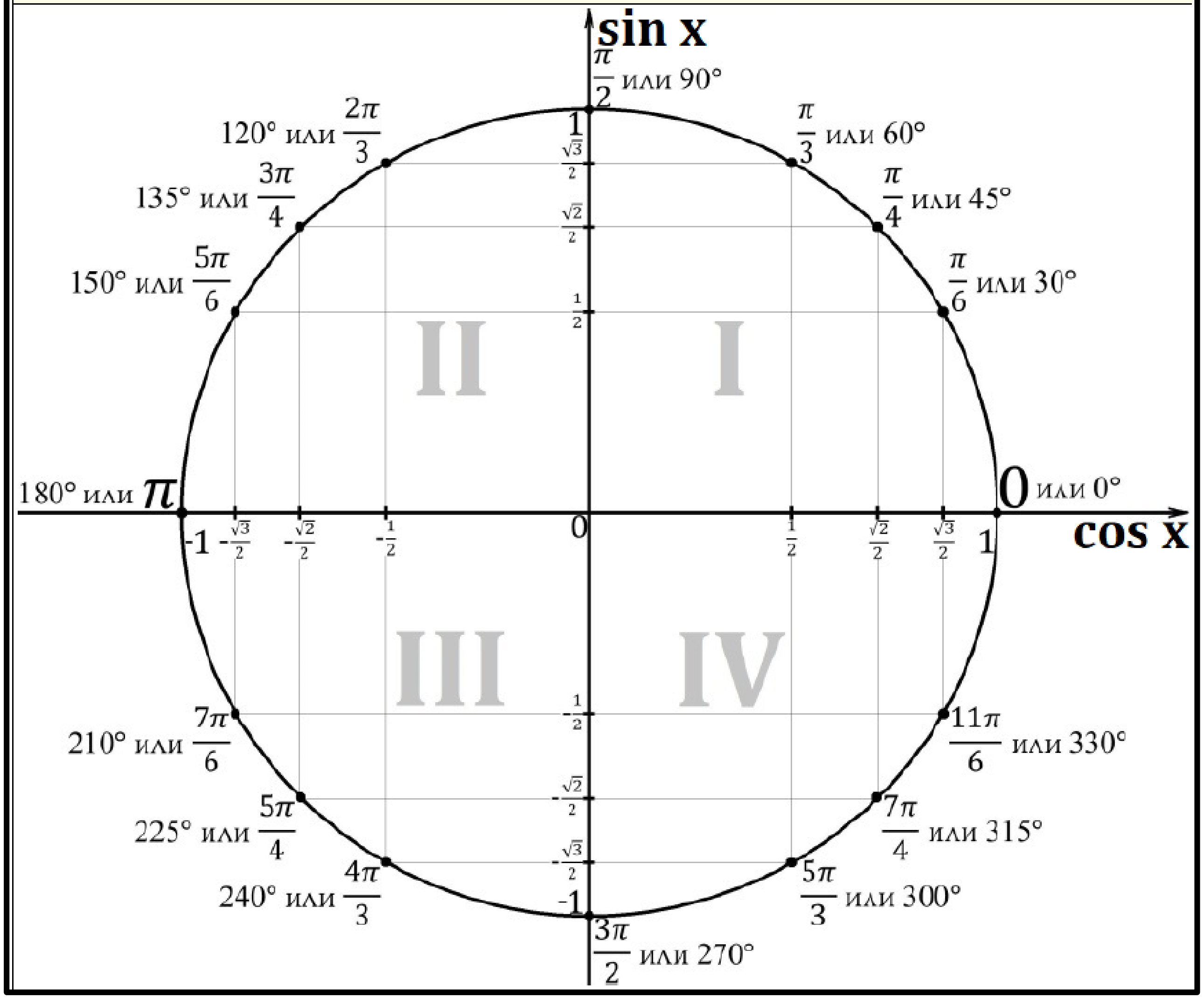
Преобразование тригонометрических выражений.

Задание № 7 профильного ЕГЭ по математике.

Лещенко Светлана Ивановна,
учитель математики МБОУ СОШ № 8 им. Ю. А. Гагарина г. Туапсе МО Туапсинский район.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ



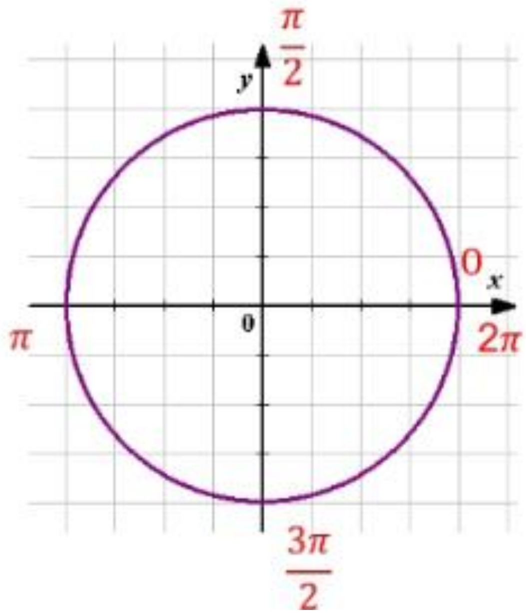
Основные формулы.

	ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ		ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА
1	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	1	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$
2	$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	2	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
3	$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$	3	$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
4	$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$	4	$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

	ЧЁТНОСТЬ
1	$\sin(-x) = -\sin x$
2	$\cos(-x) = \cos x$
3	$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
4	$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 203-53-01, кафедра математики, информатики и технологического образования тел.: +7 (861) 203-50-52

Формулы приведения



1) Определить четверть

2) Определить знак исходной функции в этой четверти

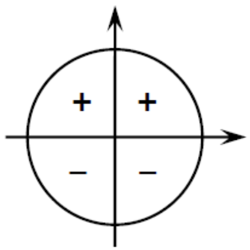
3) Если аргумент приводимой функции имеет вид $\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right)$ или $\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right)$, то функция меняется на кофункцию.

4) Если аргумент приводимой функции имеет вид $(\pi \pm t)$ или $(2\pi \pm t)$, то функция не меняется на кофункцию.

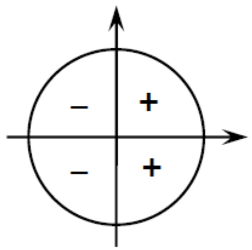
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$$

$$\sin(2\pi - t) = -\sin t$$

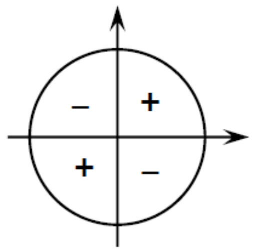
Знаки тригонометрических функций



sin t



cos t



tg t, ctg t

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 203-53-01, кафедра математики, информатики и технологического образования тел.: +7 (861) 203-50-52

Задания открытого банка задач.

1. Найдите значение выражения $6\sqrt{3}tg\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}$.

Решение.

$$6\sqrt{3}\,tg\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6} = 6\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \boxed{3.}$$

α, рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
α, °	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–
$ctg\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 203-53-01, кафедра математики, информатики и технологического образования тел.: +7 (861) 203-50-52

2. *Найдите значение выражения* $24\sqrt{3}\cos(-750°)$.

Решение.

$$24\sqrt{3}\cos(-750°) = 24\sqrt{3}\cos(2\cdot 360° + 30°) = 24\sqrt{3}\cos 30° =$$

$$= 24\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{24\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 12\cdot 3 = \boxed{36}.$$

Использованы:

а) свойство четности функции cos t:

cos (–a) = cos a

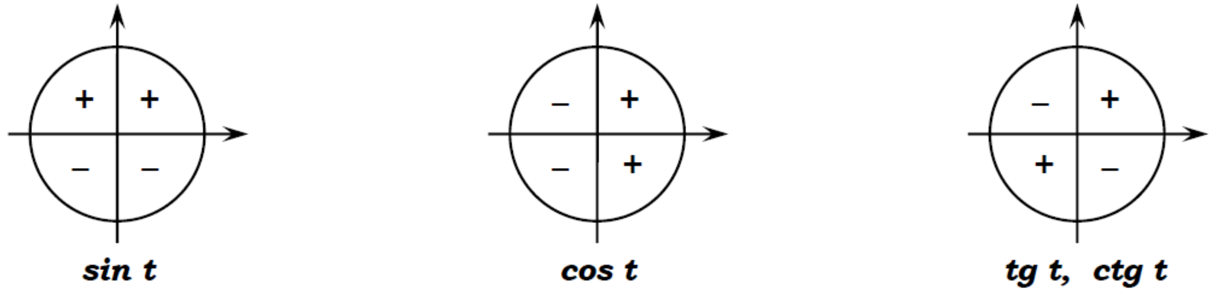
б) свойство периодичности функции cos a:

cos (2πn ± a) = cos a, где n ∈ Z

в) таблица значений тригонометрических функций.

α, *рад*	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
α, °	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–
$ctg\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Знаки тригонометрических функций



3. Найдите tg a, если $\cos a = \dfrac{5\sqrt{29}}{29},\ a \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Решение.

$$\cos a = \frac{5\sqrt{29}}{29} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = 1 - \left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2 = 1 - \frac{25}{29} = \frac{29}{29} - \frac{25}{29} = \frac{4}{29}$$

$$\sin a = -\sqrt{\frac{4}{29}} = -\frac{2}{\sqrt{29}},\ \text{где}\ \ a \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right) \Rightarrow \sin a < 0$$

$$tga = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{29}}}{\frac{5}{\sqrt{29}}} = -\frac{2}{5} = \boxed{-0{,}4.}$$

<u>Использованы</u> *тождества:* $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ и $tg\, a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 203-53-01, кафедра математики, информатики и технологического образования тел.: +7 (861) 203-50-52

Формулы приведения.

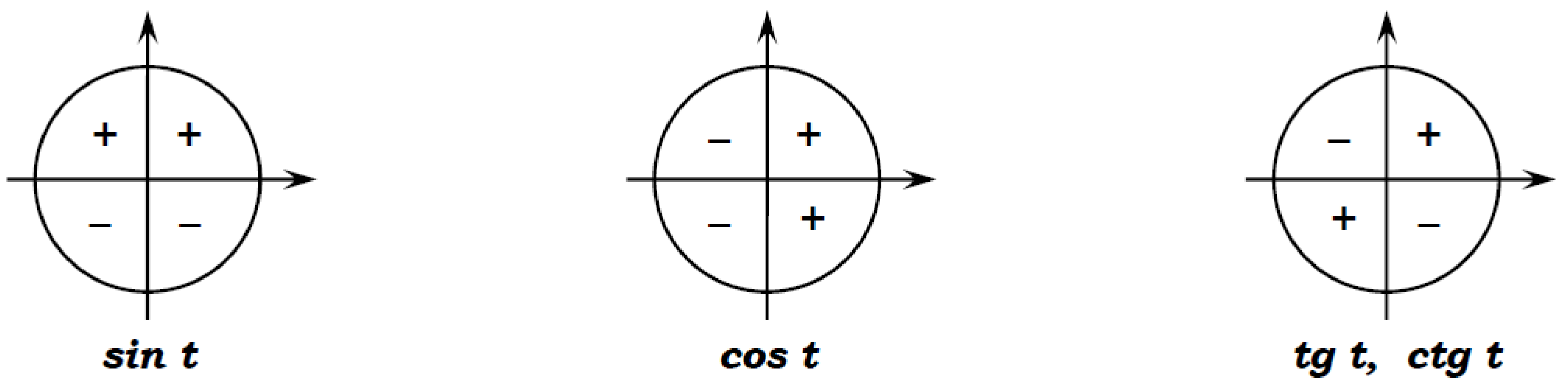
4. Найдите значение выражения $\dfrac{33\cos 63^\circ}{\sin 27^\circ}$.

Решение.

$$\frac{33\cos 63^\circ}{\sin 27^\circ}=\frac{33\cos(90^\circ-27^\circ)}{\sin 27^\circ}=\frac{33\sin 27^\circ}{\sin 27^\circ}=\boxed{33.}$$

Использована формула приведения: $\cos(90^\circ - a) = \sin a$

Знаки тригонометрических функций



ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 203-53-01, кафедра математики, информатики и технологического образования тел.: +7 (861) 203-50-52

5. Найдите значение выражения $\dfrac{34\sin 100^\circ}{\sin 260^\circ}$.

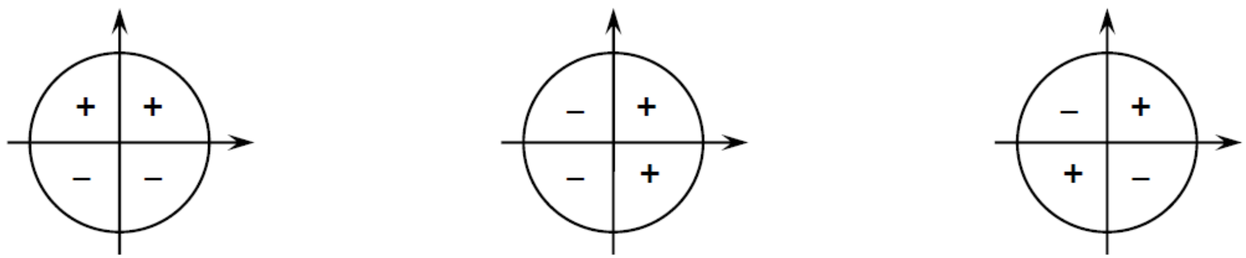
Решение.

$$\frac{34\sin 100^\circ}{\sin 260^\circ}=\frac{34\sin\left(90^\circ+10^\circ\right)}{\sin\left(270^\circ-10^\circ\right)}=\frac{34\cos 10^\circ}{-\cos 10^\circ}=\boxed{-34.}$$

<u>Использованы</u> формулы приведения:

$\sin(90^\circ+a)=\cos a$ и $\sin(270^\circ-a)=-\cos a$

Знаки тригонометрических функций



sin t **cos t** **tg t, ctg t**

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 203-53-01, кафедра математики, информатики и технологического образования тел.: +7 (861) 203-50-52

6. *Найдите значение выражения* $5tg154^\circ \cdot tg244^\circ.$

Решение. $5tg154^\circ \cdot tg\,244^\circ = 5tg\left(90^\circ + 64^\circ\right) \cdot tg\left(180^\circ + 64^\circ\right) =$

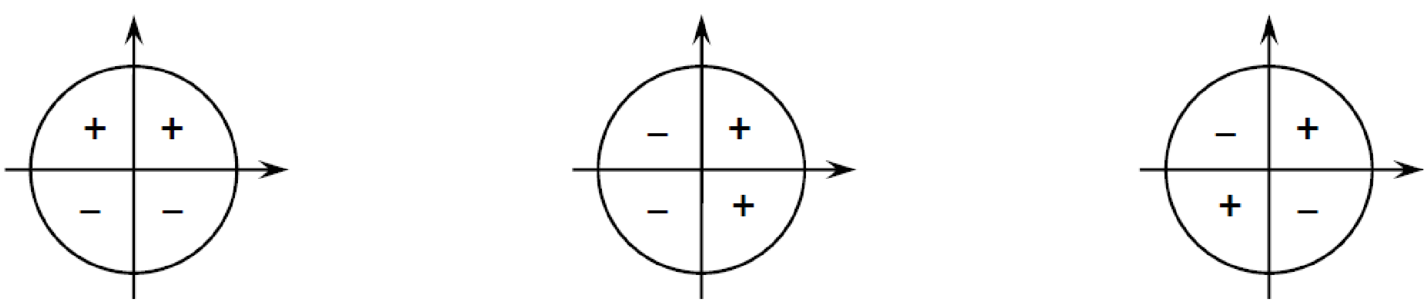
$= -5ctg\,64^\circ \cdot tg\,64^\circ = \boxed{-5}.$

Использованы:

а) формулы приведения: tg (90° + a)= – ctg a и tg (180° + a) = tga

б) тождество: tg a · ctg a = 1.

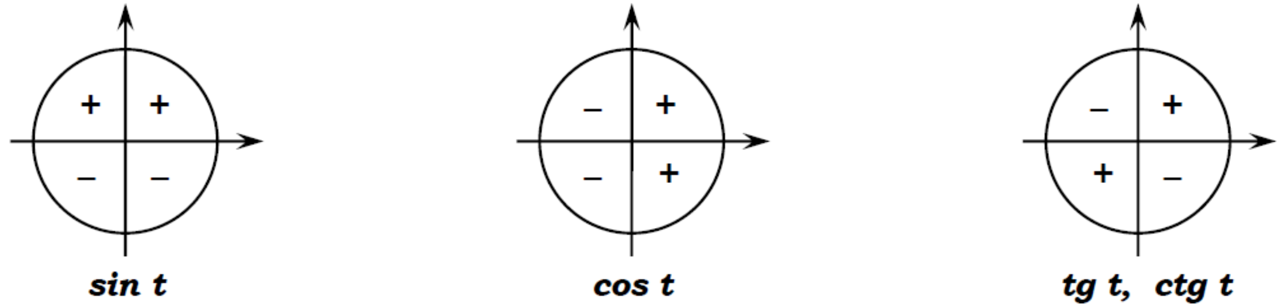
Знаки тригонометрических функций



sin t   **cos t**   **tg t, ctg t**

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 203-53-01, кафедра математики, информатики и технологического образования тел.: +7 (861) 203-50-52

Знаки тригонометрических функций



7. *Найдите значение выражения* $\dfrac{37}{\sin^2 173° + 1 + \sin^2 263°}$.

Решение.

$$\frac{37}{\sin^2 173° + 1 + \sin^2 263°} = \frac{37}{\sin^2(90° + 83°) + 1 + \sin^2(180° + 83°)} =$$

$$= \frac{37}{1 + \cos^2 83° + \sin^2 83°} = \frac{37}{2} = \boxed{18,5.}$$

Использованы:

а) формулы приведения:

$\sin(90° + a) = \cos a$ *и* $\sin(180° + a) = -\sin a$

$\sin^2(180° + a) = (-\sin a)^2 = \sin^2 a$

б) тождество: $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

Формулы двойных углов.

8. Найдите значение выражения $\dfrac{2\sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ}{\sin 22^\circ}$.

Решение.

$$\frac{2\sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ}{\sin 22^\circ} = \frac{\sin 22^\circ}{\sin 22^\circ} = \boxed{1.}$$

Использована формула: $\sin 2a = 2\sin a \cdot \cos a$

9. *Найдите значение выражения* $\dfrac{22\left(\sin^2 9° - \cos^2 9°\right)}{\cos 18°}$.

Решение.

$$\frac{22\left(\sin^2 9° - \cos^2 9°\right)}{\cos 18°} = \frac{-22\left(\cos^2 9° - \sin^2 9°\right)}{\cos 18°} = \frac{-22\cos(2\cdot 9°)}{\cos 18°} =$$

$$= \frac{-22\cos 18°}{\cos 18°} = \boxed{-22.}$$

<u>Использована</u> формула: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

10. Найдите значение выражения $\frac{-6\sin 142^\circ}{\sin 71^\circ \cdot \sin 19^\circ}$.

Решение.

$$\frac{-6\sin 142^\circ}{\sin 71^\circ \cdot \sin 19^\circ} = \frac{-6 \cdot 2\sin 71^\circ \cdot \cos 71^\circ}{\sin 71^\circ \cdot \sin\left(90^\circ - 71^\circ\right)} = \frac{-12\cos 71^\circ}{\cos 71^\circ} = \boxed{-12.}$$

Использованы:

а) формула sin 2a = 2sin a · cos a

б) формула приведения sin (90º – a) = cos a.

11. Найдите –20cos 2a, если sin a = –0,8

Решение.

$$-20\cos 2a = -20\left(1-2\sin^2 a\right) = -20\left(1-2\cdot\left(-0,8\right)^2\right) =$$

$$= -20\left(1-2\cdot 0,64\right) = -20\left(1-1,28\right) = -20\cdot\left(-0,28\right) = \boxed{5,6.}$$

Использована формула: $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

12. *Найдите значение выражения* $2\sqrt{2}\,sin\,\dfrac{13\pi}{8}cos\,\dfrac{13\pi}{8}$.

Решение.

$$2\sqrt{2}\sin\frac{13\pi}{8}\cos\frac{13\pi}{8}=\sqrt{2}\sin\left(2\cdot\frac{13\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\sin\frac{13\pi}{4}=$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\boxed{-1.}$$

Использованы:

а) формула sin 2a = 2sin a · cos a

б) формула приведения.

13. *Найдите значение выражения* $\sqrt{27}\cos^2\frac{13\pi}{12}-\sqrt{27}\sin^2\frac{13\pi}{12}$.

Решение.

$$\sqrt{27}\cos^2\frac{13\pi}{12}-\sqrt{27}\sin^2\frac{13\pi}{12}=\sqrt{27}\left(\cos^2\frac{13\pi}{12}-\sin^2\frac{13\pi}{12}\right)=$$

$$=\sqrt{27}\cos\left(2\cdot\frac{13\pi}{12}\right)=\sqrt{27}\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)=\sqrt{27}\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{27}\cos\frac{\pi}{6}=$$

$$=3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{2}=\boxed{4{,}5.}$$

Использованы:

а) формула $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$.

б) свойство периодичности функции cos t:

$\cos(2\pi n\pm a)=\cos a$, *где* $n\in Z$

14. *Найдите значение выражения* $\sqrt{72}\cos^2\frac{15\pi}{8}-\sqrt{18}.$

Решение.

$$\sqrt{72}\cos^2\frac{15\pi}{8}-\sqrt{18}=\sqrt{18}\left(2\cos^2\frac{15\pi}{8}-1\right)=\sqrt{18}\cos\left(2\cdot\frac{15\pi}{8}\right)=$$

$$=\sqrt{18}\cos\left(\frac{15\pi}{4}\right)=\sqrt{18}\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{18}\cos\frac{\pi}{4}=3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\boxed{3.}$$

Использованы:

а) формула $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$.

б) свойство периодичности функции cos t:

$\cos(2\pi n \pm a) = \cos a$, *где* $n \in Z$

15. *Найдите значение выражения* $\sqrt{8}-\sqrt{32}\sin^2\frac{11\pi}{8}$.

Решение.

$$\sqrt{8}-\sqrt{32}\sin^2\frac{11\pi}{8}=\sqrt{8}\left(1-2\sin^2\frac{11\pi}{8}\right)=\sqrt{8}\cos\left(2\cdot\frac{11\pi}{8}\right)=$$

$$=\sqrt{8}\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right)=\sqrt{8}\cos\left(3\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{8}\cos\frac{\pi}{4}=-2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\boxed{-2.}$$

Использованы:

а) формула $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$.

б) формулы приведения.

Спасибо за внимание!

Успехов вам, *дорогие ребята!*

Лещенко Светлана Ивановна,
учитель математики МБОУ СОШ № 8 г. Туапсе
МО Туапсинский район.