

Подготовка к профильному ЕГЭ по математике

Задача №15

Практико-ориентированные задачи с экономическим содержанием. Банковские задачи на кредит.

Разработала

Учитель математики

высшей категории

МАОУ гимназии 23

Зеленская Ирина Станиславовна

Схема с аннуитетным платежом

При аннуитетных платежах кредит выплачивается **равными частями** — размер взноса остается неизменным на протяжении всего периода кредитования.

При этом каждый год (месяц) до внесения платежа банк начисляет на оставшуюся часть долга некоторый процент, то есть оставшаяся сумма долга увеличивается на это количество процентов.

Задача 1.

31 декабря 2020 года Алексей взял в банке 6902000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Решение:

Введем обозначения:

$S=6\,902\,000$ руб. - сумма кредита

$r=12,5\%$ - годовой процент банка

b - коэффициент, на который умножается 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга

$$b = 1 + 0,01r$$

$$b = 1 + 0,01 \cdot 12,5 = 1,125 = \frac{9}{8}$$

x - сумма платежа

Рассчитаем суммы долга по годам

I год

$$S_I = bS - x$$

II год

$$S_{II} = b(bS - x) - x = b^2S - b \ x - x$$

III год

$$S_{III} = b(b^2S - b \ x - x) - x = b^3S - b^2x - b \ x - x$$

IV год

$$\begin{aligned} S_{IV} &= b(b^3S - b^2x - b \ x - x) - x \\ &= b^4S - b^3x - b^2x - bx - x \end{aligned}$$

Так как сумма кредита выплачена за 4 года, то

$$S_{IV} = 0$$

$$b^4 S - b^3 x - b^2 x - bx - x = 0$$

$$b^4 S = x(b^3 + b^2 + b + 1)$$

$$x = \frac{b^4 S}{b^3 + b^2 + b + 1} - \text{сумма платежа.}$$

Подставим исходные данные:

$$x = \frac{\left(\frac{9}{8}\right)^4 \cdot 6902000}{\left(\frac{9}{8}\right)^3 + \left(\frac{9}{8}\right)^2 + \left(\frac{9}{8}\right) + 1}$$

$$x = \frac{9^4 \cdot 6902000}{8^4 \cdot \frac{9^3 + 9^2 + 9 + 1}{8^3}}$$

$$x = \frac{9^4 \cdot 6902000}{8 \cdot 2465}$$

$$x = 2296350$$

$$x = \frac{\frac{9^4}{8^4} \cdot 6902000}{\frac{9^3}{8^3} + \frac{9^2}{8^2} + \frac{9}{8} + 1}$$

$$x = \frac{9^4 \cdot 6902000}{8(729 + 648 + 576 + 512)}$$

Ответ: Ежегодная выплата по кредиту составит 2296350 руб.

Задача 2.

31 декабря 2020 года Михаил взял в банке некоторую сумму в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Михаил переводит в банк 2 132 325 рублей. Какую сумму взял Михаил в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)?

Решение:

Введем обозначения:

S руб. – искомая сумма кредита

$r=12,5\%$ - годовой процент банка

b - коэффициент, на который умножается 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга

$$b = 1 + 0,01r$$

$$b = 1 + 0,01 \cdot 12,5 = 1,125 = \frac{9}{8}$$

$X=2\ 132\ 325$ руб. - сумма платежа

Рассчитаем суммы долга по годам

I год

$$S_I = bS - x$$

II год

$$S_{II} = b(bS - x) - x = b^2S - b \ x - x$$

III год

$$S_{III} = b(b^2S - b \ x - x) - x = b^3S - b^2x - b \ x - x$$

IV год

$$\begin{aligned} S_{IV} &= b(b^3S - b^2x - b \ x - x) - x \\ &= b^4S - b^3x - b^2x - bx - x \end{aligned}$$

Так как сумма кредита выплачена за 4 года, то

$$S_{IV} = 0$$

$$b^4 S - b^3 x - b^2 x - bx - x = 0$$

$$b^4 S = x(b^3 + b^2 + b + 1)$$

$$S = \frac{x(b^3 + b^2 + b + 1)}{b^4} - \text{искомая сумма кредита.}$$

Подставим исходные данные:

$$S = \frac{\left(\left(\frac{9}{8} \right)^3 + \left(\frac{9}{8} \right)^2 + \left(\frac{9}{8} \right) + 1 \right) \cdot 2132325}{\left(\frac{9}{8} \right)^4}$$

$$S = \frac{(9^3 + 9^2 \cdot 8 + 9 \cdot 8^2 + 8^3) \cdot 2132325 \cdot 8^4}{8^3 \cdot 9^4}$$

$$S = \frac{2465 \cdot 2132325 \cdot 8}{6561}$$

$$S = 6\,409\,000$$

Ответ: сумма кредита составит 6 409 000 руб.

Задача 3.

31 декабря 2020 года Никита взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $r\%$) затем Никита переводит очередной транш. Если бы он будет платить каждый год по 2 073 600 руб. то выплатит долг за 4 года, если по 3 513 600 руб. то за 2 года. Под какой процент Никита взял деньги в банке?

Решение:

Введем обозначения:

S руб. - сумма кредита

$r\%$ - годовой процент банка

b - коэффициент, на который умножается 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга

$$b = 1 + 0,01r$$

$x_1 = 2\,073\,600$ руб. – сумма ежегодного платежа при 4-летнем кредите.

$x_2 = 3\,513\,600$ руб. – сумма ежегодного платежа при 2-летнем кредите.

1. Пусть выплата производится четырьмя равными платежами.

Рассчитаем суммы долга по годам

I год

$$S_I = bS - x_1$$

II год

$$S_{II} = b(bS - x_1) - x_1 = b^2S - b x_1 - x_1$$

III год

$$S_{III} = b(b^2S - b x_1 - x_1) - x_1 = b^3S - b^2x_1 - b x_1 - x_1$$

IV год

$$\begin{aligned} S_{IV} &= b(b^3S - b^2x_1 - b x_1 - x_1) - x_1 \\ &= b^4S - b^3x_1 - b^2x_1 - bx_1 - x_1 \end{aligned}$$

Так как сумма кредита выплачена за 4 года, то

$$S_{IV} = 0$$

$$b^4 S - b^3 x_1 - b^2 x_1 - b x_1 - x_1 = 0$$

$$b^4 S = x_1 (b^3 + b^2 + b + 1)$$

$$S = \frac{x_1 (b^4 - 1)}{(b - 1)b^4}$$

2. Пусть выплата производится двумя равными платежами.

Рассчитаем суммы долга по годам

I год

$$S_I = bS - x_2$$

II год

$$S_{II} = b(bS - x_2) - x_2 = b^2S - b x_2 - x_2$$

Так как сумма кредита выплачена за 2 года, то

$$S_{II} = 0$$

$$b^2S - b x_2 - x_2 = 0$$

$$b^2S = x_2(b + 1)$$

$$S = \frac{x_2(b + 1)}{b^2}$$

Приравняем значения S , найденные в обоих случаях:

$$\frac{x_1(b^4 - 1)}{(b - 1)b^4} = \frac{x_2(b + 1)}{b^2}$$

$$\frac{x_1(b^4 - 1)}{(b - 1)b^2} = \frac{x_2(b + 1)}{1}$$

$$\frac{(b^4 - 1)}{(b - 1)(b + 1)b^2} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$\frac{(b^2 - 1)(b^2 + 1)}{(b^2 - 1)b^2} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$\frac{(b^2 + 1)}{b^2} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$x_2 b^2 = x_1 (b^2 + 1)$$

$$x_2 b^2 = x_1 b^2 + x_1$$

$$b^2(x_2 - x_1) = x_1$$

$$b^2 = \frac{x_1}{(x_2 - x_1)}$$

Подставим числовые значения:

$$b^2 = \frac{2073600}{3513600 - 2073600}$$

$$b^2 = \frac{2073600}{1440000}$$

$$b^2 = 1,44$$

$$b = 1,2$$

Найдем банковский процент r :

$$1 + 0,01r = 1,2$$

$$0,01r = 0,2$$

$$r = 20\%$$

Ответ: кредит был взят под 20% годовых.

Домашнее задание

Задача 1.

31 декабря 2020 года Роман взял в банке 8599000 рублей в кредит под 14% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14%), затем Роман переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Роман выплатил долг тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

Ответ: 3 703 860 рублей

Задача 2.

31 декабря 2020 года Пётр взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $r\%$), затем Пётр переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 2 592 000 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 4 392 000 рублей, то за 2 года. Под какой процент Пётр взял деньги в банке?

Ответ: 20%

Домашнее задание

Задача 3.

Петр хочет взять в кредит 1,3 млн. рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Петр взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 320 тыс. рублей?

Ответ: 6 лет

Задача 4.

31 декабря 2020 года Максим взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $r\%$), затем Максим переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 1 640 250 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 2 936 250 рублей, то за 2 года. Под какой процент Максим взял деньги в банке?

Ответ: 12,5%

Спасибо за внимание!