«Производная. Свойства производной. Задание № 8 профильного ЕГЭ по математике»

Шеремета И.В.,
учитель математики
МАОУ СОШ № 31
г Краснодар

Физический смысл производной

Геометрический смысл производной, касательные

Применение производной к исследованию функций

Физический смысл производной

Повторим:

Если известен закон движения материальной точки (тела) $x(t), s(t)$ или $\varphi(t)$, то мгновенная скорость в момент времени t вычисляется по формуле

$$v(t) = x'(t) = s'(t) = \varphi'(t),$$

а ускорение $a(t) = v'(t) = x''(t)$.

Физический смысл производной

№ 1. При движении тела по прямой расстояние $\boldsymbol{S}$(км) от начальной точки меняется по закону $\boldsymbol{S(t) = 8t + t^3}$. Найдите формулу для вычисления скорости в любой момент времени и вычислите её при $\boldsymbol{t = 2}$ с.

<u>Решение:</u>

$$\boldsymbol{v(t) = S'(t).}$$
$$\boldsymbol{v(t) = 8 + 3t^2}$$
$$\boldsymbol{v(2) = 8 + 3 \cdot 2^2 = 20}$$

Ответ: **20 м/с.**

Запись в бланке ответов:

2	0			

Решите самостоятельно

№ 2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{6}t^2 + 5t + 28}$ (где $\boldsymbol{x}$ — расстояние от точки отсчета в метрах, $\boldsymbol{t}$ — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени её скорость будет равна **6** м/с?

Ответ:

3				

№ 3. Объем продукции $\boldsymbol{V}$ цеха в течении дня изменяется по закону $\boldsymbol{V(t) = -\frac{5}{3}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 50t + 70}$. Вычислите производительность труда $\Pi(\boldsymbol{t})$ в момент времени $\boldsymbol{t = 2}$.

Ответ:

6	**0**			

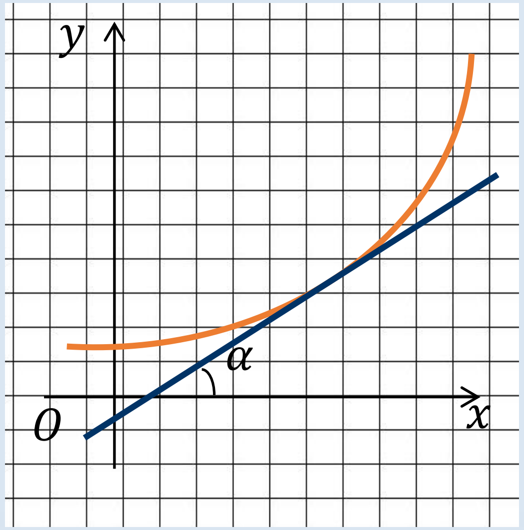
Геометрический смысл производной

Повторим:

Если к графику функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ в точке с абсциссой $\boldsymbol{x = a}$ можно провести касательную, непараллельную оси $\boldsymbol{OY}$, то $\boldsymbol{f'(a)}$ выражает ***угловой коэффициент касательной***:

$$\boldsymbol{k = f'(a)}$$

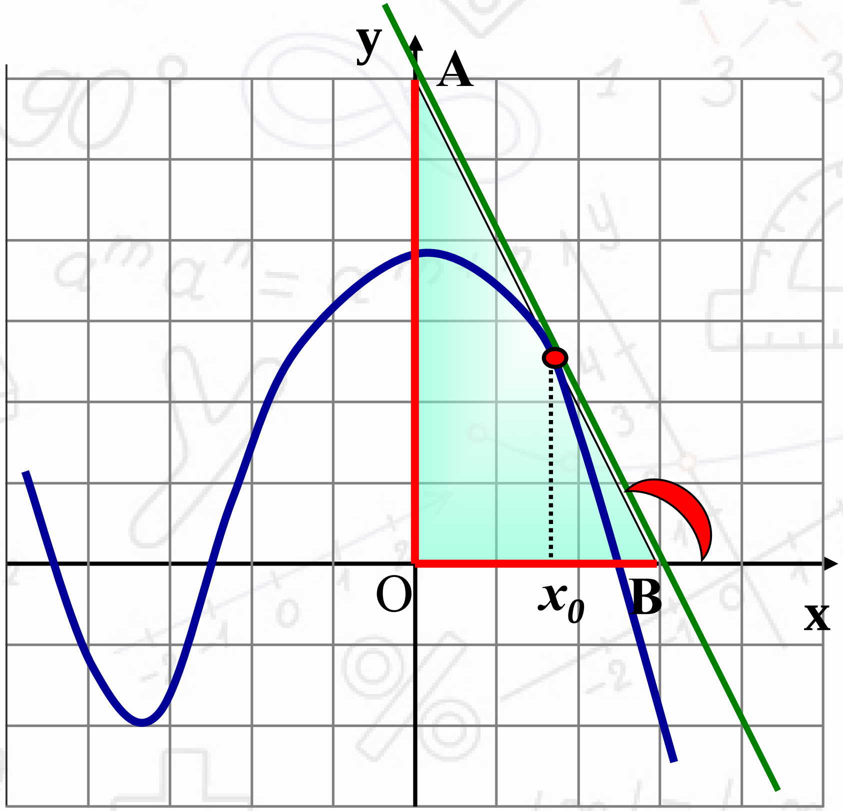
$$\boldsymbol{k = tg\,\alpha \Rightarrow f'(a) = tg\,\alpha}$$



Геометрический смысл производной

№ 4.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.



Решение:

Геометрический смысл производной: $k = tg\,\alpha$. Угол наклона касательной к оси Ox тупой, значит $k < 0$. Из прямоугольного треугольника находим $tg\alpha = 6 : 3 = 2$. Значит, $k = -2$

Ответ:

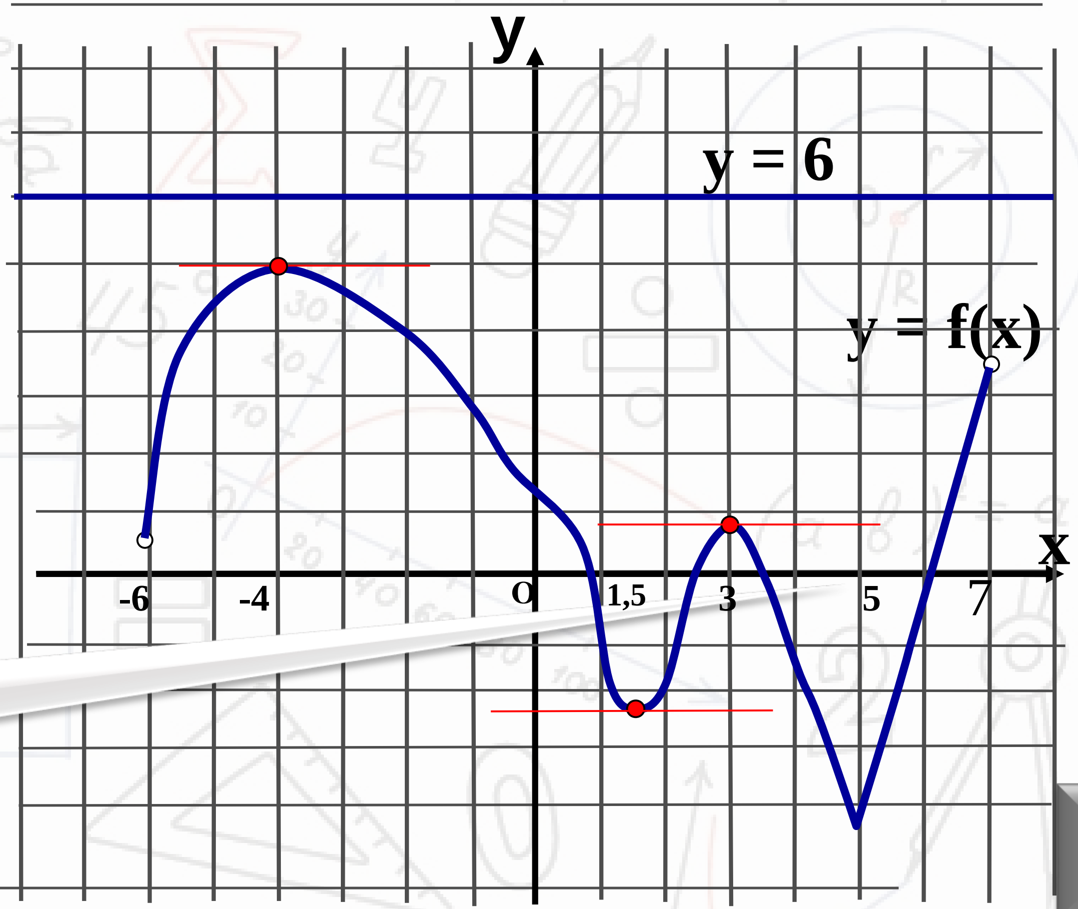
-	2			

Геометрический смысл производной

№ 5.

Непрерывная функция $y = f(x)$ задана на интервале $(-6;\ 7)$. На рисунке *изображен ее график.* Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$.

Ответ: 3



Точка излома. В этой точке производная НЕ существует!

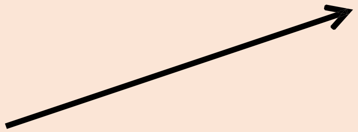
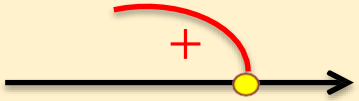
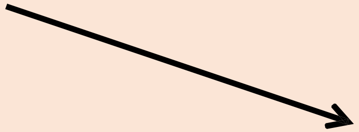
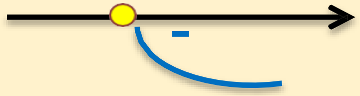
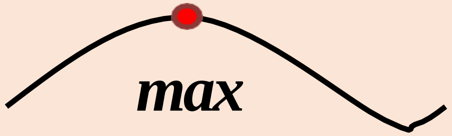
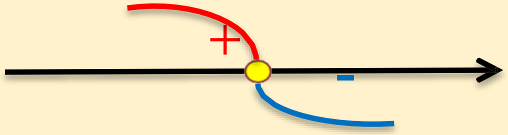
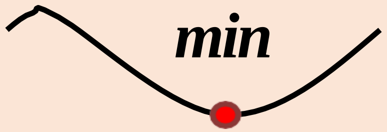
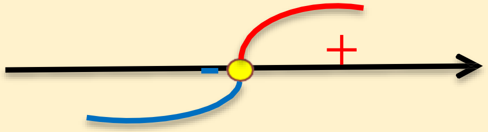
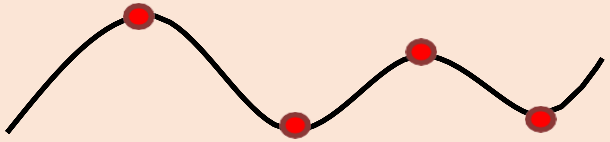
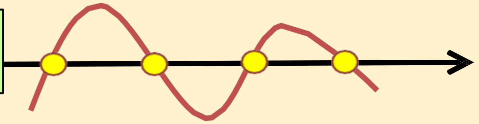
Применение производной к исследованию функций

по графику производной функции

по графику функции

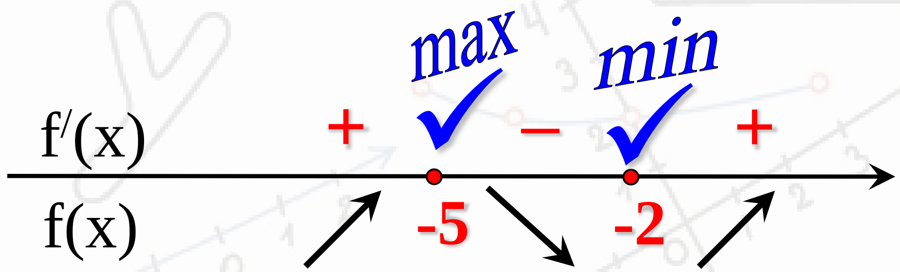
- ✓ Нахождение ***точек экстремума***.
- ✓ Нахождение ***длины промежутка возрастания или убывания функции***.
- ✓ Определение ***количества целых точек,*** в которых производная функции отрицательна, положительна.
- ✓ Нахождение ***количества точек***, в которых производная функции $y = f(x)$ равна **0**.

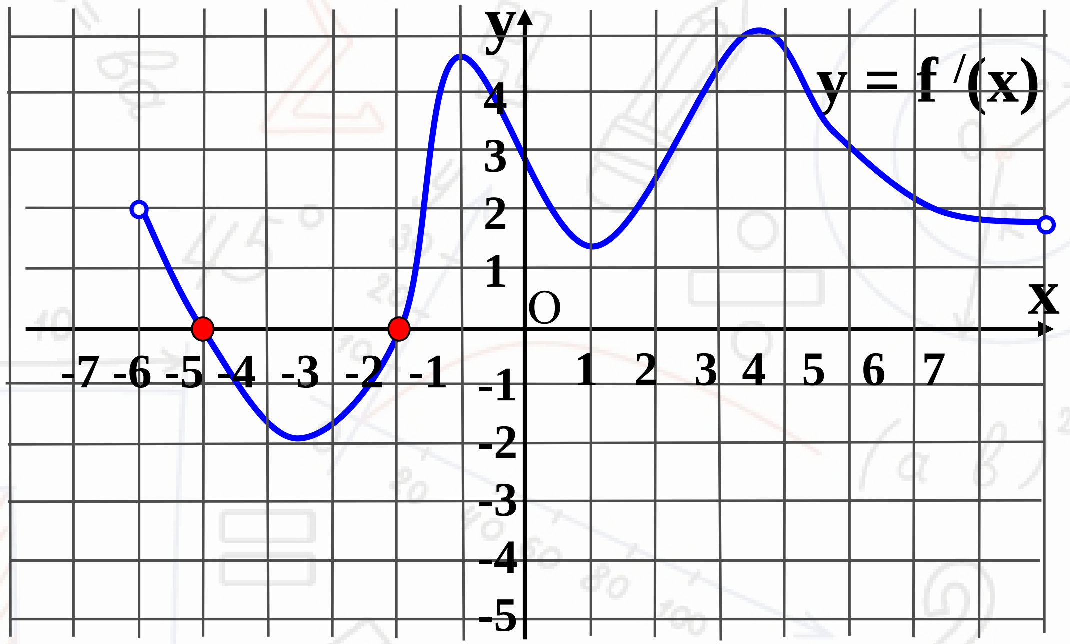
Применение производной к исследованию функций

Ситуация	Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$
Возрастание функции		$f'(x) > 0$ 
Убывание функции		$f'(x) < 0$ 
Максимум функции		
Минимум функции		
Экстремумы функции		$f'(x) = 0$ 
Касательная, параллельная прямой $y = a$		$f'(x) = 0$ 

Применение производной к исследованию функций

№ 6. На рисунке изображен график ***производной*** функции у $= f'(x)$, заданной на промежутке $(-6;\ 8)$. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на экстремум и укажите ***количество ее точек экстремума***.





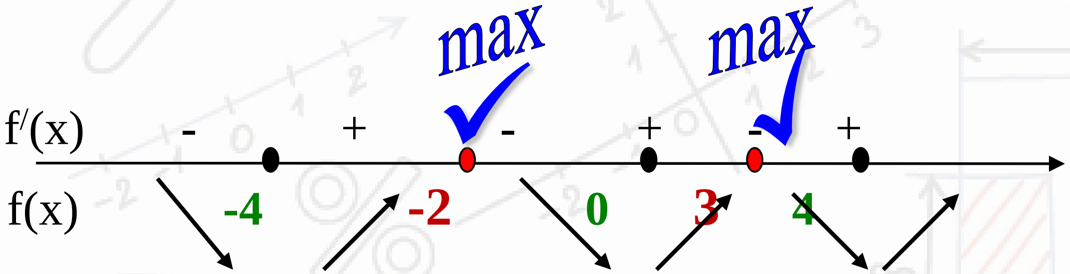
Ответ: 2

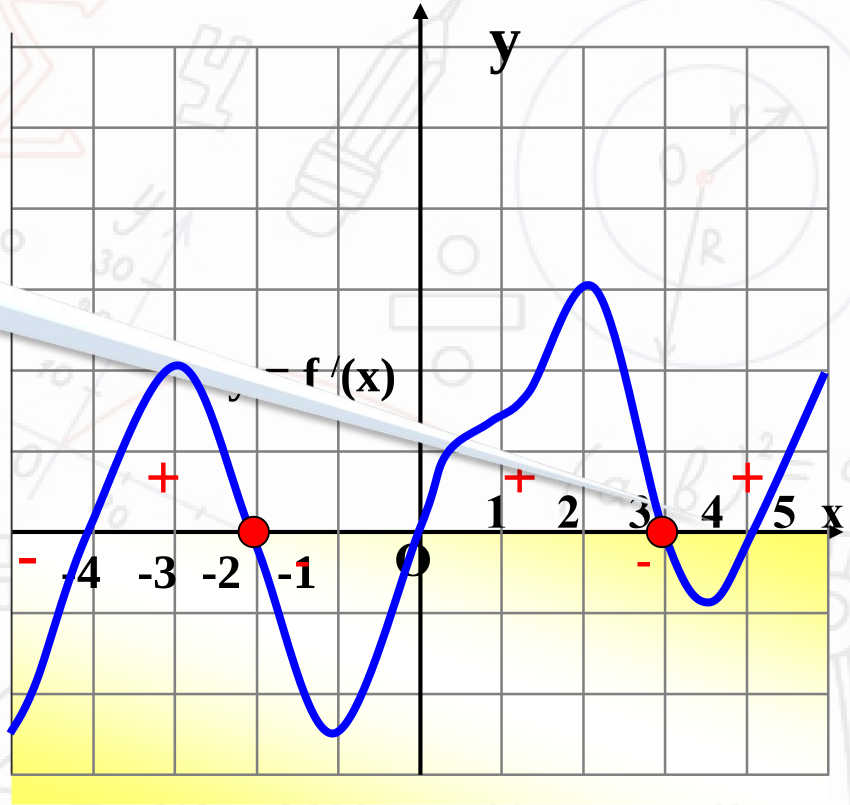
Применение производной к исследованию функций

№ 7.

На рисунке изображен ***график производной*** функции, заданной на промежутке [-5;5]. Исследуйте функцию на монотонность и укажите ***наибольшую точку максимума .***

Из двух точек максимума наибольшая $x_{max} = 3$



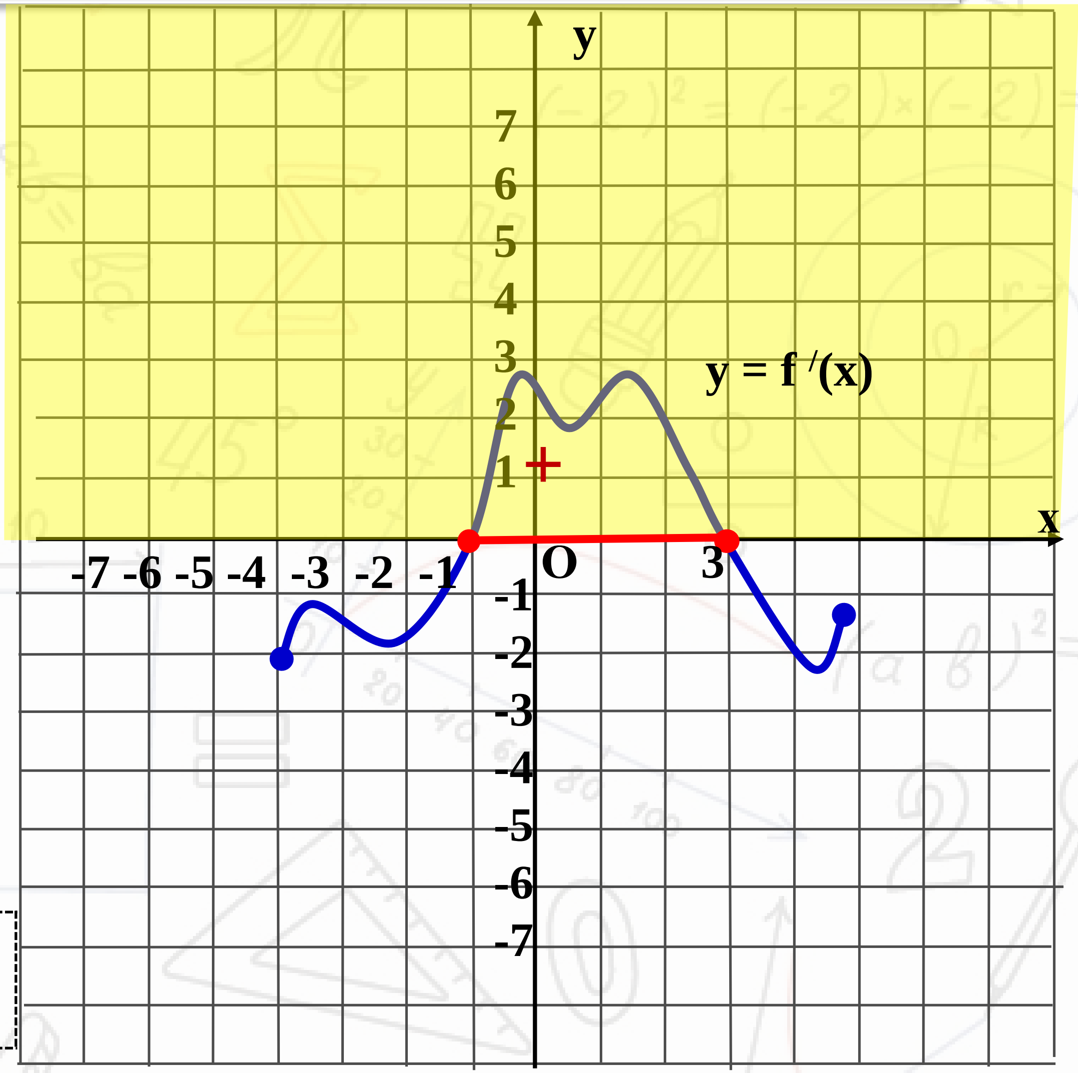


Ответ: 3

Применение производной к исследованию функций

№ 8.

На рисунке изображен график ***производной функции***. Найдите ***длину промежутка возрастания*** этой функции.

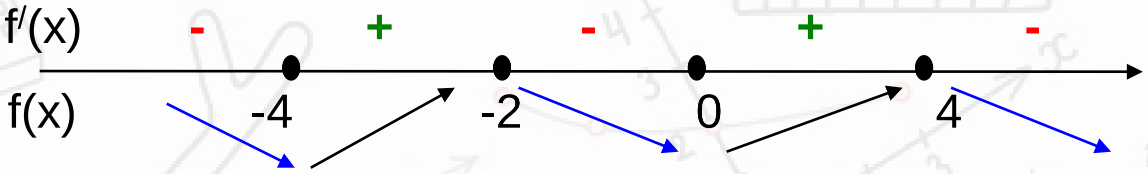


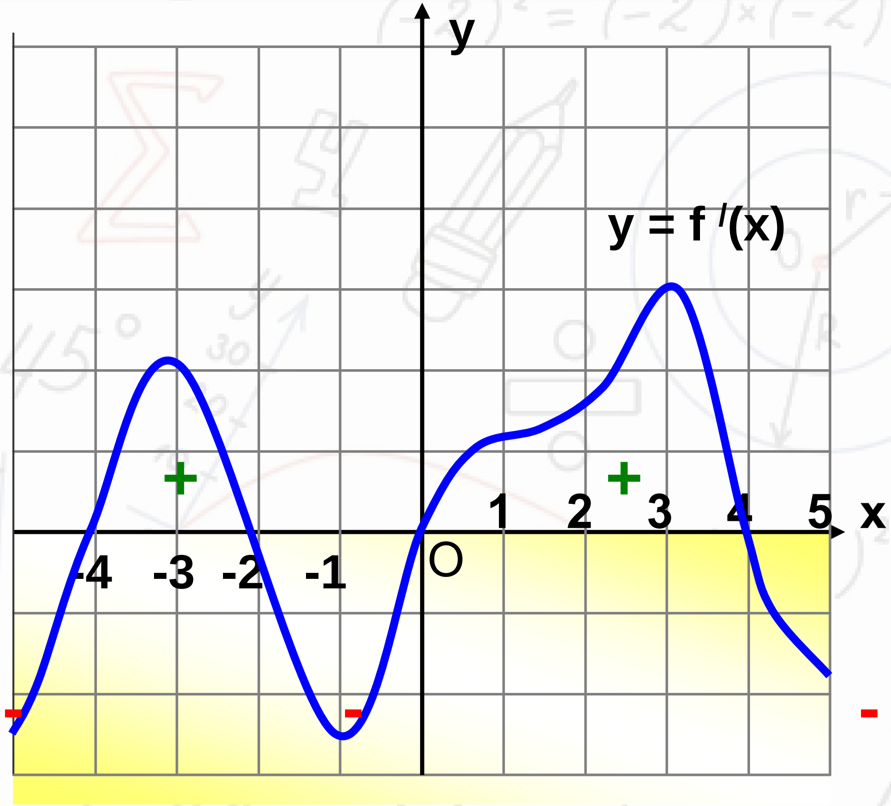
Ответ:

4				

Применение производной к исследованию функций

№ 9. На рисунке изображен график ***производной функции***, заданной на промежутке $[-5; 5]$. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность и укажите ***число промежутков убывания***.



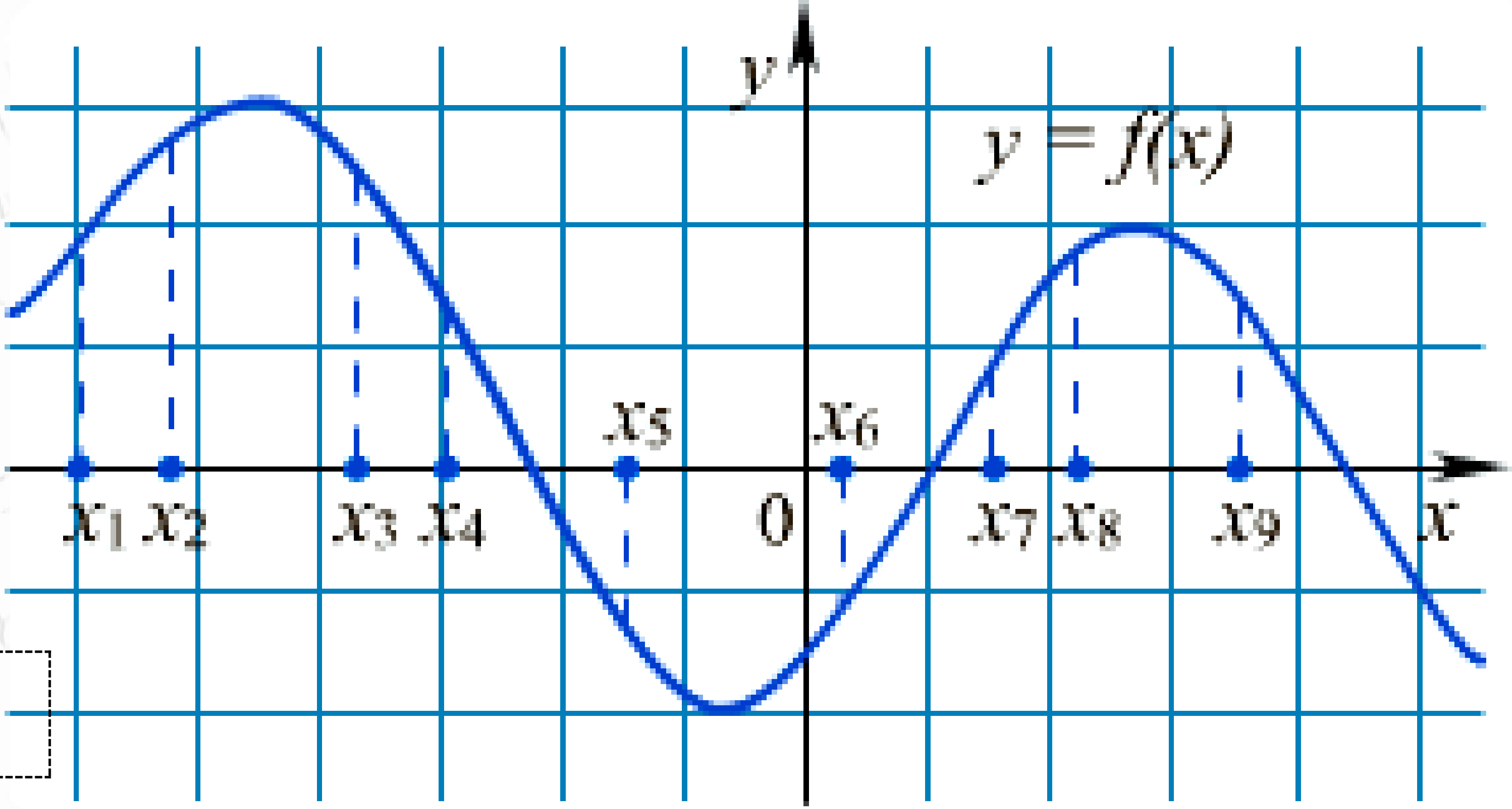


Ответ: 3

Применение производной к исследованию функций

№ 10.

На рисунке изображён <u>**график**</u> дифференцируемой ***функции y = f(x)***. На оси абсцисс отмечены девять точек: x_1 , x_2 , ..., x_9. Найдите все отмеченные точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответе укажите количество этих точек.

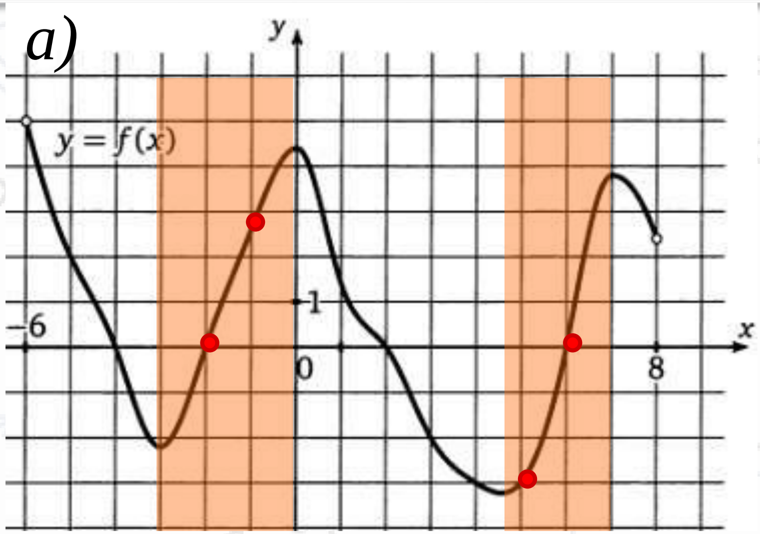


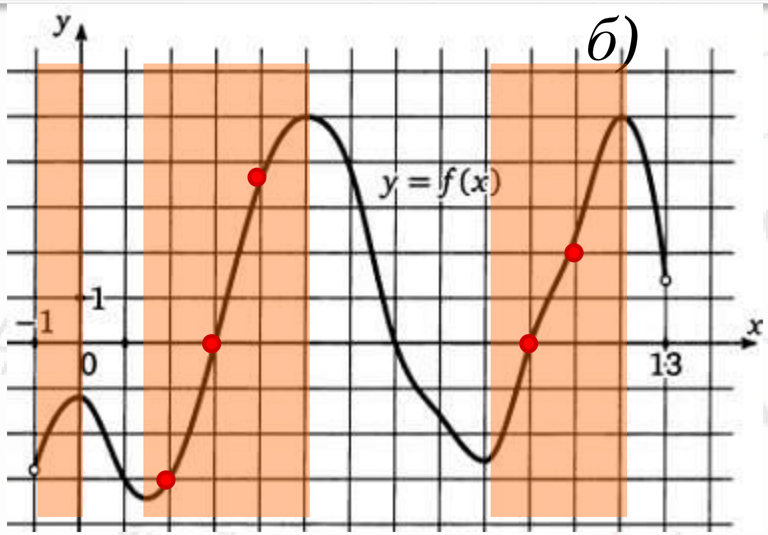
Ответ: 4

Решите самостоятельно

№ 11.

На рисунке изображен ***график функции*** $y = f(x)$, определенной на интервале $(a;b)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.





Ответ: 4

Решение:

$f'(x) > 0$, если $f(x)$ возрастает.

Целые решения при :

x=-2; x=-1; x=5; x=6.

Их количество равно 4.

Ответ: 5

Целые решения при :

x=2; x=3; x=4; x=10; x=11.

Их количество равно 5.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на [a;b]

1. Найти производную функции *f′(x);*
2. Найти стационарные и критические точки функции: *f′(x)=0*;
3. Выбрать из них точки, принадлежащие данному отрезку [a;b];
4. Вычислить значения функции в найденных точках и на концах отрезка, т. е. в точках *a* и *b;*
5. Среди всех вычисленных значениях функции выбрать наибольшее и наименьшее

Наибольшее значение f(x)	Наименьшее значение f(x)

Алгоритм нахождения точек экстремума (максимума или минимума) функции.

1. Найти производную $y = f'(x)$
2. Найти стационарные ($f'(x) = 0$)и критические ($f'(x)$ не существуют) точки функции $y = f(x)$
3. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.
4. На основании теорем и определений сделать вывод о ее точках экстремума