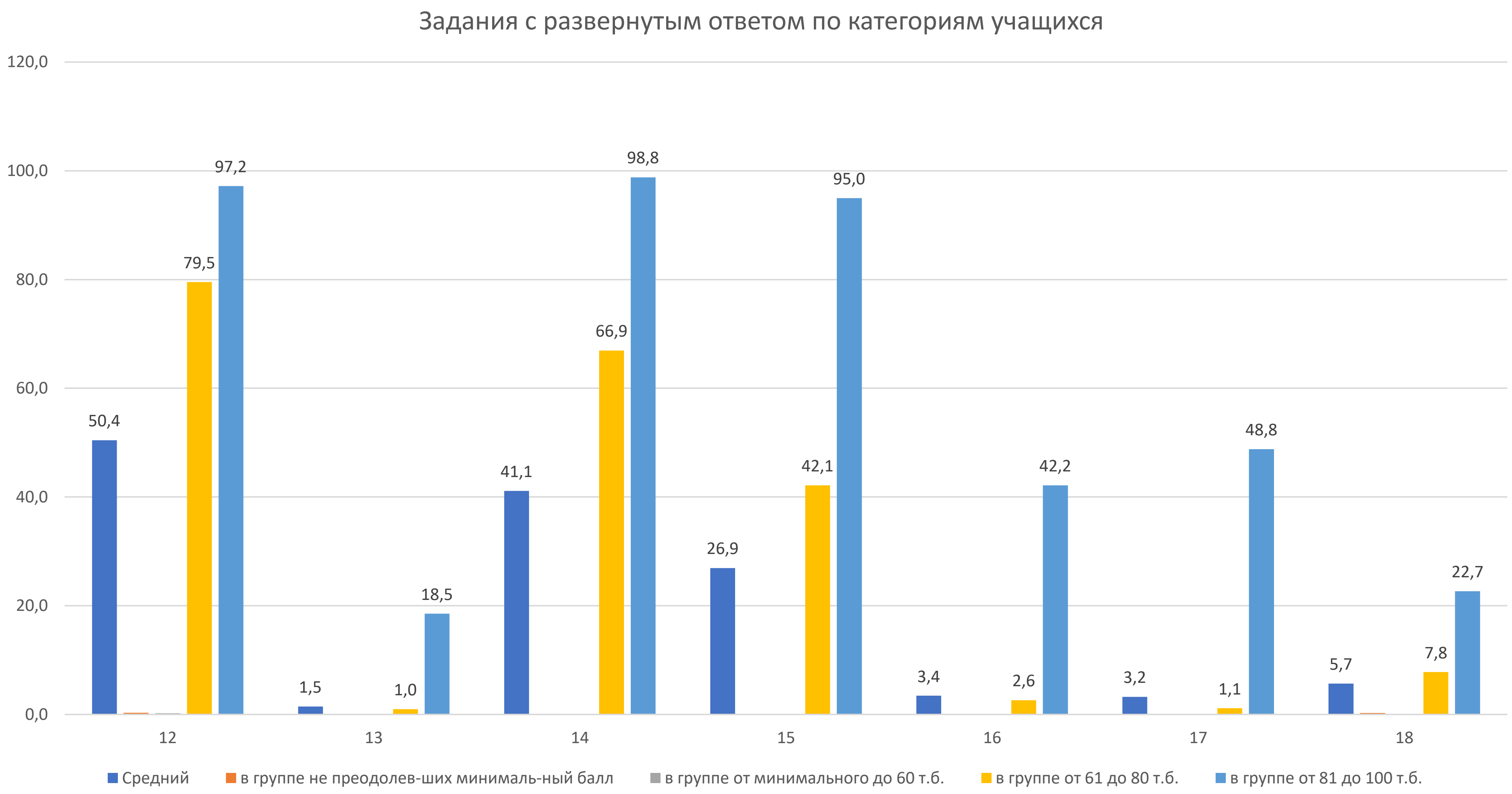
# Особенности оценивания заданий части с развернутым ответом ЕГЭ профиль 2022.

Терещенко И.В.


Задания с развернутым ответом по категориям учащихся
120,0
100,0
80,0
60,0
40,0
20,0
0,0
50,4
79,5
97,2
1,5
1,0
18,5
41,1
66,9
98,8
26,9
42,1
95,0
3,4
2,6
42,2
3,2
1,1
48,8
5,7
7,8
22,7
12
13
14
15
16
17
18
Средний
в группе не преодолев-ших минималь-ный балл
в группе от минимального до 60 т.б.
в группе от 61 до 80 т.б.
в группе от 81 до 100 т.б.

**12** а) Решите уравнение

$$2\cos^2 x + 3\sin(-x) - 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

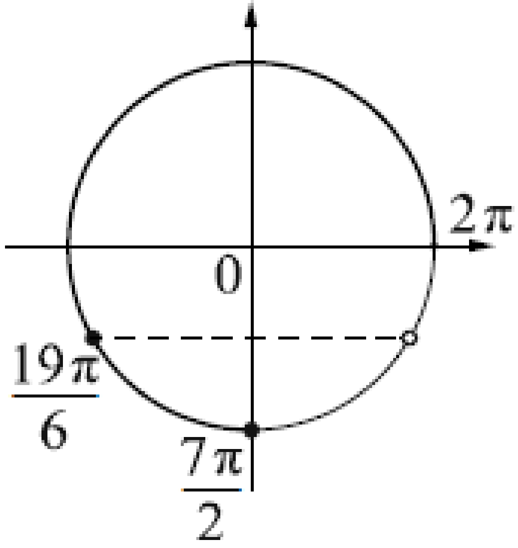
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2-2\sin^2 x-3\sin x-3=0;\ 2\sin^2 x+3\sin x+1=0;\ (\sin x+1)(2\sin x+1)=0.$$

Значит, $\sin x=-1$, откуда $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $\sin x=-\frac{1}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.




Получим числа: $\frac{19\pi}{6};\ \frac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;

$-\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{19\pi}{6};\ \frac{7\pi}{2}$.

**13** Точка $M$ — середина ребра $SA$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$. Точка $N$ лежит на ребре $SB$, $SN : NB = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость $CMN$ параллельна прямой $SD$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью $CMN$, если все рёбра пирамиды равны 6.

Решение.

а) Пусть прямые $AB$ и $MN$ пересекаются в точке $T$, а прямая $TC$ пересекает ребро $AD$ в точке $K$ (рис. 1). Точка $K$ лежит в плоскости $CMN$.

Рассмотрим плоскость $SAB$ (рис. 2). Пусть точка $E$ — середина отрезка $NB$. Тогда отрезок $MN$ — средняя линия треугольника $ASE$, а прямая $MN$ параллельна прямой $AE$. Значит, отрезок $AE$ — средняя линия треугольника $TNB$, откуда $AT = AB$.

Прямоугольные треугольники $TAK$ и $CDK$ (см. рис. 1) равны по катету и противолежащему острому углу ($AT = CD$, $\angle TKA = \angle CKD$), значит, точка $K$ — середина ребра $AD$, то есть отрезок $MK$ — средняя линия треугольника $SAD$. Следовательно, плоскость $CMN$, содержащая прямую $MK$, параллельную прямой $SD$, параллельна прямой $SD$.

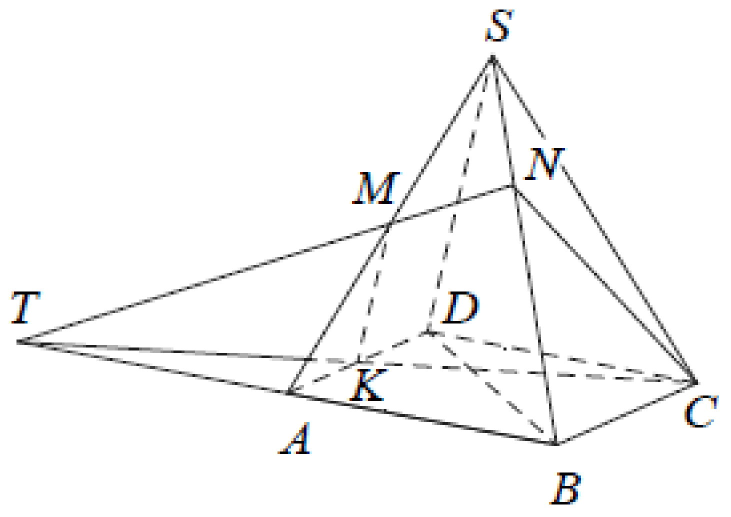


Рис. 1

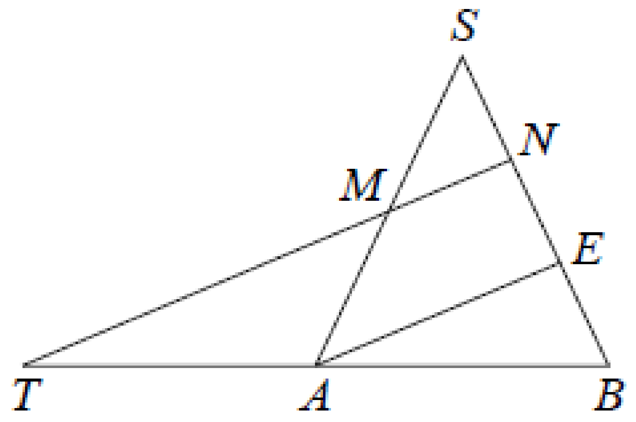


Рис. 2

б) Четырёхугольник $CNMK$ — сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью $CMN$. Отрезки $MN$ и $AE$ являются средними линиями треугольников $ASE$ и $TNB$ соответственно, значит, $TN = 2AE = 4MN$; $TM : TN = 3:4$.

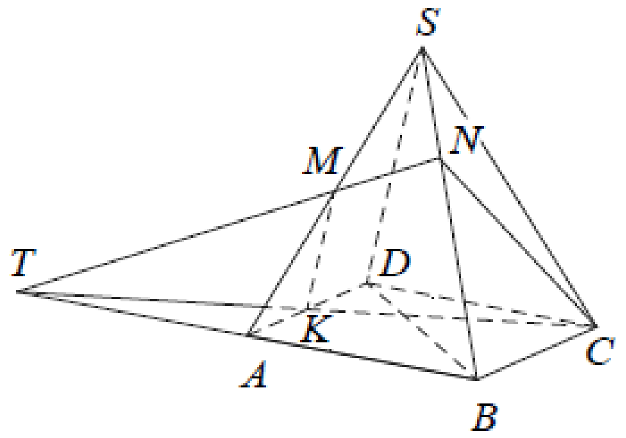
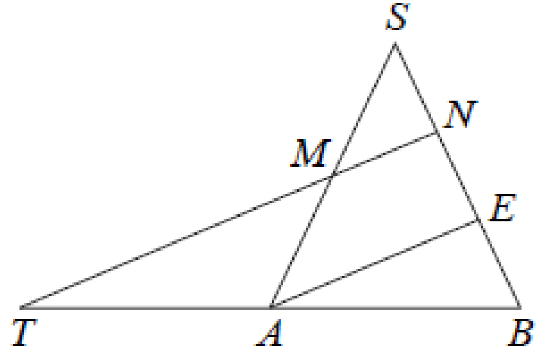


Рис. 1




Из треугольников $SMN$, $SNC$ и $TBC$ находим:

$$MN = \sqrt{MS^2 + SN^2 - 2MS \cdot SN \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{9+4-6} = \sqrt{7};\ TN = 4MN = 4\sqrt{7},$$

$$CN = \sqrt{SC^2 + SN^2 - 2SC \cdot SN \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{36+4-12} = 2\sqrt{7},$$

$$TC = \sqrt{TB^2 + BC^2} = \sqrt{144+36} = 6\sqrt{5},$$

откуда

$$\cos\angle TNC = \frac{TN^2 + CN^2 - TC^2}{2TN \cdot CN} = \frac{112+28-180}{2 \cdot 4\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7}} = -\frac{5}{14};$$

$$\sin\angle TNC = \sqrt{1 - \cos^2\angle TNC} = \frac{\sqrt{171}}{14} = \frac{3\sqrt{19}}{14}.$$

Площадь треугольника $TNC$ равна

$$\frac{TN \cdot CN \cdot \sin\angle TNC}{2} = \frac{4\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{19}}{28} = 6\sqrt{19}.$$

Площадь треугольника $TMK$ составляет $\frac{TM}{TN} \cdot \frac{TK}{TC} = \frac{3}{8}$ площади треугольника $TNC$, значит, площадь четырёхугольника $CNMK$ составляет $\frac{5}{8}$ площади треугольника $TNC$ и равна $\frac{5}{8} \cdot 6\sqrt{19} = \frac{15\sqrt{19}}{4}$.

Ответ: б) $\frac{15\sqrt{19}}{4}$.

**14** Решите неравенство $\frac{4}{3^x - 27} \geq \frac{1}{3^x - 9}$.

Решение.

Пусть $t = 3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{4}{t-27} \geq \frac{1}{t-9}; \quad \frac{3t-9}{(t-9)(t-27)} \geq 0; \quad \frac{3(t-3)}{(t-9)(t-27)} \geq 0,$$

откуда $3 \leq t < 9$; $t > 27$.

При $3 \leq t < 9$ получим: $3 \leq 3^x < 9$, откуда $1 \leq x < 2$.

При $t > 27$ получим: $3^x > 27$, откуда $x > 3$.

Решение исходного неравенства: $1 \leq x < 2$; $x > 3$.

Ответ: $[1; 2)$; $(3; +\infty)$.

**15** В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равными;

— к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1254,4 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2027 года?

Решение.

Пусть платежи в 2027 и 2028 годах составят по $x$ тыс. рублей.

В январе 2027 года долг (в тыс. рублей) будет равен 960, а в июле равен $960-x$. В январе 2028 года долг будет равен $1152-1,2x$, а в июле равен $1152-2,2x$. В январе 2029 года долг будет равен $1382,4-2,64x$.

По условию, к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью, значит, платёж в 2029 году должен быть равен $(1382,4-2,64x)$ тыс. рублей, а сумма всех платежей будет составлять $(1382,4-0,64x)$ тыс. рублей.

Получаем:

$$1382,4-0,64x=1254,4;\ 0,64x=128,$$

откуда $x=200$.

Платёж в 2027 году должен быть равен 200 тыс. рублей.

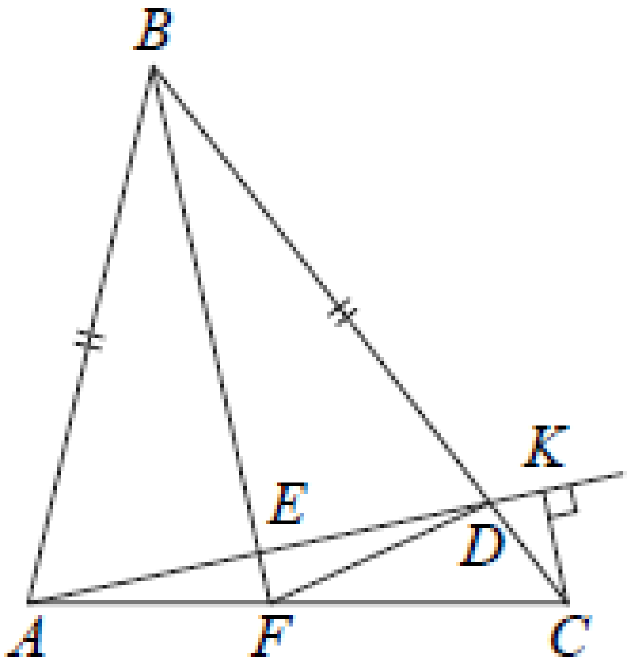
Ответ: 200 тыс. рублей.

**16** На стороне $BC$ треугольника $ABC$ отмечена точка $D$ так, что $AB = BD$. Биссектриса $BF$ треугольника $ABC$ пересекает прямую $AD$ в точке $E$. Из точки $C$ на прямую $AD$ опущен перпендикуляр $CK$.

а) Докажите, что $AB : BC = AE : EK$.

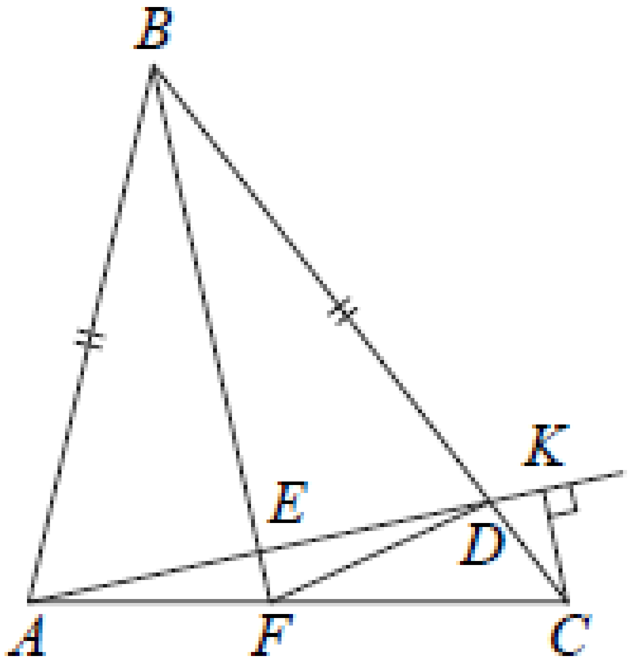
б) Найдите отношение площади треугольника $ABE$ к площади четырёхугольника $CDEF$, если $BD : DC = 5 : 2$.

а) В равнобедренном треугольнике $ABD$ биссектриса $BE$ является медианой и высотой. Следовательно, прямые $BF$ и $CK$ перпендикулярны прямой $AK$, а значит, параллельны. По свойству биссектрисы треугольника $AB : BC = AF : FC$, а по теореме Фалеса $AF : FC = AE : EK$. Таким образом, $AB : BC = AE : EK$.



б) Прямоугольные треугольники $BED$ и $CKD$ подобны по острому углу ($\angle BDE = \angle CDK$), откуда получаем:

$$BE : CK = BD : CD = 5 : 2.$$




Прямоугольные треугольники $AEF$ и $AKC$ подобны по общему острому углу $A$, откуда:

$$\frac{EF}{KC} = \frac{AE}{AK} = \frac{AE}{AE+EK} = \frac{1}{1+\frac{EK}{AE}} = \frac{1}{1+\frac{BC}{AB}} = \frac{1}{1+\frac{BC}{BD}} = \frac{1}{1+\frac{7}{5}} = \frac{5}{12};$$

$$BE : EF = \frac{BE}{CK} \cdot \frac{CK}{EF} = \frac{5}{2} \cdot \frac{12}{5} = 6.$$

Обозначим площади многоугольников $ABE$, $BDE$, $DEF$, $BFD$, $CFD$ и $CDEF$ через $S$, $S_{BDE}$, $S_{DEF}$, $S_{BFD}$, $S_{CFD}$ и $S_{CDEF}$ соответственно. Треугольники $BFD$ и $CFD$ имеют общую высоту, проведённую из вершины $F$; треугольники $ABE$ и $DBE$ равны; треугольники $BDE$ и $DEF$ имеют общую высоту, проведённую из вершины $D$. Следовательно, получаем:

$$S_{BDE} = S;\ S_{DEF} = \frac{EF}{BE} \cdot S_{BDE} = \frac{S}{6};\ S_{BFD} = S_{BDE} + S_{DEF} = S + \frac{S}{6} = \frac{7S}{6};$$

$$S_{CFD} = \frac{CD}{BD} \cdot S_{BFD} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7S}{6} = \frac{7S}{15};\ S_{CDEF} = S_{CFD} + S_{DEF} = \frac{7S}{15} + \frac{S}{6} = \frac{19S}{30},$$

откуда $\frac{S}{S_{CDEF}} = \frac{30}{19}$.

**17** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x + 9|x| = 0$$

имеет четыре различных корня.

Решение.

При $x \le 0$ уравнение

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x + 9|x| = 0$$

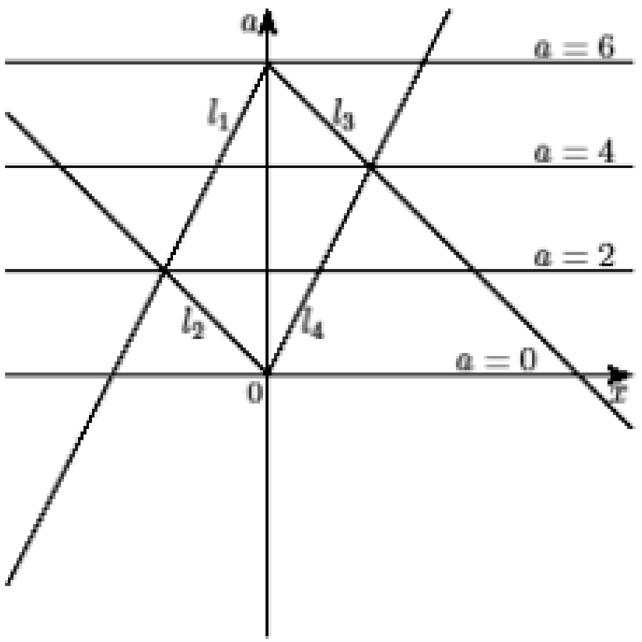
принимает вид:

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x - 9x = 0;$$

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a - 6x = 0;$$

$$(a - 2x)(a + x) - 6(a + x) = 0;$$

$$(a - 2x - 6)(a + x) = 0.$$



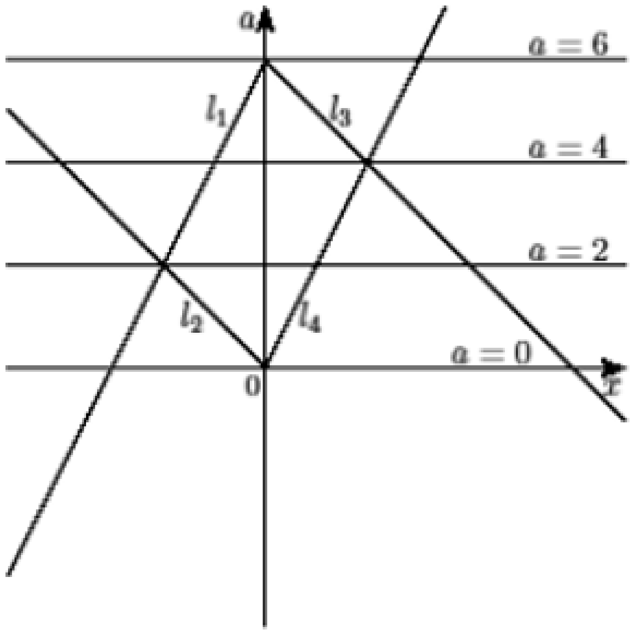

Получившееся уравнение задаёт на плоскости $Oxa$ пару лучей: луч $l_1$ с началом в точке $(0; 6)$, совпадающий с прямой $a = 2x + 6$ при $x \le 0$, и луч $l_2$ с началом в точке $(0; 0)$, совпадающий с прямой $a = -x$ при $x \le 0$. Лучи $l_1$ и $l_2$ пересекаются в точке $(-2; 2)$.

При $x \ge 0$ уравнение $a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x + 9|x| = 0$ принимает вид:

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x + 9x = 0;\ a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 12x = 0;$$

$$(a-2x)(a+x)-6(a-2x)=0;\ (a-2x)(a+x-6)=0.$$

Получившееся уравнение задаёт на плоскости $Oxa$ пару лучей: луч $l_3$ с началом в точке $(0;6)$, совпадающий с прямой $a=6-x$ при $x\geq 0$, и луч $l_4$ с началом в точке $(0;0)$, совпадающий с прямой $a=2x$ при $x\geq 0$. Лучи $l_3$ и $l_4$ пересекаются в точке $(2;4)$.




Число корней исходного уравнения равно числу точек пересечения прямой $a=c$ с объединением лучей $l_1$, $l_2$, $l_3$ и $l_4$.

Каждый из лучей $l_1$ и $l_3$ пересекается с прямой $a=c$ в одной точке при $c\leq 6$ и не пересекается при $c>6$.

Каждый из лучей $l_2$ и $l_4$ пересекается с прямой $a=c$ в одной точке при $c\geq 0$ и не пересекается при $c<0$.

Следовательно, при $a<0$ и $a>6$ исходное уравнение имеет два различных корня.

При $c=0$, $c=2$, $c=4$ и $c=6$ прямая $a=c$ проходит через общую точку лучей $l_2$ и $l_4$, $l_1$ и $l_2$, $l_3$ и $l_4$, $l_1$ и $l_3$ соответственно.

Следовательно, при $a=0$, $a=2$, $a=4$ и $a=6$ исходное уравнение имеет ровно три корня, а при $0<a<2$, $2<a<4$ и $4<a<6$ имеет четыре различных корня.

Ответ: $0<a<2$; $2<a<4$; $4<a<6$.

**18** Есть три коробки: в первой коробке 97 камней, во второй — 104, а в третьей коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых двух коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

а) Могло ли в первой коробке оказаться 97 камней, во второй — 89, а в третьей — 15?

б) Мог ли в третьей коробке оказаться 201 камень?

в) В первой коробке оказался 1 камень. Какое наибольшее число камней могло оказаться в третьей коробке?

а) Пусть 10 раз из первых двух коробок переложили камни в третью. Тогда в первой коробке оказалось 87 камней, во второй — 94 камня, а в третьей — 20 камней. Если после этого 5 раз переложить камни из второй и третьей коробок в первую, то в первой коробке окажется 97 камней, во второй — 89, а в третьей — 15.

б) Если в третьей коробке оказался 201 камень, то в первой и во второй коробках не осталось камней.

Пусть в какой-то момент в коробках оказалось $a$, $b$ и $c$ камней соответственно. Тогда после одного хода в коробках могло оказаться либо $a-1$, $b-1$ и $c+2$ камня, либо $a-1$, $b+2$ и $c-1$ камень, либо $a+2$, $b-1$ и $c-1$ камень соответственно. Заметим, что разность между числами камней во второй и в первой коробках либо не изменилась, либо изменилась на 3. Сначала разность чисел камней во второй и в первой коробках равнялась 7. Следовательно, ни в какой момент она не могла стать равной 0. Значит, в этих двух коробках всегда разное число камней. Следовательно, в третьей коробке не мог оказаться 201 камень.

в) В любой момент разность чисел камней во второй и в первой коробках равна $3k+7$, где $k$ — целое число. Следовательно, если в первой коробке 1 камень, то во второй коробке $3k+8$ камней. Значит, во второй коробке оказалось не меньше 2 камней, а в третьей коробке не больше 198 камней.
Покажем, как в третьей коробке могло оказаться 198 камней. Пусть 97 раз из первых двух коробок переложили камни в третью. Тогда в первой коробке оказалось 0 камней, во второй — 7 камней, а в третьей — 194 камня. Если после этого 2 раза переложить камни из второй и третьей коробок в первую, то в первой коробке окажется 4 камня, во второй — 5, а в третьей — 192. Если после этого 3 раза переложить камни из первых двух коробок в третью, то в первой коробке окажется 1 камень, во второй — 2 камня, а в третьей — 198 камней.
Ответ: а) да; б) нет; в) 198.

а) Решите уравнение

$$2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) $-\frac{7\pi}{6}$.

а) $2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0$, $\log_4(4\sin x)=t$,

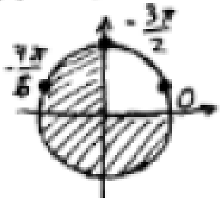
$2t^2-5t+2=0$; $D=25-16=9=3^2$, $t_1=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$; $t_2=\frac{5+3}{4}=1$;

$\log_4(4\sin x)=t_1=\frac{1}{2}$; $\log_4(4\sin x)=\log_4 2$, $4\sin x=2$; $\sin x=\frac{1}{2}$;

$x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$; $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$;

$\log_4(4\sin x)=t_2=1$; $\log_4(4\sin x)=\log_4 4$; $4\sin x=4$; $\sin x=1$;

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$ Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$

б) 


Ответ: $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{6}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**? баллов**

а) Решите уравнение

$$2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z};$

б) $-\frac{7\pi}{6}$.

а) $2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0,\quad \log_4(4\sin x)=t,$

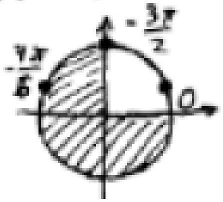
$2t^2-5t+2=0;\ D=25-16=9=3^2,\ t_1=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2};\ t_2=\frac{5+3}{4}=1;$

$\log_4(4\sin x)=t_1=\frac{1}{2};\ \log_4(4\sin x)=\log_4 2,\ 4\sin x=2;\ \sin x=\frac{1}{2};$

$x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z;\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z;$

$\log_4(4\sin x)=t_2=1;\ \log_4(4\sin x)=\log_4 4;\ 4\sin x=4;\ \sin x=1;$

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$ Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$

б) 

Ответ: $-\frac{3\pi}{2},\ -\frac{7\pi}{6}.$

**1 балл**

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

2

а) Решите уравнение

$$2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z};$

б) $-\frac{7\pi}{6}$.

13) а) ОДЗ: $4\sin x > 0$

$\sin x > 0$

Для таких $x$ решим методом интервалов

Пусть $\log_4(4\sin x) = t$ ; $t \geq 0$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

$D = 25 - 4\cdot 2\cdot 2$

$D = 25 - 16$

$D = 9$

$t_1 = \frac{5+3}{2}$ $t_1 = 4$

$t_2 = \frac{5-3}{2}$ $t_2 = 1$

Обратная замена

$\log_4(4\sin x) = 1$ или $\log_4(4\sin x) = 4$

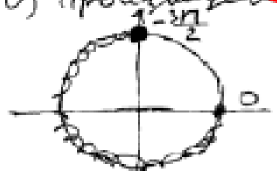
$4\sin x = 4$ $4\sin x = 256$

$\sin x = 1$ $\sin x = 64$

нет решений.

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n\in Z$

б) Произведём отбор по единичной окружности




$-\frac{3\pi}{2}$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ n\in Z$ б) $-\frac{3\pi}{2}$

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**? баллов**

**Отбор корней с помощью тригонометрической окружности:**

- указание начала и конца дуги,
- выделение рассматриваемой дуги,
- указание корней, принадлежащих этой дуге,
- при этом на дуге могут быть отмечены дополнительные точки, принадлежащие данной дуге.

# Пример 1. Работа 2

а) Решите уравнение

$$2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z};$

б) $-\frac{7\pi}{6}$.

13) а) ОДЗ: $4\sin x > 0$
$\sin x > 0$

Для таких $x$ решим методом интервалов

Пусть $\log_4(4\sin x) = t$ ; $t \geq 0$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

$D = 25 - 4\cdot 2\cdot 2$

$D = 25 - 16$

$D = 9$

$t_1 = \frac{5+3}{2}$ $\quad t_1 = 4$

$t_2 = \frac{5-3}{2}$ $\quad t_2 = 1$

Обратная замена

$\log_4(4\sin x) = 1$ или $\log_4(4\sin x) = 4$

$4\sin x = 4$ $\quad$ $4\sin x = 256$

$\sin x = 1$ $\quad$ $\sin x = 64$ нет решений.

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

б) Произведём отбор по единичной окружности


$-\frac{3\pi}{2}$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $-\frac{3\pi}{2}$

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**0 баллов**

**Отбор корней с помощью тригонометрической окружности:**

- указание начала и конца дуги,
- выделение рассматриваемой дуги,
- указание корней, принадлежащих этой дуге,
- при этом на дуге могут быть отмечены дополнительные точки, принадлежащие данной дуге.

а) Решите уравнение

$$2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z};$

б) $-\frac{7\pi}{6}$.

$2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$ $\qquad t = \log_4(4\sin x)$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$ $\qquad D = 25 - 16 = 9$

$t = \frac{5 \pm 3}{4}$

$t_1 = 2 \qquad t_2 = \frac{1}{2}$

$\log_4(4\sin x) = 2$

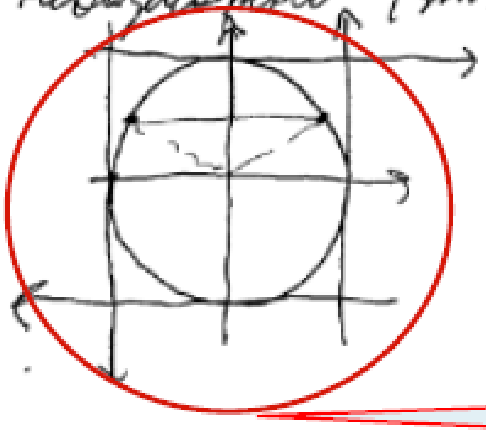
$4\sin x = 16$

$\sin x = 4$ $\quad$ – невозможно $(\sin x \in [-1; 1])$

$\log_4(4\sin x) = \frac{1}{2}$

$4\sin x = 2$

$\sin x = \frac{1}{2}$



а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $\left\{-\frac{7\pi}{6}\right\}$

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**? баллов**

**Отбор корней с помощью тригонометрической окружности:**

- указание начала и конца дуги,
- выделение рассматриваемой дуги,
- указание корней, принадлежащих этой дуге,
- при этом на дуге могут быть отмечены дополнительные точки, принадлежащие данной дуге.

а) Решите уравнение

$$2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z};$

б) $-\frac{7\pi}{6}$.

$2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0$ $\quad t=\log_4(4\sin x)$

$2t^2-5t+2=0$

$D=25-16=9$

$t=\frac{5\pm3}{4}$

$t_1=2 \quad t_2=\frac{1}{2}$

$\log_4(4\sin x)=2$

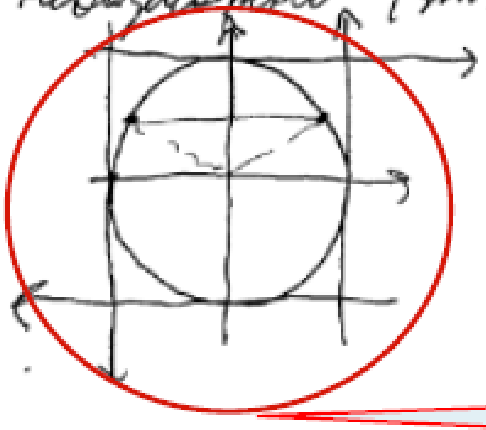
$4\sin x=16$

$\sin x=4$ — невозможно $(\sin x\in[-1;1])$

$\log_4(4\sin x)=\frac{1}{2}$

$4\sin x=2$

$\sin x=\frac{1}{2}$



а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$

$\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$

б) $\left\{-\frac{7\pi}{6}\right\}$

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**1 балл**

**Отбор корней с помощью тригонометрической окружности:**

- указание начала и конца дуги,
- выделение рассматриваемой дуги,
- указание корней, принадлежащих этой дуге,
- при этом на дуге могут быть отмечены дополнительные точки, принадлежащие данной дуге.

Решите неравенство $\dfrac{9^x-2\cdot3^{x+1}+4}{3^x-5}+\dfrac{2\cdot3^{x+1}-51}{3^x-9}\le 3^x+5.$

Ответ: $(-\infty;1];\ (\log_3 5;2)$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1,<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

$$\frac{9^x-2\cdot3^{x+1}+4}{3^x-5}+\frac{2\cdot3^{x+1}-51}{3^x-9}\le 3^x+5$$

$$\frac{(3^{2x}-2\cdot3\cdot3^x+4)(3^x-9)+(2\cdot3\cdot3^x-51)(3^x-5)-(3^x-5)(3^x+5)(3^x-9)}{(3^x-5)(3^x-9)}\le0$$

$$\frac{3^{3x}-6\cdot3^{2x}+4\cdot3^x-9\cdot3^{2x}+54\cdot3^x-36+6\cdot3^{2x}-51\cdot3^x-30\cdot3^x+255-(3^{2x}-25)(3^x-9)}{(3^x-3^{\log_3 5})(3^x-3^2)}\le0$$

знаки $(3^x-3^{\log_3 5})$ и $(3^x-3^2)$ совпадает со знаками $(x-\log_3 5)$ и $(x-2)$ соответственно

$$\frac{\cancel{3^{3x}}-\cancel{9\cdot3^{2x}}-23\cdot3^x+219-\cancel{3^{3x}}+\cancel{9\cdot3^{2x}}+25\cdot3^x-225}{(x-\log_3 5)(x-2)}\le0$$

$\dfrac{2\cdot3^x-6}{(x-\log_3 5)(x-2)}\le0\ \Big|:2;$ $\quad\dfrac{3^x-3^1}{(x-\log_3 5)(x-2)}\le0$ $\quad$ знак $(3^x-3^1)$ совпадает со знаком $(x-1)$

$\dfrac{x-1}{(x-\log_3 5)(x-2)}\le0$


$1<\log_3 5<2$ $\quad\Rightarrow x\in\{-\infty;1]\cup(\log_3 5;2)$

Ответ: $\{-\infty;1]\cup(\log_3 5;2)$

**? баллов**

Решите неравенство $\dfrac{9^x-2\cdot 3^{x+1}+4}{3^x-5}+\dfrac{2\cdot 3^{x+1}-51}{3^x-9}\le 3^x+5.$

Ответ: $(-\infty;1]$; $(\log_3 5;2)$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1,<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

$$\frac{9^x-2\cdot 3^{x+1}+4}{3^x-5}+\frac{2\cdot 3^{x+1}-51}{3^x-9}\le 3^x+5$$

$$\frac{(3^{2x}-2\cdot 3\cdot 3^x+4)(3^x-9)+(2\cdot 3\cdot 3^x-51)(3^x-5)-(3^x-5)(3^x+5)(3^x-5)}{(3^x-5)(3^x-9)}\le 0$$

$$\frac{3^{3x}-6\cdot 3^{2x}+4\cdot 3^x-9\cdot 3^{2x}+54\cdot 3^x-36+6\cdot 3^{2x}-51\cdot 3^x-30\cdot 3^x+255-(3^{2x}-25)(3^x-5)}{(3^x-3^{\log_3 5})(3^x-3^2)}\le 0$$

знаки $(3^x-3^{\log_3 5})$ и $(3^x-3^2)$ совпадает со знаками $(x-\log_3 5)$ и $(x-2)$ соответственно

$$\frac{\cancel{3^{3x}}-9\cdot 3^{2x}-23\cdot 3^x+219-\cancel{3^{3x}}+\cancel{9\cdot 3^{2x}}+25\cdot 3^x-225}{(x-\log_3 5)(x-2)}\le 0$$

$$\frac{2\cdot 3^x-6}{(x-\log_3 5)(x-2)}\le 0 \,\Big|:2; \quad \frac{3^x-3^1}{(x-\log_3 5)(x-2)}\le 0$$

знак $(3^x-3^1)$ совпадает со знаком $(x-1)$

$$\frac{x-1}{(x-\log_3 5)(x-2)}\le 0$$


$1<\log_3 5<2$ $\Rightarrow x\in\{-\infty;1]\cup(\log_3 5;2)$

Ответ: $\{-\infty;1]\cup(\log_3 5;2)$

**2 балла**

| месяц | сумма долга 1-го числа (млн р) | сумма долга (млн) 15-го числа | сумма выплат |
|---|---|---|---|
| 1 | | 1 млн | |
| 2 | $1+1\cdot r$ | $0,9$ | $1+1r-0,9$ |
| 3 | $0,9+0,9\cdot r$ | $0,8$ | $0,9+0,9-0,8$ |
| 4 | $0,8+0,8r$ | $0,7$ | $0,8+0,8r-0,7$ |
| 5 | $0,7+0,7\cdot r$ | $0,6$ | $0,7+0,7r-0,6$ |
| 6 | $0,6+0,6r$ | $0,5$ | $0,6+0,6r-0,5$ |
| 7 | $0,5+0,5r$ | $0$ | $0,5+0,5r$ |

тогда общая сумма выплат:

$$1+1\cdot r-\cancel{0,9}+\cancel{0,9}+0,9r-\cancel{0,8}+\cancel{0,8}+0,8r-\cancel{0,7}+\cancel{0,7}+0,7r-$$
$$-\cancel{0,6}+\cancel{0,6}+0,6r-\cancel{0,5}+\cancel{0,5}+0,5r=$$
$$=1+r+0,9r+0,8r+0,7r+0,6r+0,5r=1+4,5r$$

Общая сумма выплат должна быть больше 1,2 млн =>

$$\Rightarrow \quad 1+4,5r>1,2$$
$$4,5r>0,2$$
$$r>2,25$$

т.к. $r$ - целое число, то наименьшее $r=3$.

Ответ: $r$ наименьшее $=3$

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на $r$ процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где $r$ — **целое** число;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

| Дата | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Долг (в млн рублей) | 1 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0 |

Найдите наименьшее значение $r$, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

Ответ: 5.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно построена математическая модель | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**0 баллов**

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на $r$ процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где $r$ — **целое** число;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

| Дата | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Долг (в млн рублей) | 1 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0 |

Найдите наименьшее значение $r$, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

Ответ: 5.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно построена математическая модель | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

Дано:

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6>1{,}2$ млн, где $x$ – выплата

$N=1$ – сумма кредита

$r_{min}$ – ?, где $r$ – %  $r\in Z$

$x_1=N+\frac{rN}{100}-0{,}9$; $x_2=0{,}9+\frac{r\cdot 0{,}9}{100}-0{,}8$; $x_3=0{,}8+\frac{r\cdot 0{,}8}{100}-0{,}7$;

$x_4=0{,}7+\frac{r\cdot 0{,}7}{100}-0{,}6$; $x_5=0{,}6+\frac{r\cdot 0{,}6}{100}-0{,}5$; $x_6=0{,}5+\frac{r\cdot 0{,}5}{100}$

$1+\frac{r}{100}-0{,}9+0{,}9+\frac{r\cdot 0{,}9}{100}-0{,}8+0{,}8+\frac{r\cdot 0{,}8}{100}-0{,}7+0{,}7+\frac{r\cdot 0{,}7}{100}-0{,}6+0{,}6+$

$+\frac{r\cdot 0{,}6}{100}-0{,}5+0{,}5+\frac{r\cdot 0{,}5}{100}>1{,}2$

**? баллов**

$1+\frac{3{,}5r}{100}>1{,}2$

$\frac{3{,}5r}{100}>0{,}2$

$r>\frac{20}{3{,}5}$

$r_{min}=5\%$

Ответ: $r=5\%$

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на $r$ процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где $r$ — **целое** число;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

| Дата | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Долг (в млн рублей) | 1 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0 |

Найдите наименьшее значение $r$, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

Ответ: 5.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно построена математическая модель | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

Дано:

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 > 1{,}2$ млн, где $x$ - выплата

$N = 1$ - сумма кредита

$r_{min}$ - ?, где $r$ - %  $r \in Z$

$X_1 = N + \frac{rN}{100} - 0{,}9$; $X_2 = 0{,}9 + \frac{r \cdot 0{,}9}{100} - 0{,}8$; $X_3 = 0{,}8 + \frac{r \cdot 0{,}8}{100} - 0{,}7$;

$X_4 = 0{,}7 + \frac{r \cdot 0{,}7}{100} - 0{,}6$; $X_5 = 0{,}6 + \frac{r \cdot 0{,}6}{100} - 0{,}5$; $X_6 = 0{,}5 + \frac{r \cdot 0{,}5}{100}$

$1 + \frac{r}{100} - 0{,}9 + 0{,}9 + \frac{r \cdot 0{,}9}{100} - 0{,}8 + 0{,}8 + \frac{r \cdot 0{,}8}{100} - 0{,}7 + 0{,}7 + \frac{r \cdot 0{,}7}{100} - 0{,}6 + 0{,}6 +$

$+ \frac{r \cdot 0{,}6}{100} - 0{,}5 + 0{,}5 + \frac{r \cdot 0{,}5}{100} > 1{,}2$

$1 + \frac{3{,}5r}{100} > 1{,}2$

$\frac{3{,}5r}{100} > 0{,}2$

$r > \frac{20}{3{,}5}$

$r_{min} = 5\%$

Ответ: $r = 5\%$

**1 балл**

**18** Есть три коробки: в первой коробке 97 камней, во второй — 104, а в третьей коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых двух коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

а) Могло ли в первой коробке оказаться 97 камней, во второй — 89, а в третьей — 15?

б) Мог ли в третьей коробке оказаться 201 камень?

в) В первой коробке оказался 1 камень. Какое наибольшее число камней могло оказаться в третьей коробке?

№18

а) Да при выполнении следующего алгоритма в 2 этапа

64 77 0 Алгоритм предполагает перекладывание 1) из 2 в 3,

63 76 2 из 1 в 3 2) из 2 в 3, из 3 в 1.

64 75 2

63 74 4

....

64 61 16

63 60 18

64 59 18

б) Нет, т.к общее число камней равно 141, что мешает выполнить задание, т.к по условию перекладывают 2 камня из разных коробок. Число 141 нечетное ⇒ невозможно разложить в 2 коробки поровну. В любом случае 1 камень останется в любой из 2 других коробок.

**Демоверсия 2023 часть с развернутым ответом БЕЗ ИЗМЕНЕНИЙ**