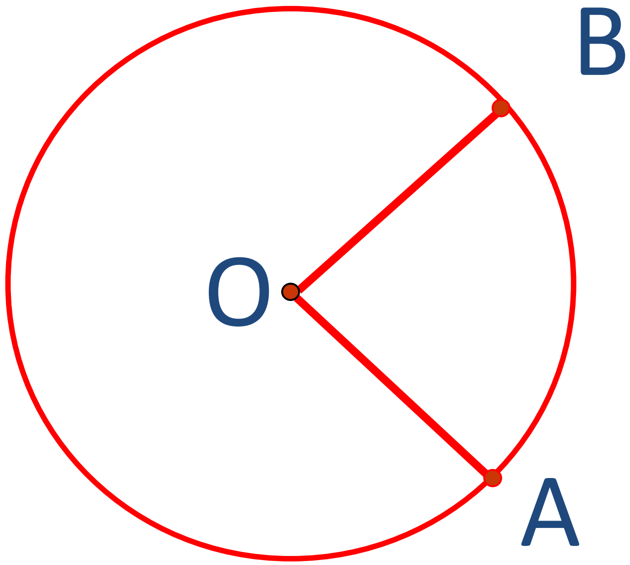
Окружность.
Задание №1
профильного ЕГЭ
по математике

Пащенко Марина Петровна,
учитель математики, МБОУ гимназия №5
Усть-Лабинский район

Центральный угол



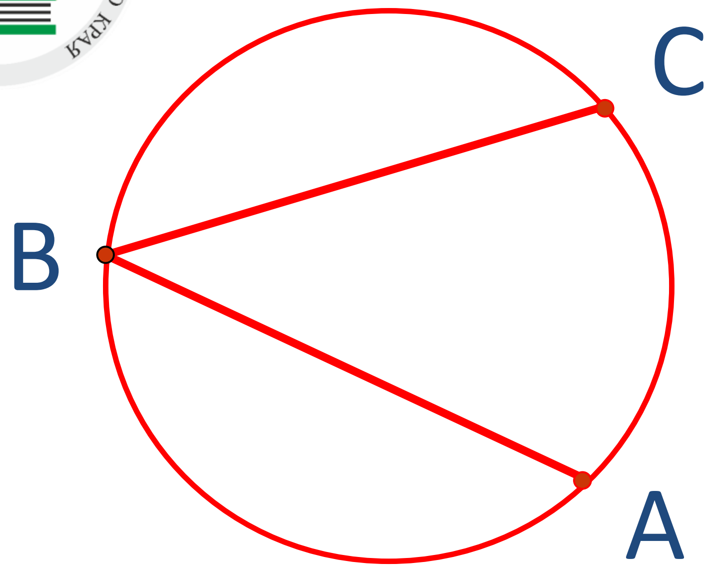
Центральным углом называется угол с вершиной в центре окружности

$\angle$ AOB - центральный

$\angle AOB = \smile AB$

- ***Центральный угол равен величине дуги, на которую он опирается***
- ***Если центральный угол развернутый, то ему соответствуют две полуокружности***
- ***Сумма градусных мер двух дуг окружности с общими концами равна 360°.***

Вписанный угол



Вписанный угол- это угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность

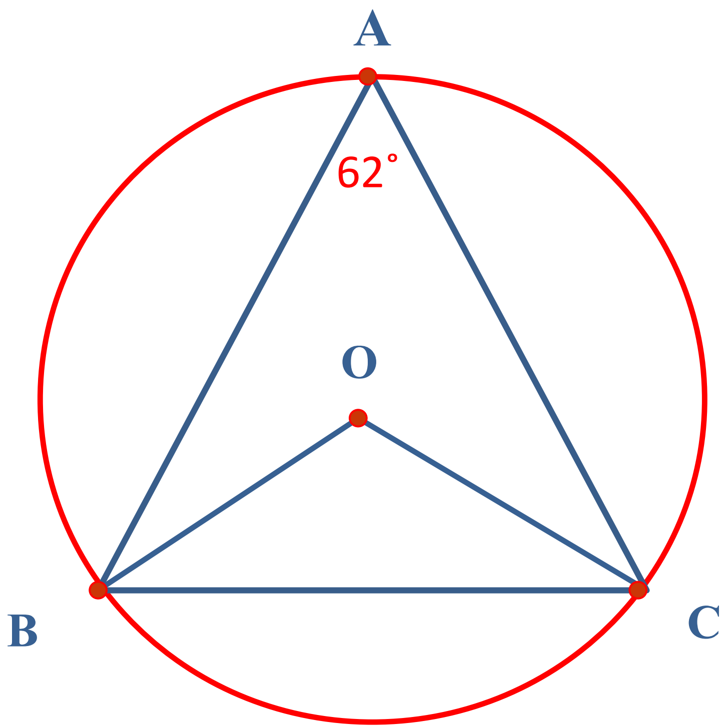
$\angle ABC$ - *вписанный угол*

- ***Вписанный угол равен половине угловой величины дуги , на которую он опирается***

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$$

№1

Треугольник *ABC* вписан в окружность с центром *O*. Найдите угол *BOC*, если угол *BAC* равен 62°.



Решение:

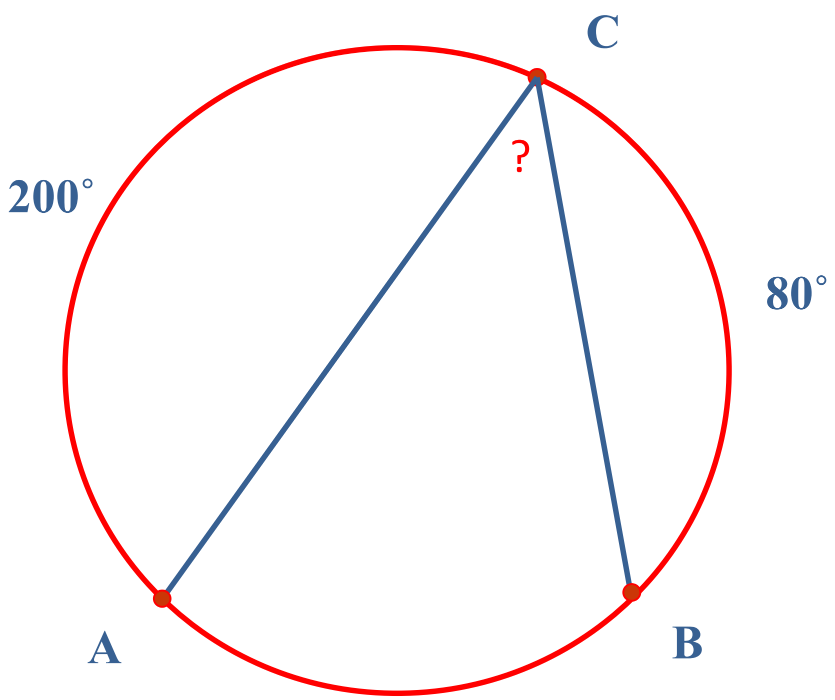
∠ BAC- вписанный угол и он равен половине центрального угла, следовательно центральный угол в 2 раза больше вписанного:

∠ BOC = 62·2=124

Ответ: 124

№ 2

Дуга окружности *AC*, не содержащая точки *B*, составляет 200°. А дуга окружности *BC*, не содержащая точки *A*, составляет 80°. Найдите вписанный угол *ACB*. Ответ дайте в градусах.



Решение:

$$\smile AB = 360^\circ - (200^\circ + 80^\circ) = 80^\circ$$

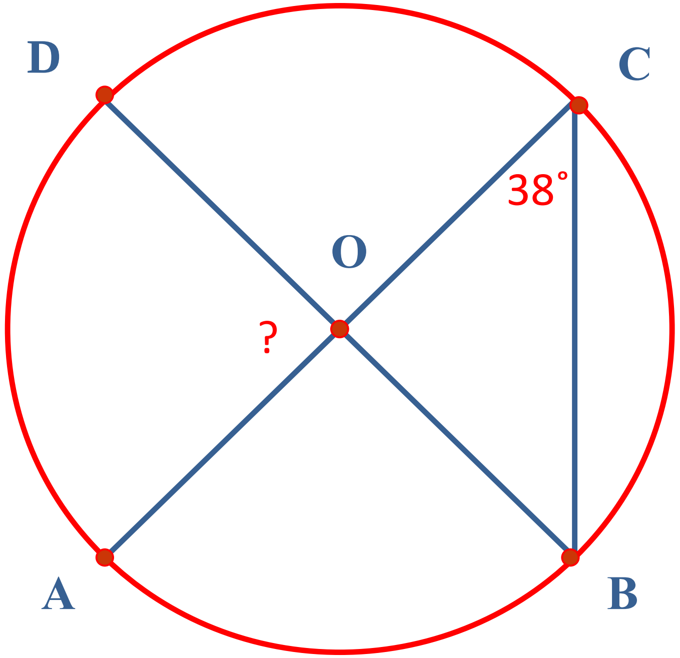
$$\angle ACB = \frac{1}{2} \smile AB = 80^\circ : 2 = 40^\circ$$

Ответ: 40

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 203-53-01, кафедра математики, информатики и технологического образования тел.: +7 (861) 203-50-52

№ 3

В окружности с центром O отрезки AC и BD — диаметры. Вписанный угол ACB равен 38°. Найдите центральный угол AOD. Ответ дайте в градусах.



Решение:

$\smile AB = 38°\cdot 2 = 76°$

$\smile AD = 180° - 76° = 104°$

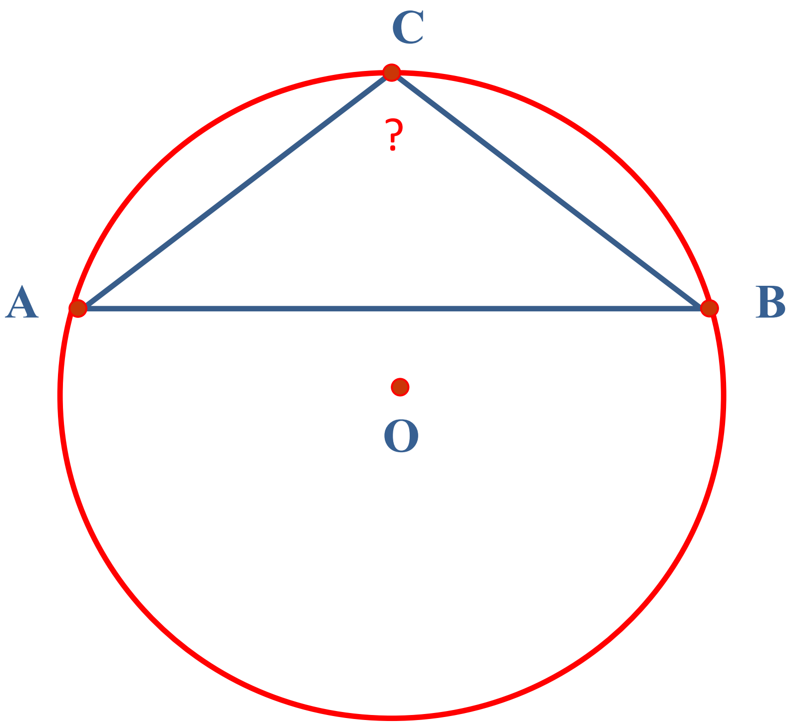
$\angle AOD = \smile AD = 104°$

Ответ: 104

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 203-53-01, кафедра математики, информатики и технологического образования тел.: +7 (861) 203-50-52

№4

Хорда *AB* делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 5:7. Под каким углом видна эта хорда из точки *C*, принадлежащей меньшей дуге окружности? Ответ дайте в градусах.



Решение:

Пусть x˚- 1 часть дуги, тогда (5x)˚- $\smile ACB$, тогда (7x)˚ - $\smile AB$.

$5x+7x=360^\circ$

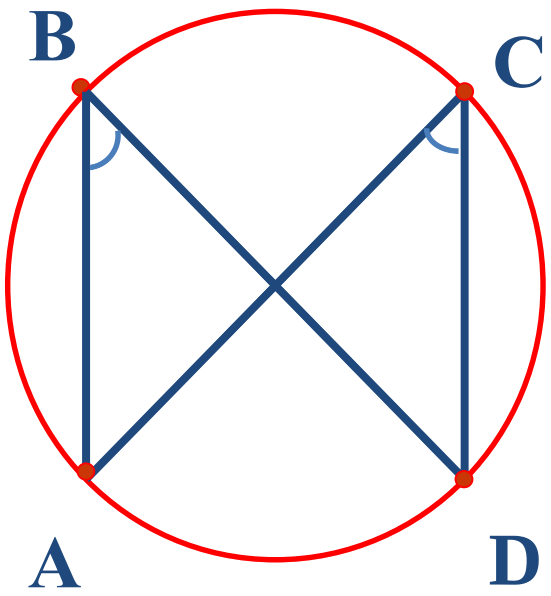
$12x = 360^\circ$

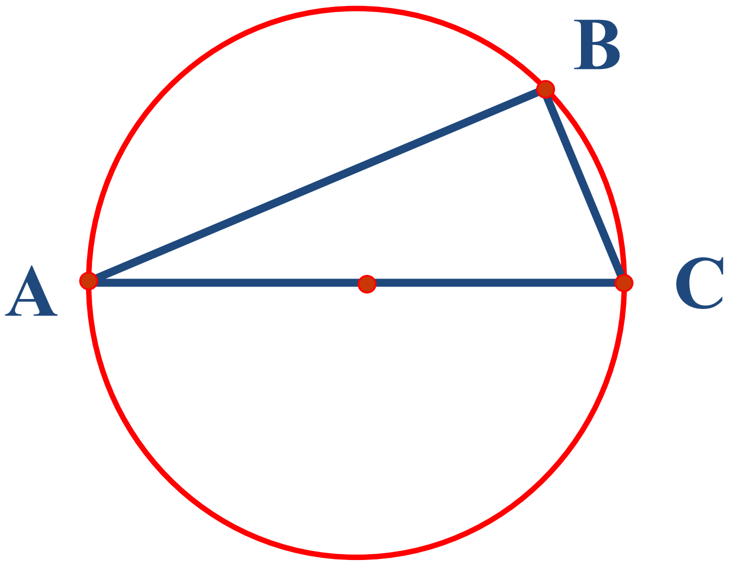
$X=30^\circ$

$\smile AB = 30^\circ\cdot 7=210^\circ$, *тогда* $\angle C = 210^\circ:2= 105^\circ$

Ответ: 1 0 5

Центральные и вписанные углы

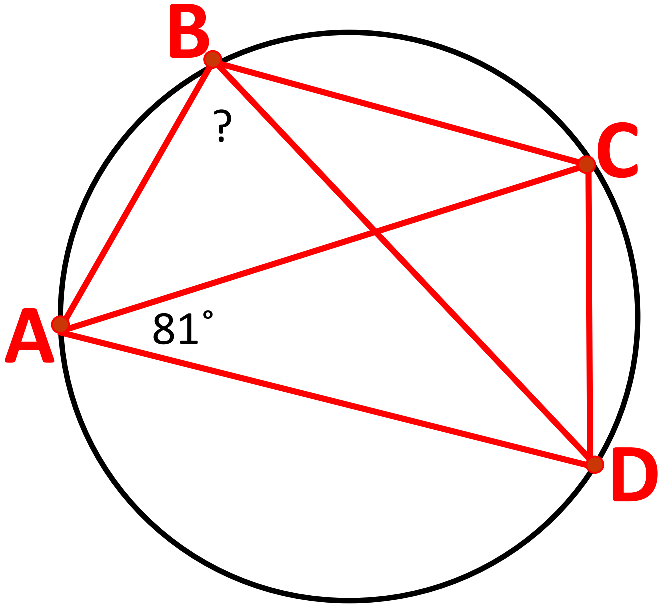




- Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны
- Вписанный угол, опирающийся на полуокружность (на диаметр), равен 90˚.

№ 5

Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен 134°, угол CAD равен 81°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



Решение:

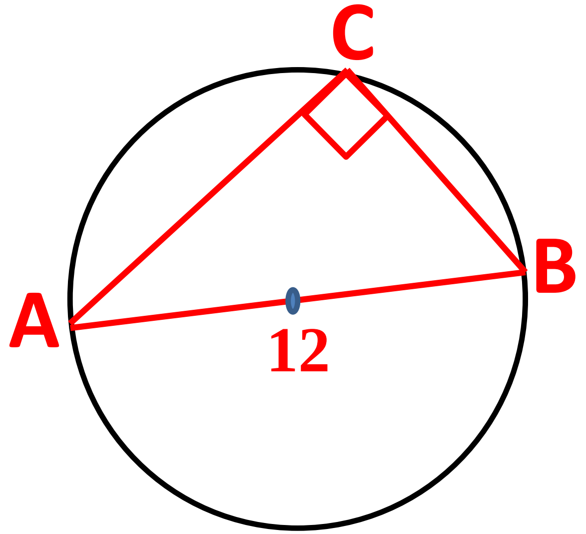
$\angle DAC = \angle DBC = 81^{\circ}$, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу

$\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 134^{\circ} - 81^{\circ} = 53^{\circ}$

Ответ: 5 3

№ 6.

Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



ΔABC – прямоугольный

$\angle ACB$ – прямой

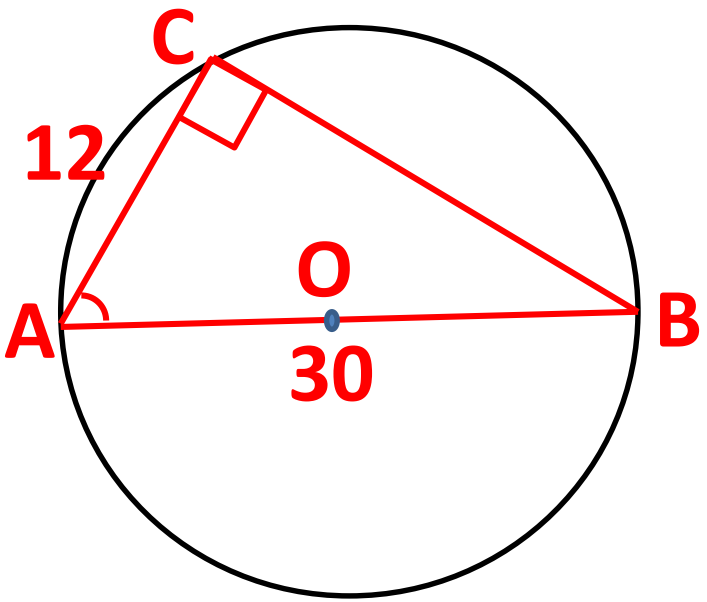
AB – диаметр

$$R = 12:2 = 6$$

Ответ: 6

№ 7.

На окружности радиусом 15 отмечена точка C. Отрезок AB — диаметр окружности, AC=12. Найдите cos∠ BAC.



$$\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB \text{ (вписанный)}$$

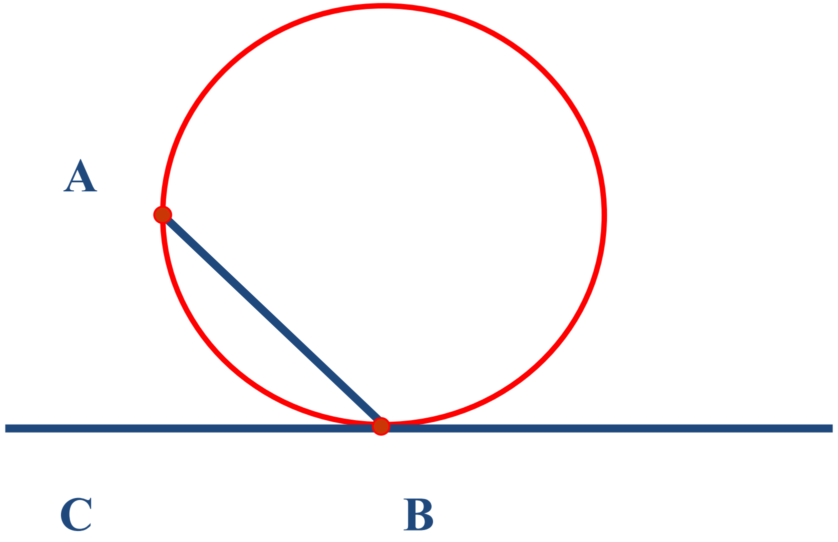
$$AB - \text{диаметр}, \angle ACB - \text{прямой}, \triangle ACB - \text{прямоугольный}$$

$$AB = 2r = 2 \cdot 15 = 30$$

$$cosCAB = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

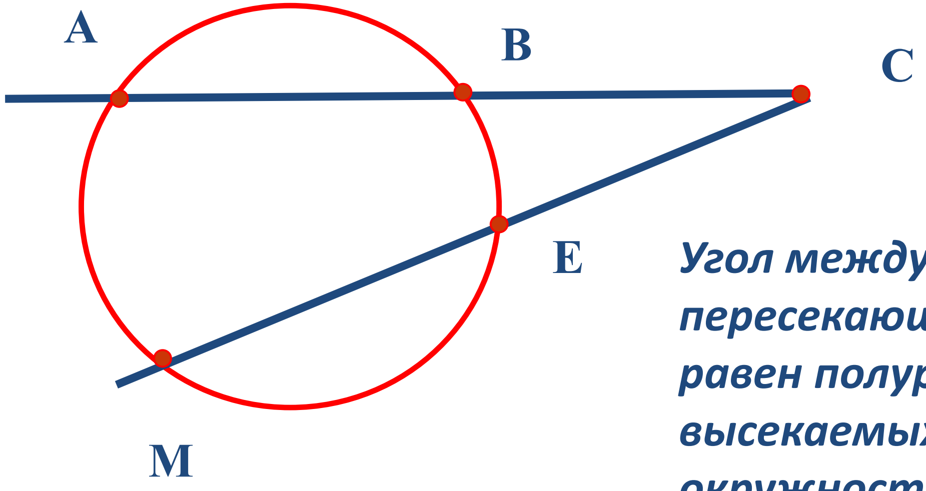
Ответ: 0,4

Касательная, хорда, секущая



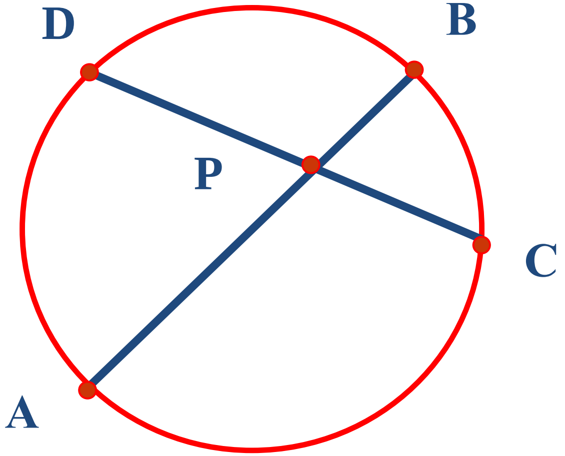
Угол между касательной и хордой равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AB$$



Угол между двумя секущими, пересекающимися вне круга, равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности

$$\angle C = \frac{\smile AM - \smile BE}{2}$$

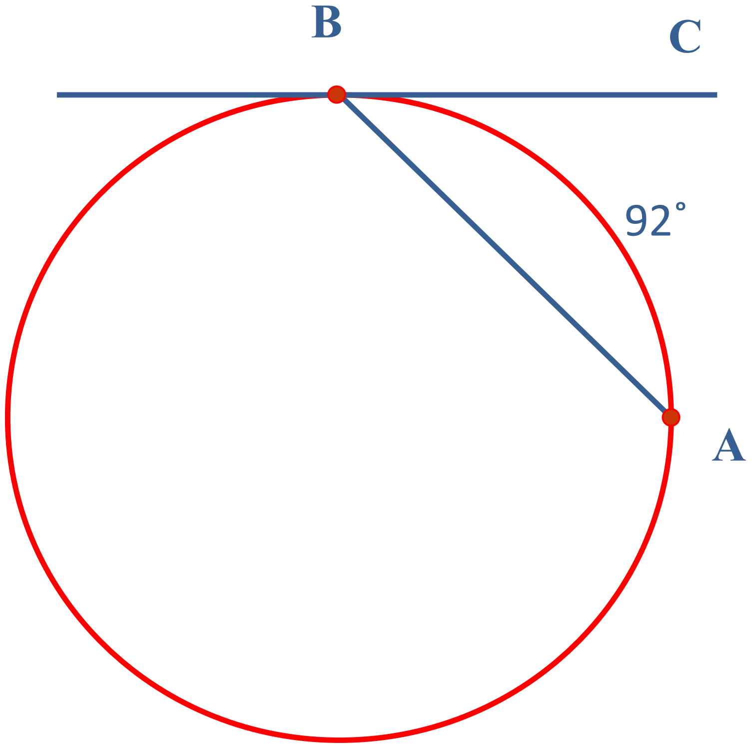


Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами

$$\angle APC = \frac{\smile AC + \smile BD}{2}$$

№ 8

Хорда *AB* стягивает дугу окружности в 92°. Найдите угол *ABC* между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку *B*. Ответ дайте в градусах.



Решение:

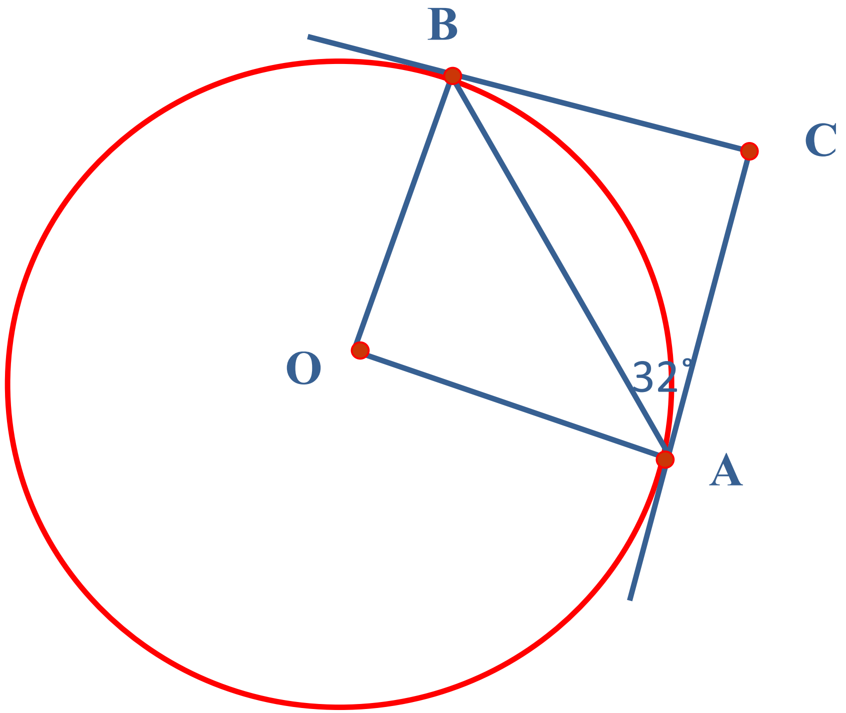
$$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AB = \frac{1}{2} \cdot 92^\circ = 46^\circ$$

Ответ: **46**

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 203-53-01, кафедра математики, информатики и технологического образования тел.: +7 (861) 203-50-52

№ 9

Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC. Угол CAB равен 32°. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



Решение:

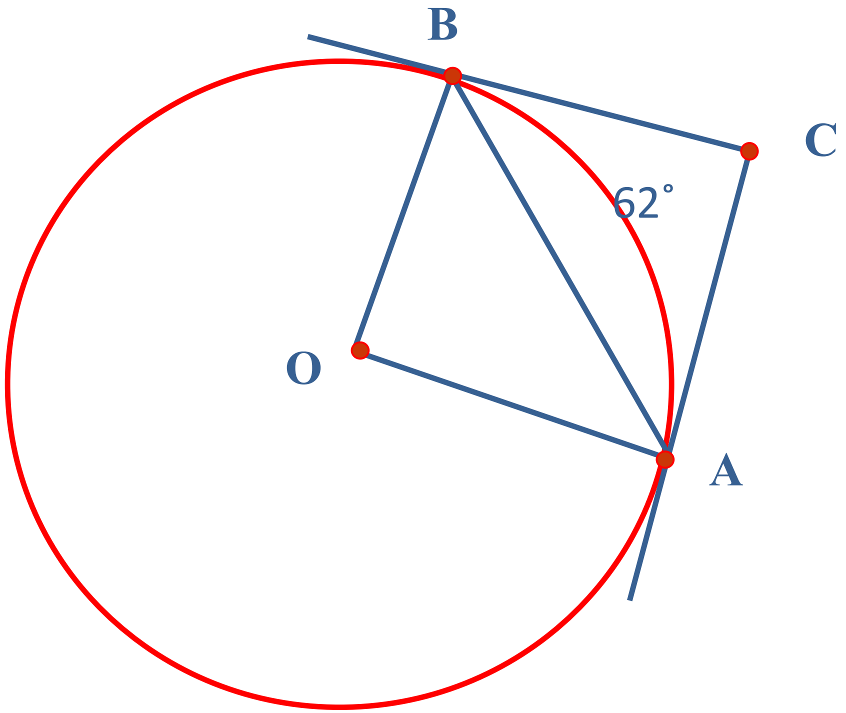
$\angle CAB = 32^\circ$, тогда $\smile AB = 64^\circ$

$\smile AB = \angle AOB = 64^\circ$

Ответ: 64

№10

Через концы A, B дуги окружности в 62° проведены касательные AC и BC. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



Решение:

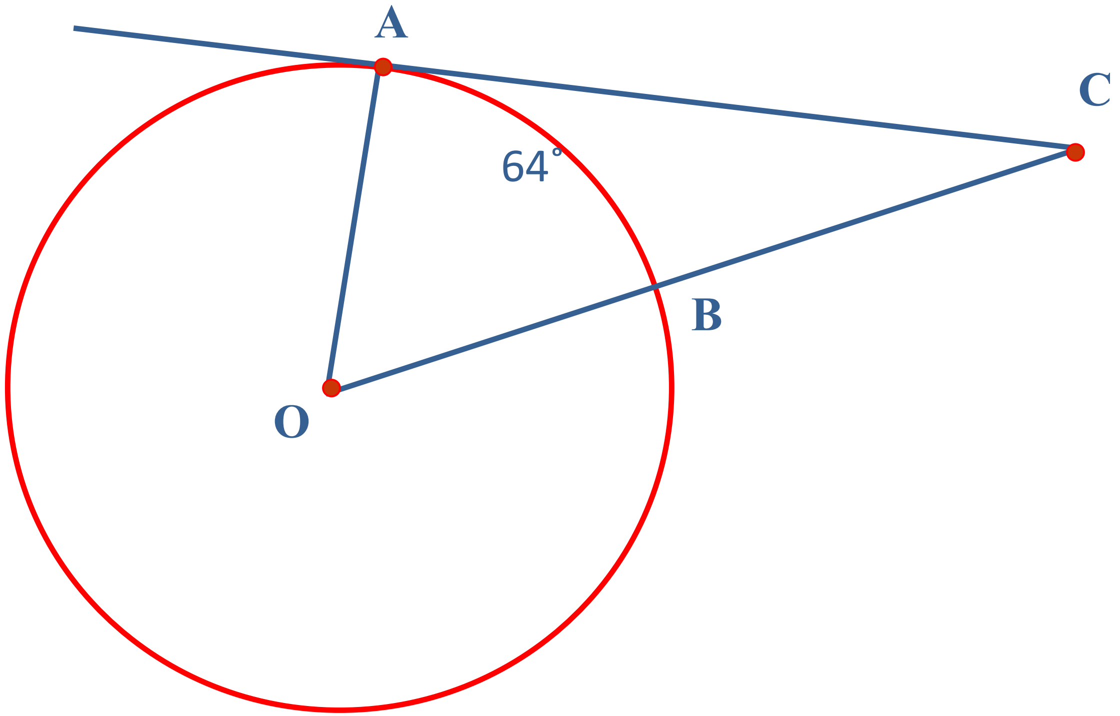
$\smile AB = \angle AOB = 62^\circ$, *тогда*

$\angle ACB = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$

Ответ: **118**

№ 11

Найдите угол *ACO*, если его сторона *CA* касается окружности, *O* — центр окружности, сторона *CO* пересекает окружность в точке *B*, дуга *AB* окружности, заключённая внутри этого угла равна 64°. Ответ дайте в градусах.



Решение:

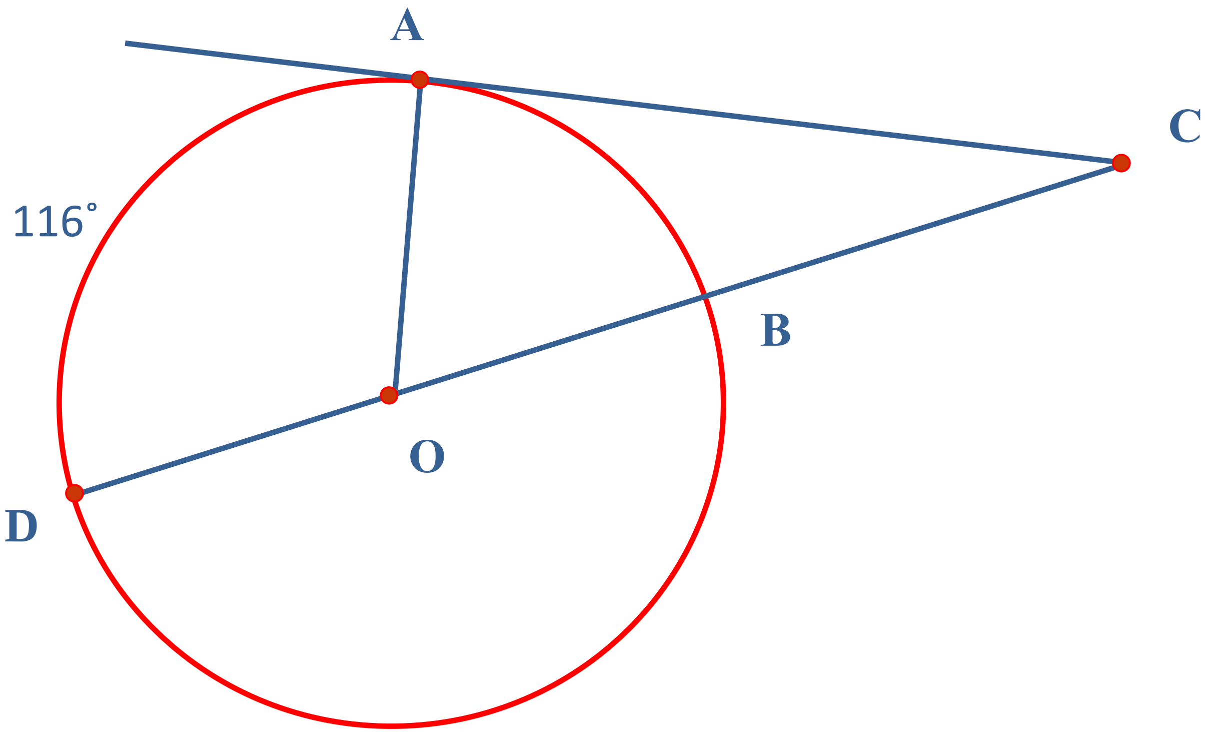
$\smile AB = \angle AOB = 64^\circ$, *тогда*

$\angle ACB = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ$

Ответ: 26

№12

Найдите угол *ACO*, если его сторона *CA* касается окружности, *O* — центр окружности, сторона *CO* пересекает окружность в точках *B* и *D*, а дуга *AD* окружности, заключенная внутри этого угла, равна 116°. Ответ дайте в градусах.



Решение:

$\smile AD = 116^\circ$, *тогда* $\angle AOD = 116^\circ$

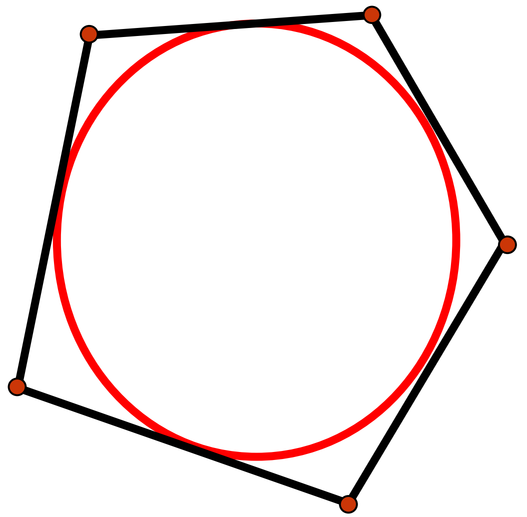
$\angle AOC = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$

$\angle ACO = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ$

Ответ: 2 6

Вписанная окружность

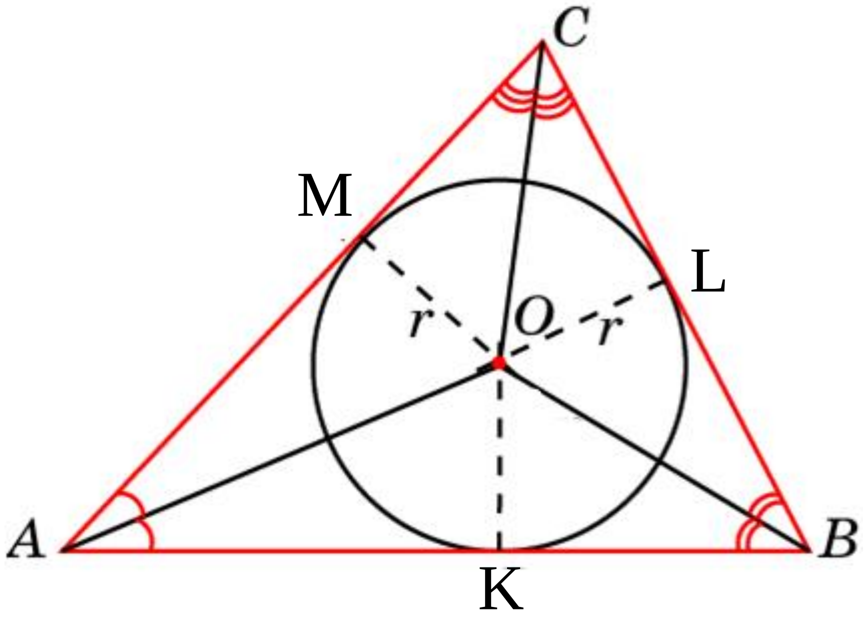
Определение. **Окружность называется *вписанной* в многоугольник, если все его стороны касаются этой окружности.**



Многоугольник называется *описанным* около окружности.

Вписанная окружность

Теорема. **В любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну.**



<u>Центр вписанной окружности</u> - точка пересечения биссектрис этого треугольника.

Площадь треугольника, описанного около окружности, выражается формулой

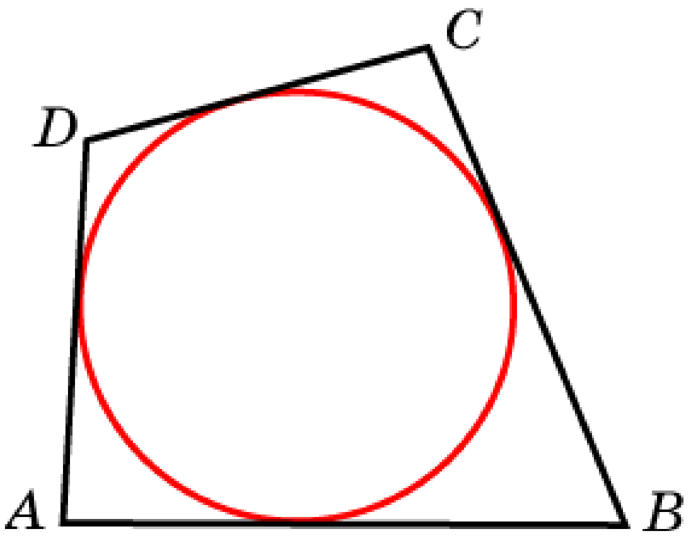
$$S = \frac{1}{2}Pr$$

где r – радиус вписанной в треугольник окружности, P – периметр треугольника, *S* – его площадь.

Вписанная окружность

Свойство. В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

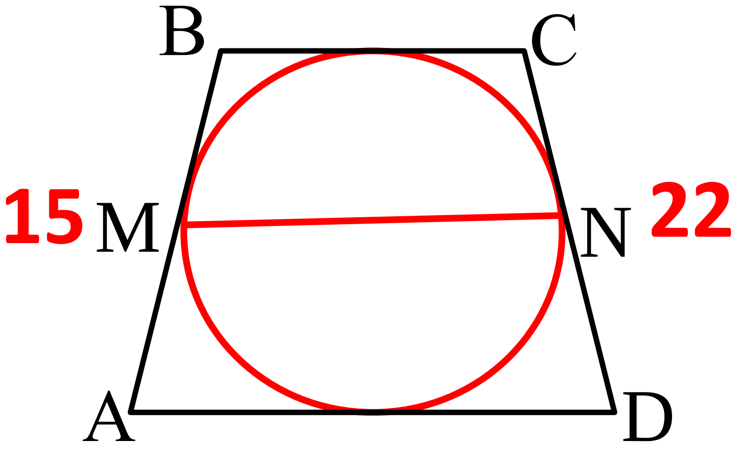
$$AD + BC = AB + CD$$



Обратно: Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

№13

Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 15 и 22. Найдите среднюю линию трапеции.



AB+CD=DA+BC

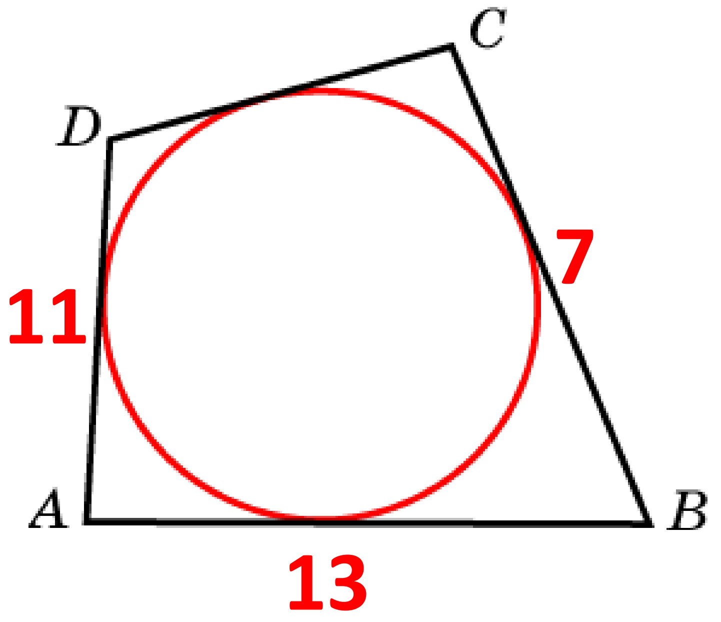
$$NM = \frac{AD+BC}{2} = \frac{15+22}{2} = \frac{37}{2} = 18,5$$

Ответ: 18,5

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 203-53-01, кафедра математики, информатики и технологического образования тел.: +7 (861) 203-50-52

№14.

В четырёхугольник ABCD вписана окружность, AB=13, BC=7 и AD=11. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.



AB+CD=DA+BC

CD+13=11+7

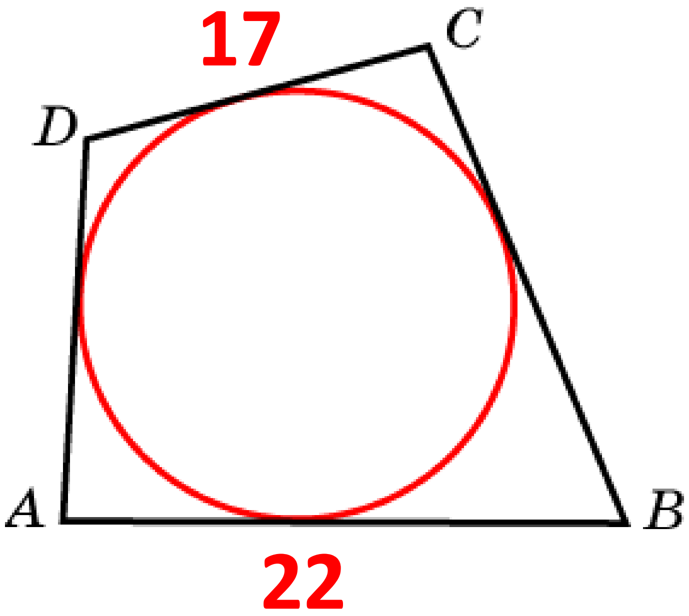
CD+13=18

CD=18-13=5

Ответ: 5

№15.

В четырёхугольник ABCD вписана окружность, AB=22, CD=17. Найдите периметр четырёхугольника ABCD.



P=AB+CD+DA+BC

AB+CD=DA+BC=22+17=39

DA+BC=39

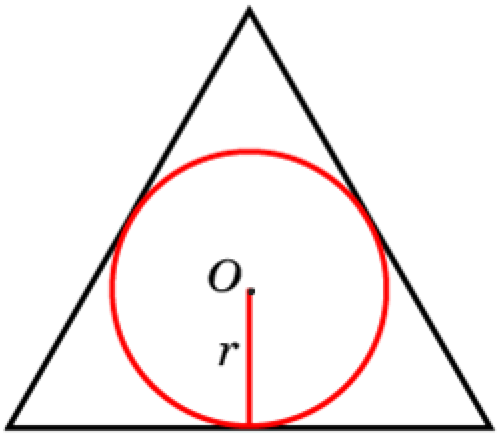
P=39+39=78

Ответ: 78

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 203-53-01, кафедра математики, информатики и технологического образования тел.: +7 (861) 203-50-52

№16.

Периметр треугольника равен 12, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите площадь этого треугольника.



$$S = \frac{1}{2}Pr$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 1 = \frac{12}{2} = 6$$

Ответ: 6

№17.

Около окружности, радиус которой равен 3, описан многоугольник, периметр которого равен 20. Найдите его площадь.

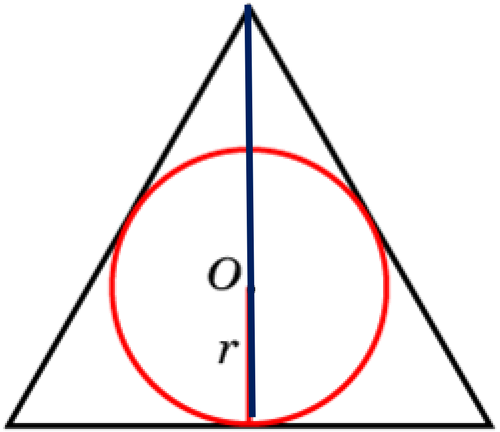
$$S = \frac{1}{2}Pr$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 3 = \frac{20 \cdot 3}{2} = 30$$

Ответ: 30

№18.

Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 6.



$$r = \frac{h}{3}$$

$$\frac{1}{2}a \cdot \mathrm{h} = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot r$$

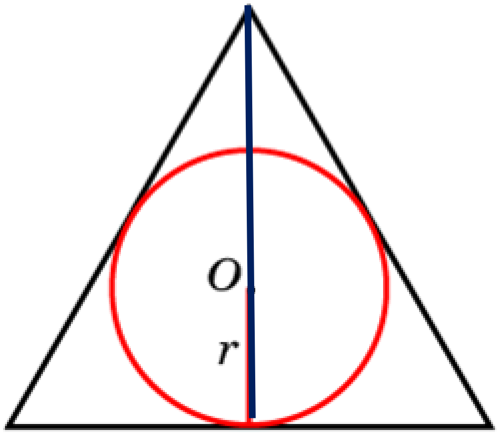
$$h = 3r$$

$$\mathrm{r} = 6:3 = 2$$

Ответ: 2

№19.

Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



Решение:

$h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, тогда $h = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}$=1,5

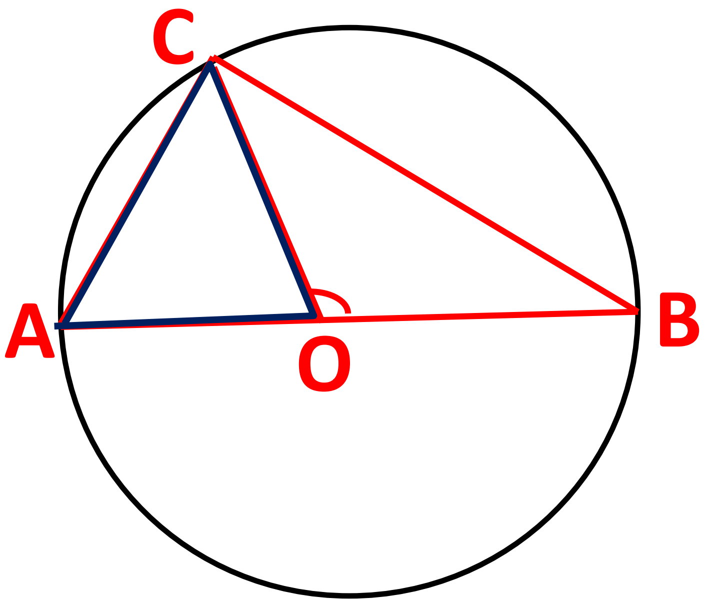
$r = \dfrac{h}{3}$

$r = \dfrac{1,5}{3} = 0,5$

Ответ: 0,5

№ 20.

На окружности с центром O и диаметром AB отмечена точка C так, что угол COB равен 120°, AC=23. Найдите диаметр окружности



$\angle COB + \angle COA = 180^0$ (смежные)

$\angle COA = 180^0 - \angle COB = 60^0$

AO=OC=r $\quad \triangle COA -$ равнобедренный

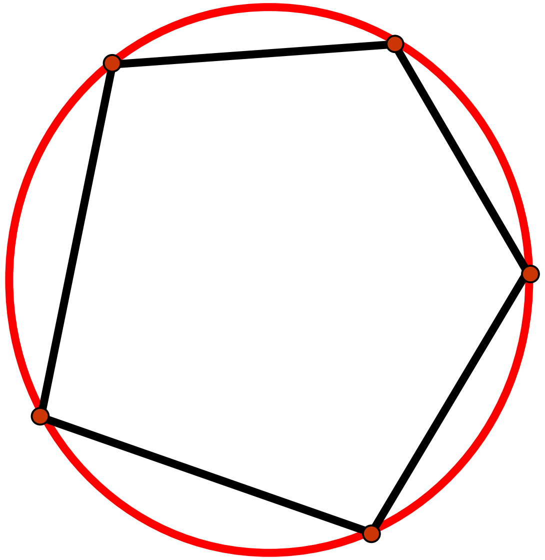
$\angle A = \angle B = \angle C = 60^0 \quad \triangle COA -$ равносторонний

AC=AO=OC= r =23

d=23· 2 = 46

Ответ: 4 6

Описанная окружность



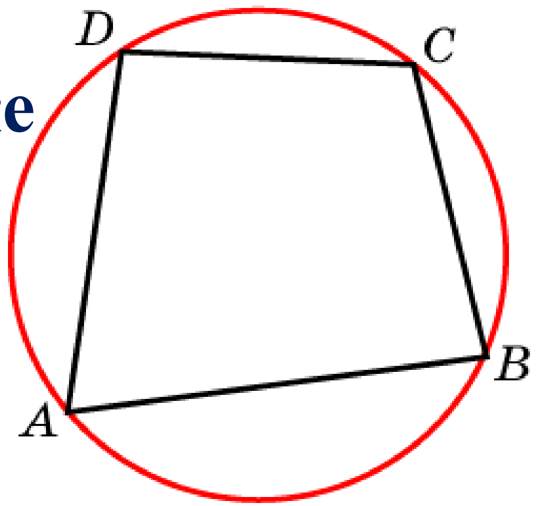
Определение. **Окружность называется *описанной* около многоугольника, если все его вершины лежат на этой окружности.**

Многоугольник называется *вписанным* в окружность.

Описанная окружность

Свойство. В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180^0.

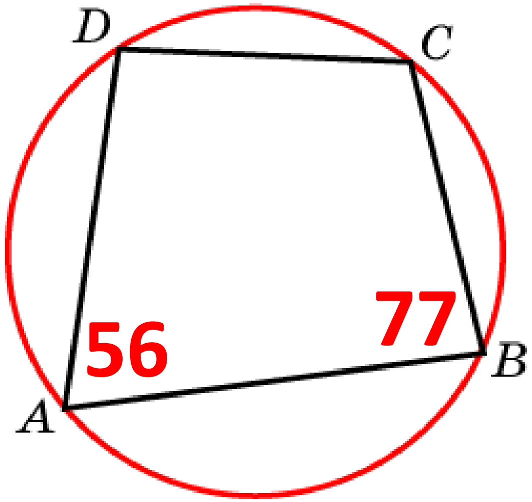
$$\boxed{\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^0}$$



Обратное: Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180^o , то около него можно описать окружность.

№21.

Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 56° и 77°. Найдите меньший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^0$$

$$\angle C + 56^0 = 180^0$$

$$\angle C = 180^0 - 56^0 = 124^0$$

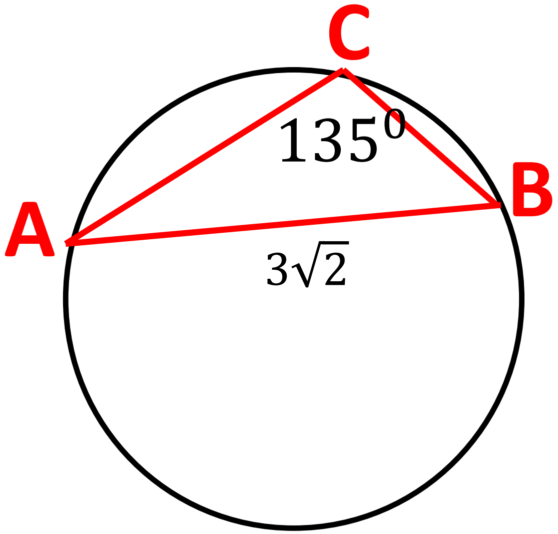
$$\angle D + 77^0 = 180^0$$

$$\angle D = 180^0 - 77^0 = 103^0$$

Ответ: 1 0 3

№22.

В треугольнике ABC сторона AB равна $3\sqrt{2}$, угол C равен 135^0 Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R \qquad \frac{3\sqrt{2}}{\sin 135^0} = 2R$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R \qquad \frac{2\cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2R$$

$$2R = 6$$

$$R = 6:2 = 3$$

Ответ: 3

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ,

ЖЕЛАЮ УСПЕХОВ!

Пащенко Марина Петровна,
учитель математики, МБОУ гимназия №5
Усть-Лабинский район