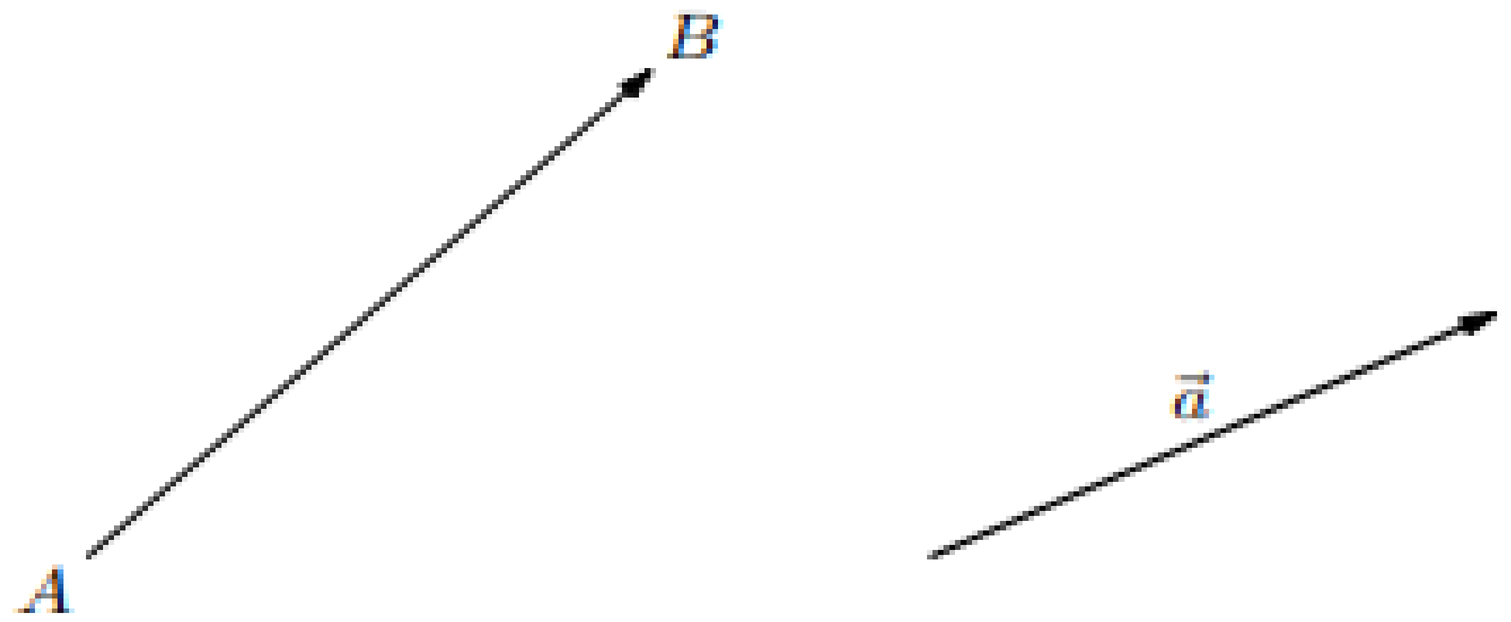
Векторы. Задание №2 профильного ЕГЭ по математике

Копылова Светлана Геннадьевна, учитель математики МАОУ СОШ № 96 г. Краснодара

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

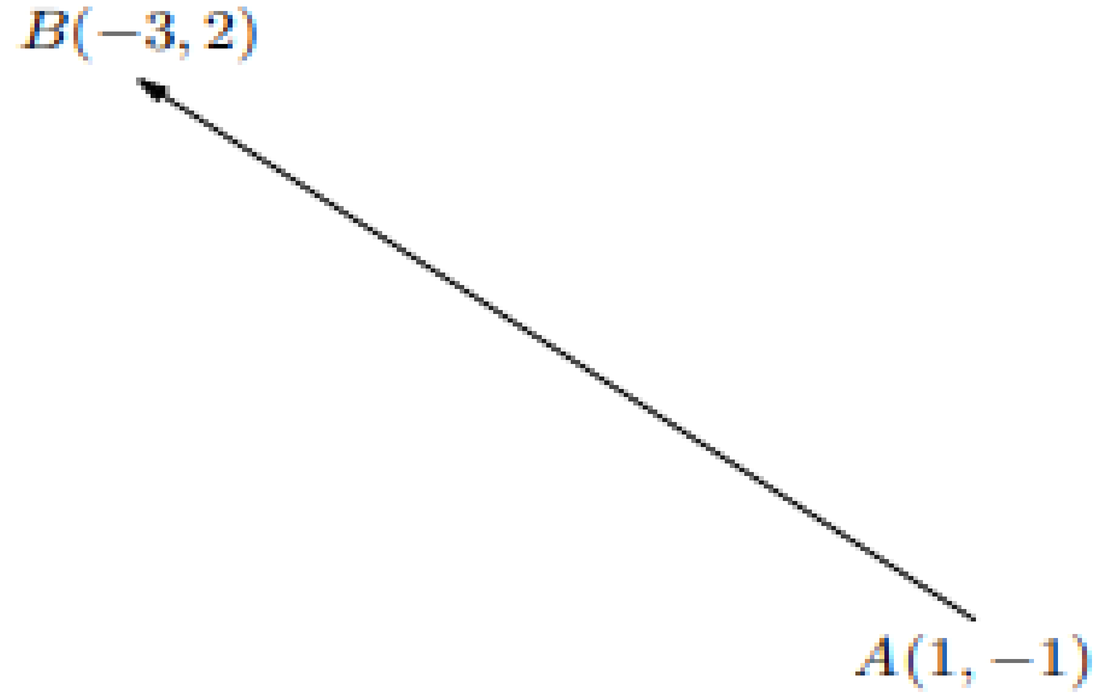
Вектором будем называть отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая концом.



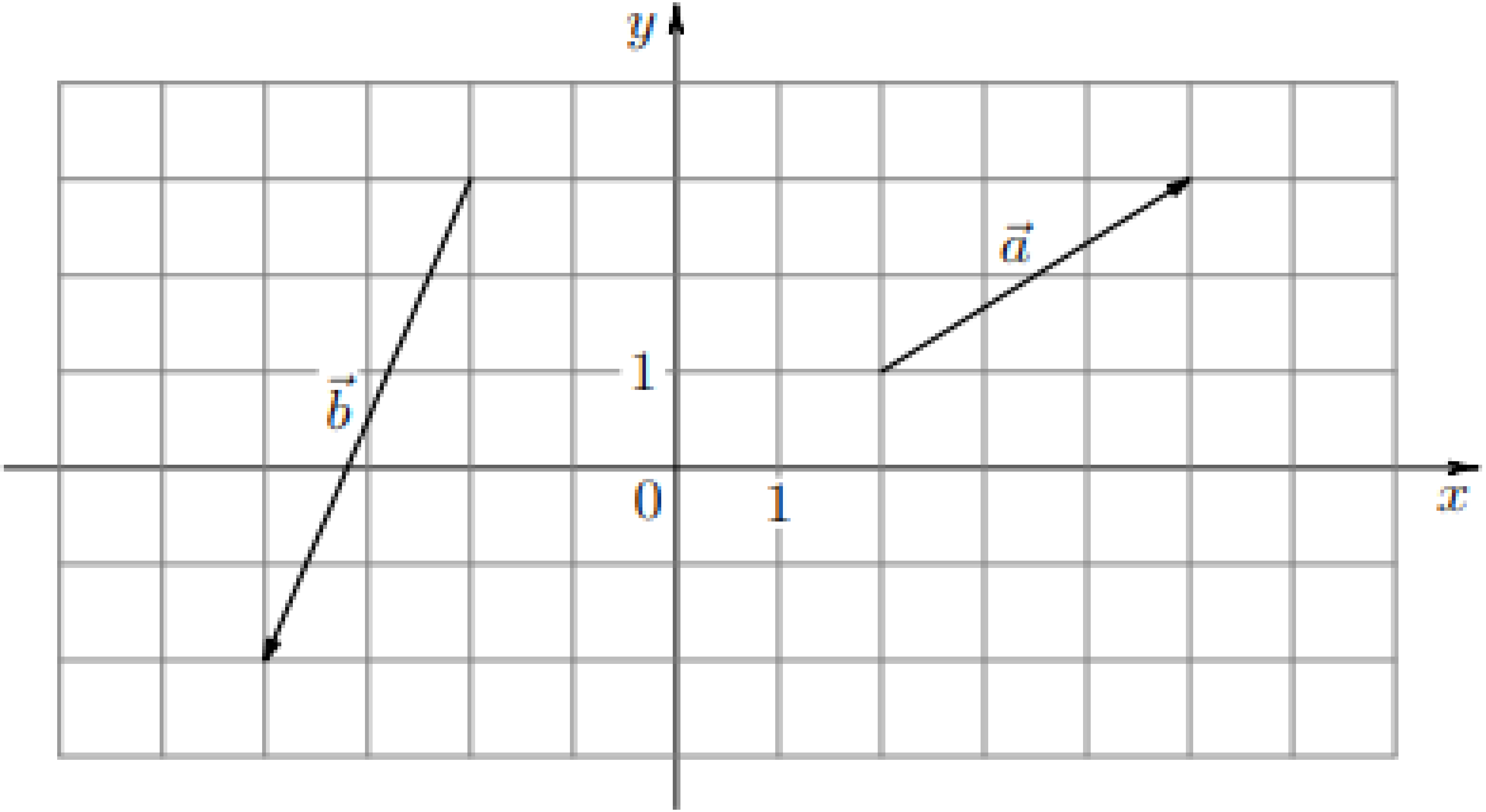
КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Правило

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ с началом $A(x_1, y_1)$ и концом $B(x_2, y_2)$ равны $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.



КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

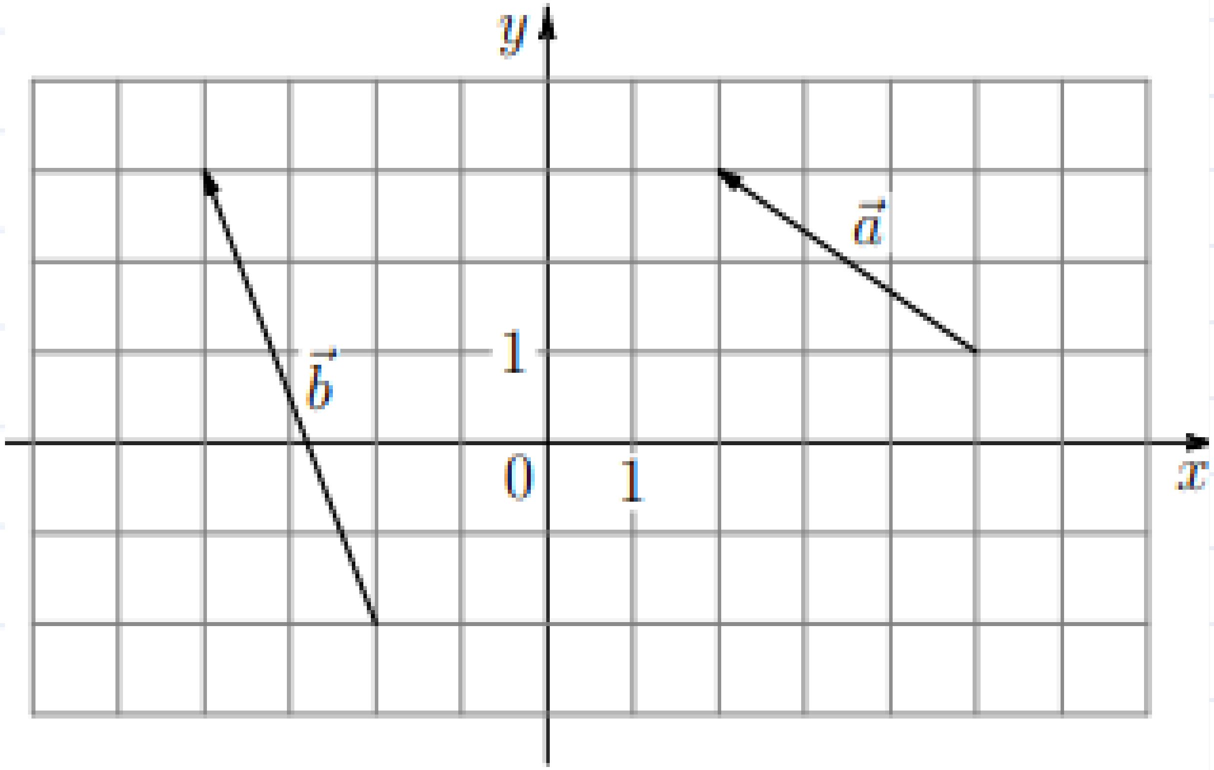


ДЛИНА ВЕКТОРА

Длина вектора по его координатам.

Вектор $\vec{a}\,(X_a; Y_a)$

Длина вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{X_a{}^2 + Y_a{}^2}$

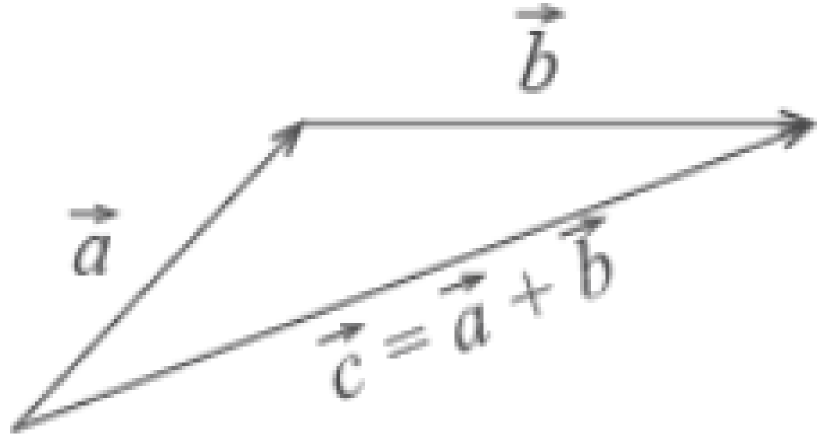


СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Для сложения векторов есть два способа.

1. Правило параллелограмма. Чтобы сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, помещаем начала обоих в одну точку. Достраиваем до параллелограмма и из той же точки проводим диагональ параллелограмма. Это и будет сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Второй способ сложения векторов — правило треугольника. Возьмем те же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. К концу первого вектора пристроим начало второго. Теперь соединим начало первого и конец второго. Это и есть сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

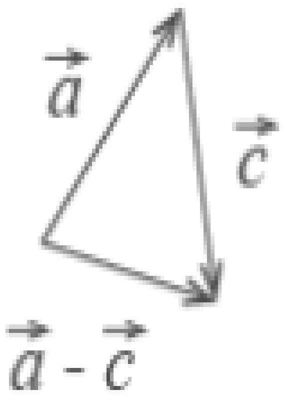


ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

Вектор -$\vec{c}$ направлен противоположно вектору $\vec{c}$. Длины векторов $\vec{c}$ и -$\vec{c}$ равны.

Теперь понятно, что такое вычитание векторов. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ – это сумма вектора $\vec{a}$ и вектора -$\vec{c}$.

$$\vec{a} - \vec{c} = \vec{a} + (-\vec{c})$$



СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Скалярным произведением векторов называется произведение длин векторов на косинус угла между ними.

скалярное произведение выражается через координаты векторов :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$$

Из формулы для скалярного произведения можно найти угол между векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

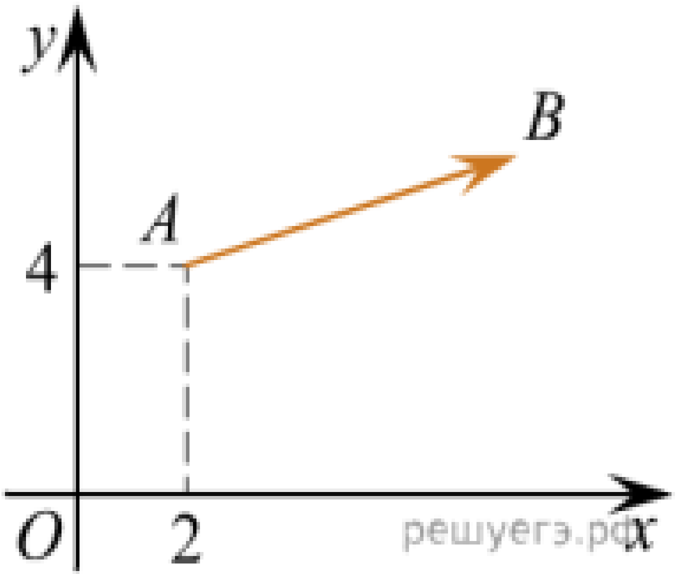
СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Если векторы перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю.

Условие при котором векторы сонаправлены	Условие при котором векторы противоположено направлены
Вектор $\vec{a}\,(X_a; Y_a)$	Вектор $\vec{a}\,(X_a; Y_a)$
Вектор $\vec{b}\,(X_b; Y_b)$	Вектор $\vec{b}\,(X_b; Y_b)$
Условие : $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} \geq 0$	Условие : $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} \leq 0$

ЗАДАЧА 1

Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(2;\, 4)$ имеет координаты $(6;\, 2)$. Найдите абсциссу точки B.



A (2; 4), B (Xв; Ув), $\overline{AB}$ {6; 2}

$\overline{AB}$ = {Xв – 2; Ув - 4}

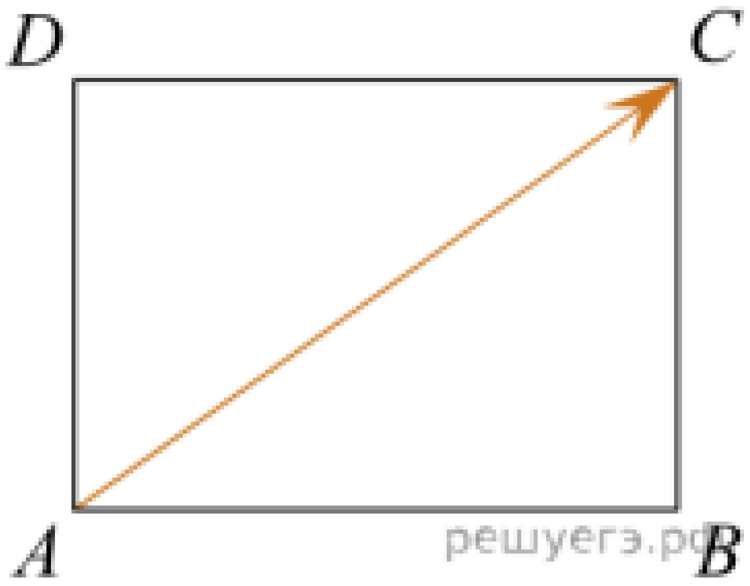
Xв – 2 = 6

Xв = 8

Ответ: 8

ЗАДАЧА 2

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AC}$.

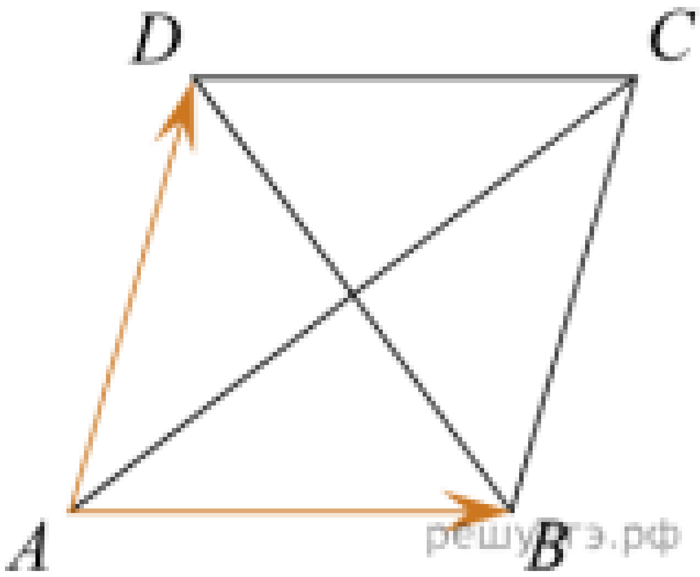


$$|\overline{AC}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

Ответ: 10

ЗАДАЧА 3

Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.



$\overline{CB} = -\overline{AD}; \overline{AB} = \overline{DC}$

$\overline{DC} + \overline{CB} = \overline{DB}$

$|\ \overline{DB}\ | = 12$

Ответ: 12

ЗАДАЧА 4

Вектор $\overrightarrow{AB}$ с концом в точке $B(14;\ -3)$ имеет координаты $(4, 12)$. Найдите ординату точки A.

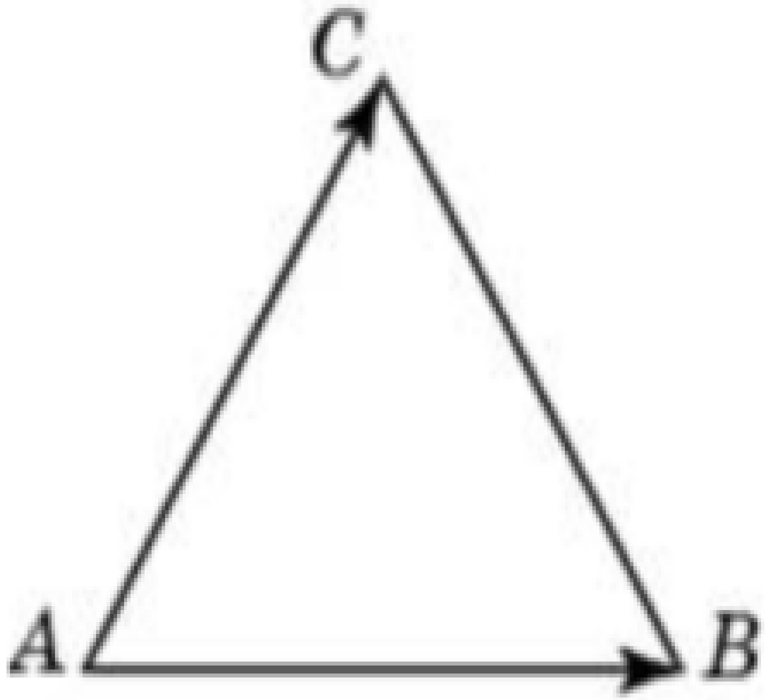
$\overline{AB}$ {4; 12}, A (Xa; Уa), B (14; -3)

12 = -3 – Уa
Уa = -12 -3 = -15

Ответ: -15

ЗАДАЧА 5

Стороны правильного треугольника ABC равны 33. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.



$$\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{X}$$

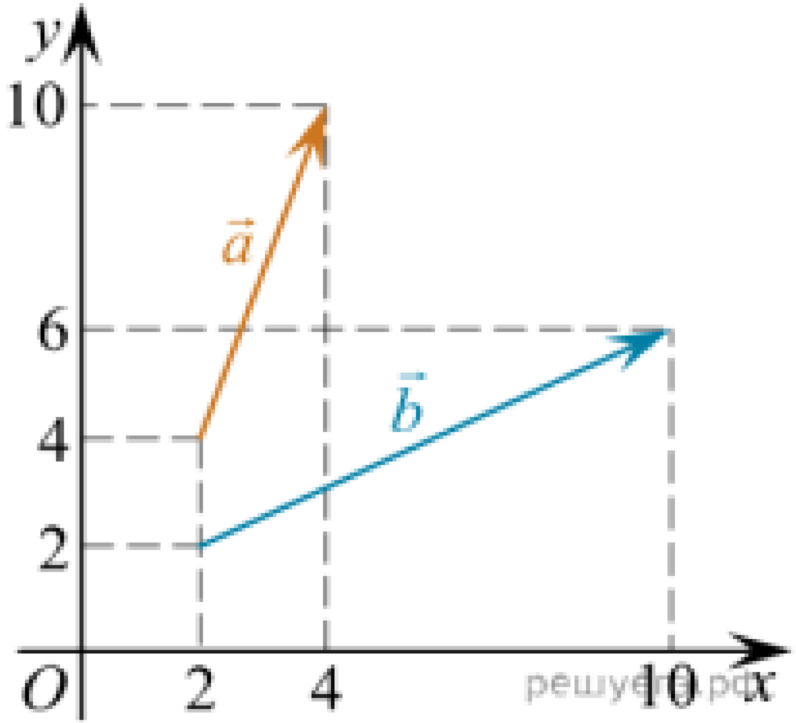
$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{X}$$

$$\overline{X} = \overline{CB} = 33$$

Ответ: 33

ЗАДАЧА 6

Найдите сумму координат вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$\vec{a}\ \{2; 6\}$

$\vec{b}\ \{8; 4\}$

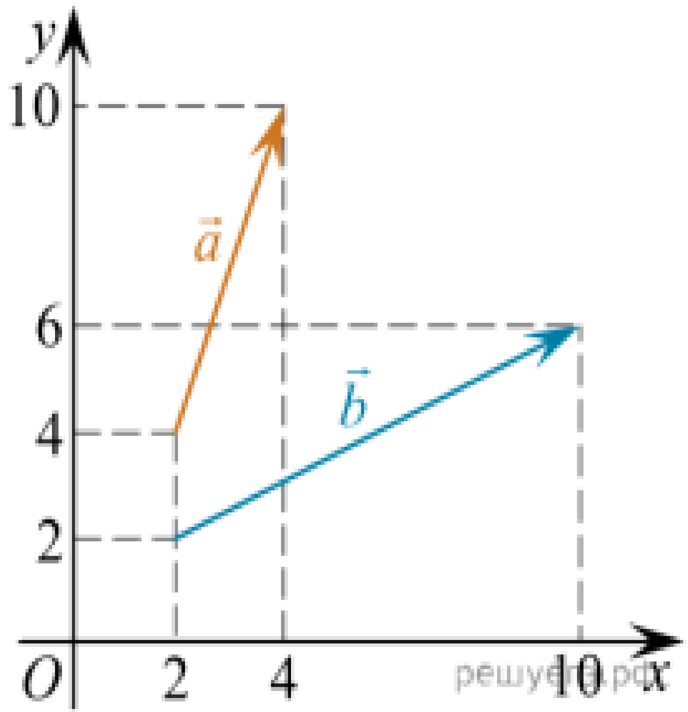
$\vec{a} + \vec{b} = \{10; 10\}$

$10 + 10 = 20$

Ответ: 20

ЗАДАЧА 7

Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



$\vec{a} \cdot \vec{b} = Xa \cdot Xв + Уa \cdot Ув$

$\vec{a}\ \{2; 6\}$

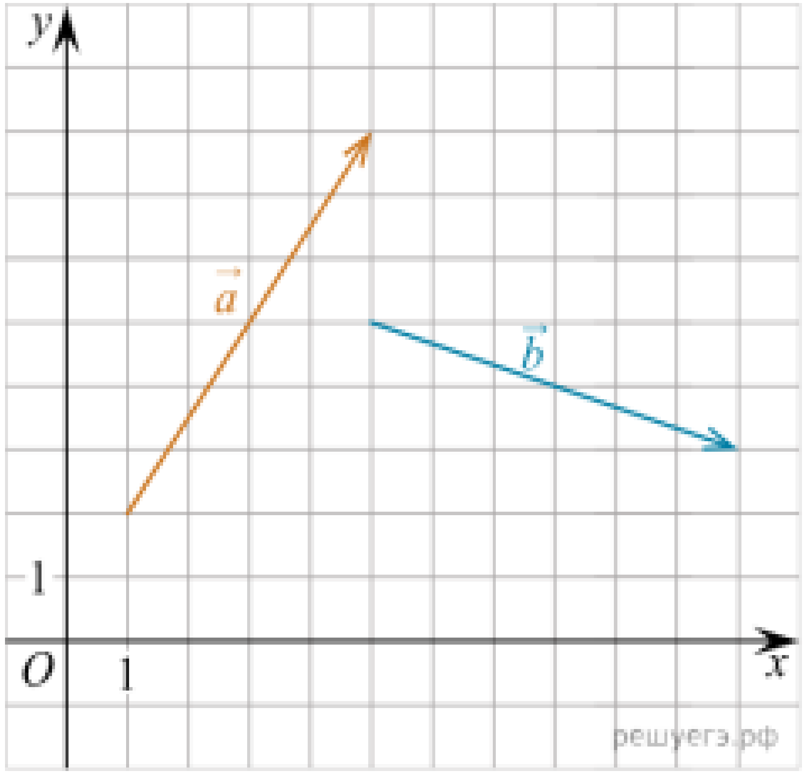
$\vec{b}\ \{8; 4\}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 8 + 6 \cdot 4 = 16 + 24 = 40$

Ответ: 40

ЗАДАЧА 8

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



$\vec{a}$ {4; 6}

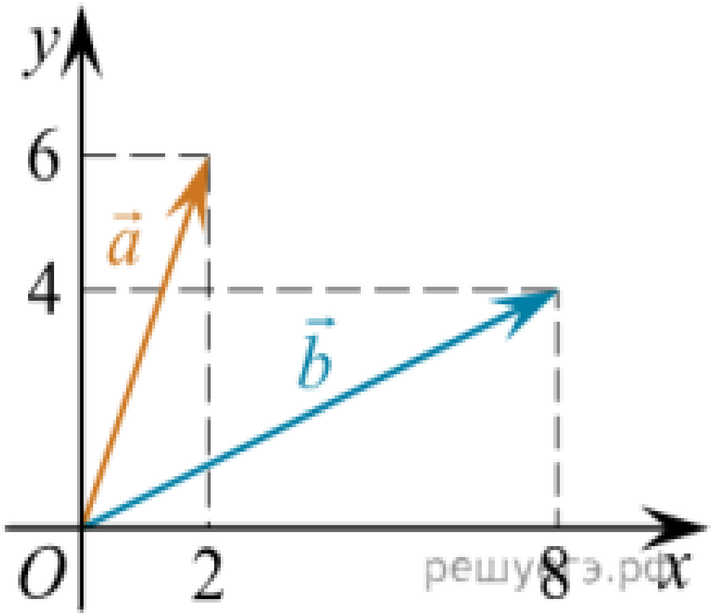
$\vec{b}$ {6; -2}

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 6 + (-2 \cdot 6) = 24 – 12 = 12$

Ответ: 12

ЗАДАЧА 9

Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ответ дайте в градусах.



$\vec{a}\ \{2; 6\}$

$\vec{b}\ \{8; 4\}$

$(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = \alpha$

$$\cos\,(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{2\cdot8+6\cdot4}{\sqrt{2^2+6^2}\cdot\sqrt{8^2+4^2}} =$$

$$= \frac{16+24}{\sqrt{40\cdot80}} = \frac{40}{40\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$$

Ответ: 45

ЗАДАЧА 10

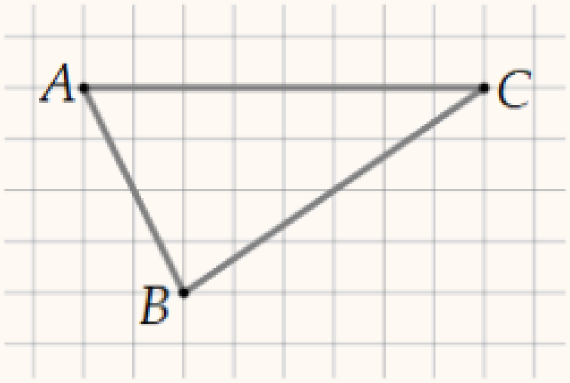
Найдите длину вектора $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$,
если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - взаимно перпендикулярные
единичные векторы.

$$|\ \overline{a}\ | = \sqrt{9+16} = 5$$

Ответ: 5

ЗАДАЧА 11

На клетчатой бумаге с размером 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$.



$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AD}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = 8$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

По теореме косинусов:

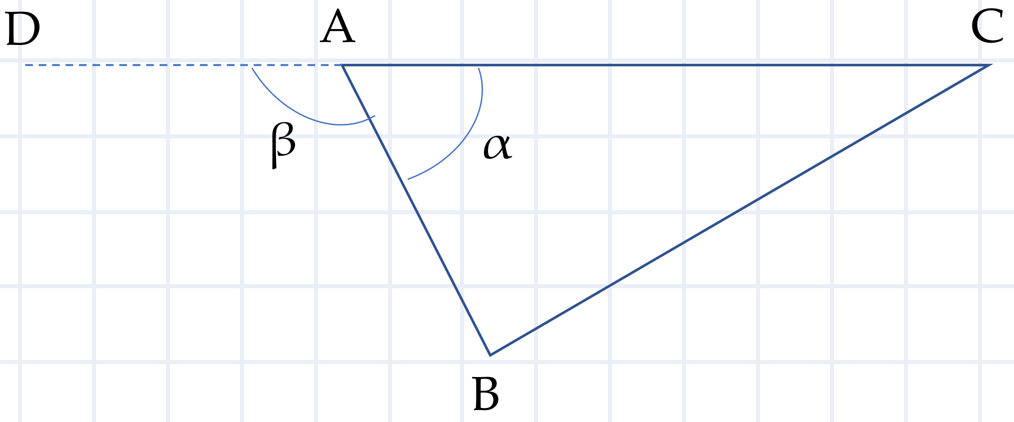
$$52 = 64 + 20 - 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{20} \cdot \cos\alpha$$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, так как β –тупой угол, смежный с α, то

$$\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

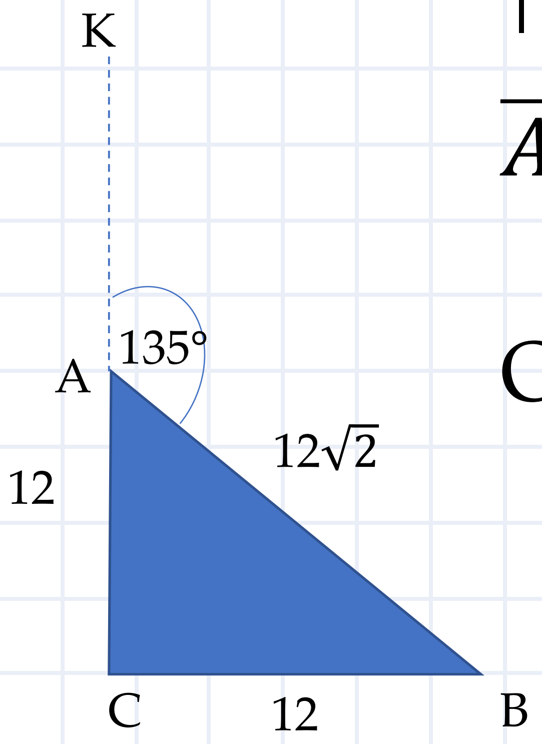
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos\beta = \frac{-\sqrt{20}\cdot 8}{\sqrt{5}} = -16$$

Ответ: -16



ЗАДАЧА 12

В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известно, что $AB = 12\sqrt{2}$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$.



$$|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{AK}|$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK} = 12 \cdot 12\sqrt{2} \cdot \cos 135° = -\frac{144\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = -144$$

Ответ: -144

ЗАДАЧА 13

Вектор $\vec{a}\ \{2; 1\}$ и $\vec{b}\ \{p; 3\}$ коллинеарны. Найдите: p

Условие коллинеарности векторов: координаты должны быть пропорциональны

$$\frac{Ax}{Ax} = \frac{By}{By}\ ;\ \vec{a}\ \{2; 1\}; \vec{b}\ \{p; 3\};$$

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{3} \Longrightarrow p = 2 \cdot 3 = 6$$

Ответ: 6

ЗАДАЧА 14

Стороны параллелограмма ABCD с острым углом A равны 5 и 10, а его площадь равна 30. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{AB}$.

S (ABCD) = 30;

$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = ?$

S(ABCD) = $AB \cdot AD \cdot \sin A$

$\sin A = \frac{3}{5} = 0{,}6$; тогда $\cos A = 0{,}8$

cos A = -cos D = -0,8

$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = |\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{DC}| \cdot \cos D$

$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{10 \cdot 5 \cdot (-4)}{5} = -40$

Ответ: -40

ЗАДАЧА 15

Векторы $\vec{m}(2;3)$ *и* $\vec{n}(k;5)$ *перпендикулярны. Найдите* k.

$$\vec{m} \perp \vec{n} \implies \vec{m} \cdot \vec{n} = 0$$

$$2k + 3 \cdot 5 = 0$$

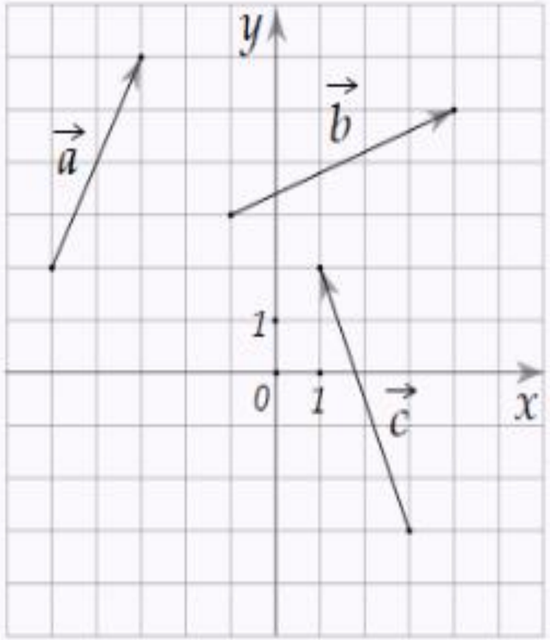
$$2k = -15$$

$$k = -7{,}5$$

Ответ: -7, 5

ЗАДАЧА 16

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите длину вектора $\vec{a} + 4\vec{b} - \vec{c}$.



$$\vec{a}\,\{2; 4\};$$
$$\vec{b}\{5; 2\};$$
$$\vec{c}\,\{-2; 5\}$$

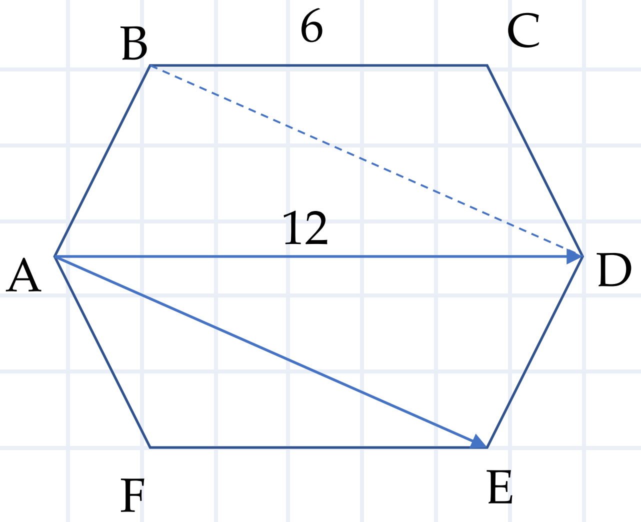
$$\vec{d} = \vec{a} + \overrightarrow{4b} - \vec{c}\,;$$
$$\vec{d}\ \{2 + 4 \cdot 5 + 2; 4 + 4 \cdot 2\ - 5\}$$

$$\vec{d}\,\{24; 7\}$$
$$|\vec{d}| = \sqrt{576 + 49} = \sqrt{625} = 25$$

Ответ: 25

ЗАДАЧА 17

Сторона правильного шестиугольника ABCDEF равна 6. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{AF}$.



$$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{AF}\right| = \left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = 12$$

Ответ: 12

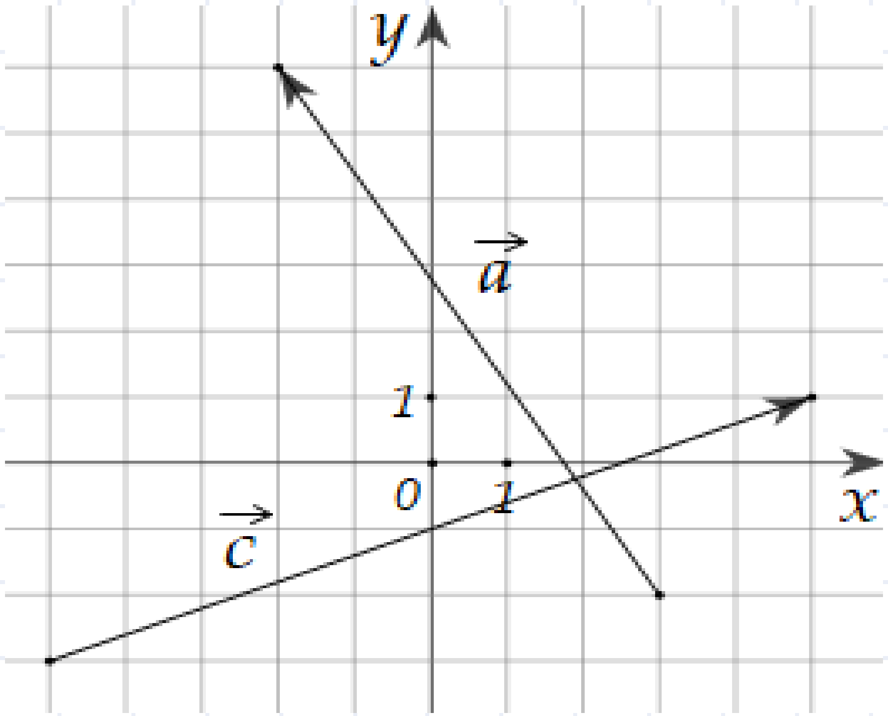
ЗАДАЧА 18

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$

Найдите координаты вектора $\vec{b}$ $(x_b; y_b)$, если $\vec{b} = \vec{a} - 1{,}5\vec{c}$.

В ответ запишите произведение $x_b \cdot y_b$.

$$\vec{a}\,\{-5; 8\}$$
$$\vec{c}\,\{10; 4\}$$
$$-1{,}5\vec{c}\,\{-15; -6\}$$
$$\vec{b}\,\{-20; 2\}$$
$$-20 \cdot 2 = -40$$



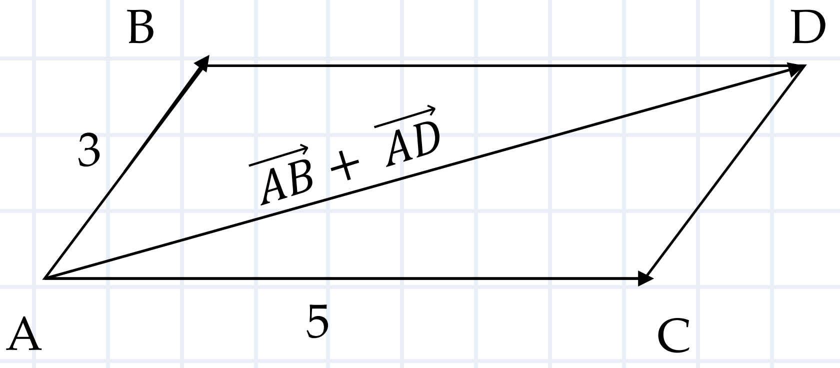
Ответ: -40

ЗАДАЧА 19

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна 3, длина вектора $\overrightarrow{AC}$ равна 5. Косинус угла между этими векторами равен $\frac{1}{15}$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

$$|\overrightarrow{AB}| = 3; |\overrightarrow{AC}| = 5; \cos a = \frac{1}{15}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$$



cos C = cos (180° $-\angle A$) = - cos $\angle A = -\frac{1}{15}$

Найдем $|\overrightarrow{AD}|$ по теореме косинусов:

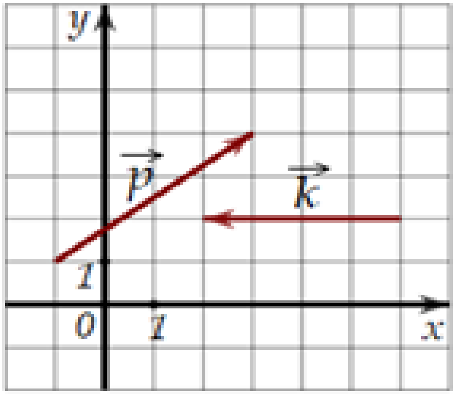
$$AD^2 = 9 + 25 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{15}\right) = 36$$

$$AD = \sqrt{36} = 6$$

Ответ: 6

ЗАДАЧА 20

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{p}$ и $\vec{k}$. Найдите косинус угла между этими векторами.



$$\vec{p}\,\{4;3\};\ \vec{k}\,\{-4;0\}$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{16+9} = 5$$

$$|\vec{k}| = \sqrt{16} = 4$$

$$\vec{p}\cdot\vec{k} = 4\cdot(-4) + 3\cdot 0 = -16$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{p}\cdot\vec{k}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{k}|} = \frac{-16}{5\cdot 4} = -\frac{4}{5} = -0{,}8$$

Ответ: -0,8