РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СВОЙСТВ ВХОДЯЩИХ В НИХ ФУНКЦИЙ

Старший преподаватель

кафедры математики, информатики

и технологического образования ГБОУ ИРО

Краснодарского края

Власова Александра Анатольевна

Использование понятия области определения функции

Областью определения функции $y = f(x)$ называется множество значений переменной x, при которых функция имеет смысл.

Пусть дано уравнение $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — элементарные функции, определенные на множествах D_1, D_2. Тогда ***областью D допустимых значений*** уравнения будет множество, состоящее из тех значений x, которые принадлежат обоим множествам, то есть $D = D_1 \cap D_2$. Ясно, что когда множество D пустое ($D = \varnothing$), то уравнение решений не имеет.

Пример $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-3}=5.$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} 1-x \geq 0, \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow$ решений нет.

Пример $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}=x^2-1.$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x-1\ge 0, \\ 1-x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow x=1.$

ОДЗ состоит из одной точки $x = 1$. Остается проверить, является ли $x = 1$ корнем уравнения. $x=1\Rightarrow\sqrt{1-1}+\sqrt{1-1}=1-1,\ 0 = 0$. Верно.

Ответ: 1.

Пример $|x| + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1.$

Решение. 1. Область определения левой части: $|x| \geq 1$.

2. Для любого x из области определения выполняется неравенство $|x| + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1.$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Пример $\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}+x>4.$

Решение. 1. Область определения левой части: $|x|>3$.

2. При $x<-3$ левая часть неравенства отрицательна.

3. Для любого $x>3$ выполняется неравенство $\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}=\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2-9}}>1$

То есть $\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}+x>4.$

Ответ: $x\in(3;+\infty)$.

Использование понятия области значений функции

Областью значений функции $y = f(x)$ называется множество значений переменной y при допустимых значениях переменной x.

Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной на данном промежутке*** (содержащемся в области ее определения), если существует такое число $N > 0$, что при всех значениях аргумента, принадлежащих данному промежутку, имеет место неравенство $|f(x)| < N$.

Использование свойства ограниченности.

Теорема 1. Если для любого $x \in X$ выполняются неравенства $f(x) \leq A$, $g(x) \geq A$, то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

Иными словами, если $\max\limits_{x \in X} f(x) = \min\limits_{x \in X} g(x) = A$, то уравнение $f(x) = g(x)$ на множестве X равносильно системе $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

Теорема 2. Пусть требуется решить уравнение $f(x;y) = \varphi(x;y)$, *где* $(x;y) \in D$. Если на D выполняются неравенства $f(x;y) \leq A$, $\varphi(x;y) \geq A$, то на множестве D уравнение $f(x;y) = \varphi(x;y)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x;y) = A, \\ \varphi(x;y) = A. \end{cases}$$

Пример $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=2.$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x \ge 0, \\ x+9 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0.$ $\sqrt{x}+\sqrt{x+9} \ge 3 \Rightarrow$ решений нет.

Пример $\left(\frac{4}{3}\right)^x = -2x^2 + 6x - 9.$

Решение. Область допустимых значений уравнения есть множество всех действительных чисел. Показательная функция

$f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$ принимает только положительные значения, а функция

$g(x) = -2x^2 + 6x - 9$ — только отрицательные значения. Множества значений этих функций не имеют общих элементов, и, следовательно, уравнение решений не имеет.

Пример $\frac{3}{\pi}\arccos(x-1)=3+\sqrt{x^4-4x^3+4x^2}$.

Решение. По определению, $0 \le \arccos(x-1) \le \pi$ для допустимых

значений x, следовательно, $0 \le \frac{3}{\pi}\arccos(x-1) \le 3$.

$3+\sqrt{x^4-4x^3+4x^2} \ge 3$ для допустимых значений x.

Равенство достигается, если $\begin{cases} \frac{3}{\pi}\arccos(x-1)=3, \\ 3+\sqrt{x^4-4x^3+4x^2}=3. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы:

$$\arccos(x-1)=\pi,\ x-1=-1,\ x=0.$$

При $x=0$ второе уравнение обращается в верное числовое равенство.

Следовательно, решением системы и уравнения является $x=0$.

Ответ: 0.

Пример $\cos 2\pi x = x^2 - 8x + 17.$

Решение. $\cos 2\pi x = (x-4)^2 + 1$. $-1 \le \cos 2\pi x \le 1$, $(x-4)^2 + 1 \ge 1$.

Следовательно, равенство достигается, если $\begin{cases} \cos 2\pi x = 1, \\ (x-4)^2 + 1 = 1. \end{cases}$

Решая второе уравнение системы, получаем $x = 4$. Подстановкой убеждаемся, что найденный корень является решением и первого уравнения системы. Следовательно, $x = 4$ — решение системы.

Ответ: 4.

Пример $3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2}=5+4\sin 2\pi x.$

Решение. Оценим левую и правую части уравнения.

1. $\left|x-\frac{1}{4}\right|+2\geq 2\Rightarrow 3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2}\geq 9.$

2. $-1\leq \sin 2\pi x\leq 1 \Rightarrow -4\leq 4\sin 2\pi x\leq 4 \Rightarrow 1\leq 5+4\sin 2\pi x\leq 9.$

3. Следовательно, равенство достигается, если $\begin{cases} 3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2}=9, \\ 5+4\sin 2\pi x=9. \end{cases}$

4. Из первого уравнения системы находим $x=\frac{1}{4}$. Подстановкой убеждаемся, что найденный корень является решением и второго уравнения системы. Следовательно, $x=\frac{1}{4}$ – решение системы и корень исходного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример $2^{x^2-4x+5}=1+\sin^2\frac{\pi x}{4}.$

Оценим левую и правую части уравнения.

1. $x^2-4x+5=(x-2)^2+1\geq 1\Rightarrow 2^{(x-2)^2+1}\geq 2.$

2. $0\leq\sin^2\frac{\pi x}{4}\leq 1\Rightarrow 1\leq 1+\sin^2\frac{\pi x}{4}\leq 2.$

3. Следовательно, равенство достигается, если $\begin{cases}2^{(x-2)^2+1}=2,\\ 1+\sin^2\frac{\pi x}{4}=2.\end{cases}$

4. Из первого уравнения системы находим $x = 2$. Подстановкой убеждаемся, что найденный корень является решением и второго уравнения системы. Следовательно, $x = 2$ – решение системы и корень исходного уравнения.

Ответ: 2.

Использование свойства монотонности функции

Функция $f(x)$ называется ***возрастающей (убывающей)*** на данном числовом промежутке X, если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует большее (меньшее) значение функции $f(x)$, то есть для любых x_1 и x_2 из промежутка X таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$).

Функция, только возрастающая или только убывающая на данном числовом промежутке, называется ***монотонной*** на этом промежутке.

Теорема 1. Монотонная на промежутке X функция каждое свое значение принимает лишь при одном значении аргумента из этого промежутка.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X и функция $g(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X, то функция $h(x) = f(x) + g(x) + C$ также возрастает (убывает) на промежутке X (C — произвольная постоянная).

Теорема 3. Если функция $f(x)$ неотрицательна и возрастает (убывает) на промежутке X, функция $g(x)$ неотрицательна и возрастает (убывает) на промежутке X, $C > 0$, то функция $h(x) = C \cdot f(x) \cdot g(x)$ также возрастает (убывает) на промежутке X.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X, то функция $-f(x)$ убывает (возрастает) на этом промежутке.

Теорема 5. Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке X и сохраняет на этом множестве знак, то функция $\frac{1}{f(x)}$ на промежутке X имеет противоположный характер монотонности.

Теорема 6. Если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ возрастающие или обе убывающие, то функция $h(x) = f(g(x))$ — возрастающая функция. Если одна из функций возрастающая, а другая убывающая, то $h(x) = f(g(x))$ — убывающая функция.

Использование свойства монотонности.

Теорема 1. Если на промежутке X одна из функций y=f (x), y=g (x) убывает, а другая возрастает, то на этом промежутке X уравнение f (x) = g (x) имеет *не более одного корня*, то есть либо имеет только один корень (рис. 1), либо вообще не имеет корней (рис. 2)

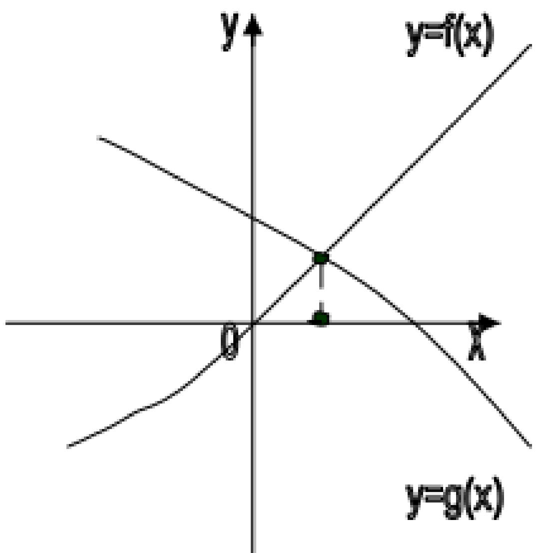

рис.1

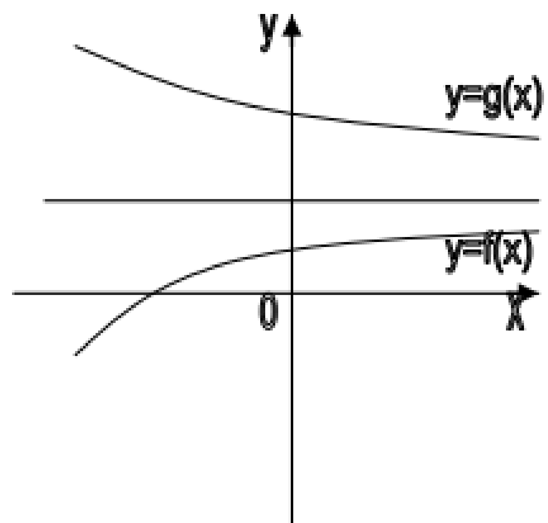

рис.2

Теорема 2. Если на промежутке X функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), то на этом промежутке X уравнение $f(x) = C$, где $C = \mathrm{const}$, имеет *не более одного корня*, то есть либо имеет только один корень (рис.3), либо вообще не имеет корней (рис.4).

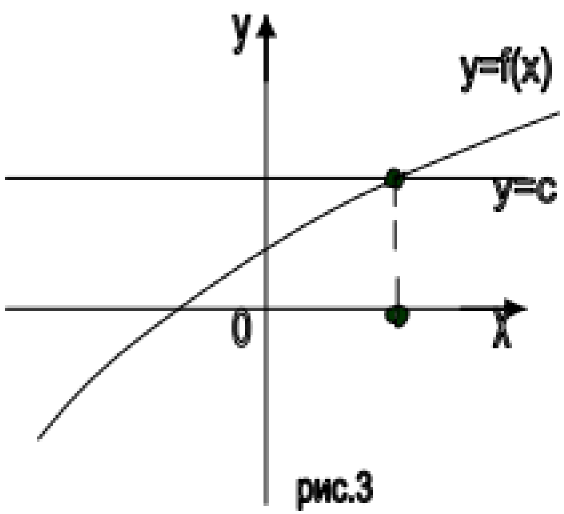

рис.3

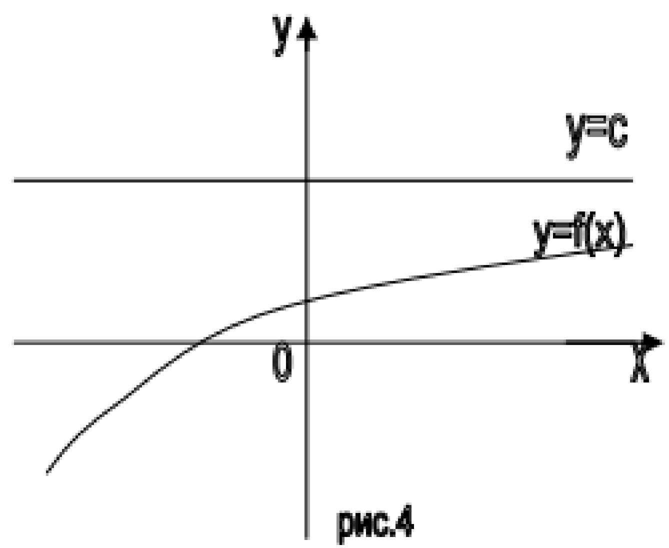

рис.4

Пример $3^x + 4^x = 5^x$.

Решение. Преобразуем: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$. Левая часть уравнения является убывающей функцией. Следовательно, она может принимать значение 1 не более чем в одной точке (теорема 7). Подбором находим, что $x = 2$.

Ответ: 2.

Пример $\arcsin x = \frac{\pi}{3} \cdot (1 - x).$

Решение. 1. Функция $f(x) = \arcsin x$ возрастает на $[-1; 1]$; функция $g(x) = \frac{\pi}{3}(1 - x)$ убывает на этом отрезке.

2. Подбором находим, что $x = 0,5$.

3. В силу справедливости теоремы 10 утверждаем, что $x = 0,5$ единственный корень уравнения.

Ответ: 0,5.

Пример $\log_2(8 - x) \le 3x - 10.$

Решение. 1. ОДЗ: $x < 8$.

2. При $x = 4$ левая и правая части равны.

3. Так как левая часть — убывающая функция, а правая — возрастающая, то неравенству удовлетворяют $x \ge 4$.

4. С учетом ОДЗ имеем: $4 \le x < 8$.

Ответ: $x \in [4; 8)$.

Использование свойств четности или нечетности функций

Функция $f(x)$ называется ***четной***, если для любого значения x, взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $f(x)$ называется ***нечетной***, если для любого значения x, взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Теорема 1. Сумма, разность, произведение и частное двух четных функций являются четными функциями.

Теорема 2. Произведение и частное двух нечетных функций представляют собой четные функции.

Пусть имеем уравнение или неравенство $F(x) = 0$, $F(x) > 0$ ($F(x) < 0$), где $F(x)$ — четная или нечетная функция.

а) Чтобы решить уравнение $F(x) = 0$, где $F(x)$ — четная или нечетная функция, достаточно найти положительные (или отрицательные) корни, после чего записываются отрицательные (или положительные) корни, симметричные полученным, и для нечетной функции корнем будет $x = 0$, если это значение входит в область определения $F(x)$. Для четной функции значение $x = 0$ проверяется непосредственной подстановкой в уравнение.

Может ли при каком-нибудь значении а уравнение

$2x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2 = 5$ иметь 5 корней?

Решение. Обозначим f(x) $= 2x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2 = 5$. f(x) – функция четная, поэтому, если x_0 – корень данного уравнения, то - x_0 – тоже. x = 0 не является корнем данного уравнения (0 ≠ 5). Следовательно, число корней у этого уравнения при любом действительном a четно, поэтому 5 корней оно иметь не может.

Ответ: не может.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!