Различные виды уравнений
Задание № 6 профильного ЕГЭ по математике.

Грязнова Галина Петровна
учитель математики, МБОУСОШ № 20
Апшеронского района

Уравнение

Уравнением называется равенство двух выражений с одной или несколькими переменными.

Уравнение с одной переменной имеет вид:

$$\boldsymbol{f(x) = g(x)},$$

где $f(x)$, $g(x)$ – некоторые функции переменной x.

Корнем (решением) уравнения с одной переменной называется число x_0, при подстановке которого вместо x в обе части уравнения получается верное числовое равенство.

Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Множество значений переменной x, при которых определены функции $f(x)$ и $g(x)$, называется областью определения уравнения или областью допустимых значений переменной (ОДЗ).

Уравнения, имеющие одни и те же корни, называются равносильными.

Уравнения, не имеющие корней, также считаются равносильными.

Теоремы о равносильности уравнений

1. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$.

2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + a = g(x) + a$ для любого числа a.

3. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow a \cdot f(x) = a \cdot g(x)$ для любого числа $a \neq 0$.

4. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$, если $h(x)$ имеет смысл в области определения уравнения.

5. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$, если $h(x)$ определена и не обращается в нуль в области определения уравнения.

6. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^{2n+1}(x) = g^{2n+1}(x) = 0, n \in \mathbb{N}$.

7. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^{2n}(x) = g^{2n}(x) = 0, n \in \mathbb{N}, f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$.

Линейное уравнение

Уравнение вида $\boldsymbol{ax+b=0}$, где $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$, называется линейным.

Число корней уравнения зависит от значений a и b.

Линейное уравнение при $\boldsymbol{a \neq 0}$ имеет единственное решение $\boldsymbol{x=-\frac{b}{a}}$;
при $\boldsymbol{a=0}$, $\boldsymbol{b \neq 0}$ – не имеет решений;
при $\boldsymbol{a=0}$, $\boldsymbol{b=0}$ – принимает вид $\boldsymbol{0 \cdot x=0}$ и имеет бесконечное множество решений.

1) Найдите корень уравнения:

$$-\frac{2}{9}x = 1\frac{1}{9}$$

Решение:

$$-\frac{2}{9}x = \frac{10}{9} \quad \Big| \cdot 9$$

$$\boldsymbol{ax + b = 0, a \neq 0, b \neq 0}$$

$$\boldsymbol{ax = -b}$$

$$\boldsymbol{x = -\frac{b}{a}}$$

$$-2x = 10$$

$$x = 10 \div (-2)$$

$$x = -5$$

Ответ: -5

Квадратное уравнение

Квадратным уравнением называется уравнение вида:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где x –переменная, $a, b, c \in \mathbb{R}$, причём $a \neq 0$.

Число корней квадратного уравнения зависит от значения дискриминанта, который вычисляется по формуле: $D = b^2 - 4ac$.

Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D = 0$, то уравнение имеет два равных действительных корня:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

Квадратные уравнения

Уравнение вида $\boldsymbol{ax^2 + px + q = 0}$, где $a = 1$, называется приведённым квадратным уравнением.

Уравнения вида $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$, $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$, $\boldsymbol{ax^2 = 0}$ называются неполными квадратными уравнениями.

В уравнении $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$, $(b \neq 0, c = 0)$
левая часть раскладывается на множители:

$\boldsymbol{x(ax + b) = 0}$, откуда $\boldsymbol{x_1 = 0}$, $\boldsymbol{x_2 = \frac{-b}{a}}$.

Уравнение $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$, $(c \neq 0)$
не имеет корней, если знаки a и c совпадают;

имеют два корня: $\boldsymbol{x_1} = -\sqrt{-\boldsymbol{\frac{c}{a}}}$, $\boldsymbol{x_2} = \sqrt{-\boldsymbol{\frac{c}{a}}}$, если знаки a и c различны.

Уравнение $\boldsymbol{ax^2 = 0}$ имеет два равных корня: $\boldsymbol{x_1 = x_2 = 0}$.

Теорема Виета

Теорема Виета (прямая):

если квадратное уравнение $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ имеет корни, то

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \\ x_1x_2=\frac{c}{a}. \end{cases}$$

Для корней приведённого квадратного уравнения $\boldsymbol{x^2+px+q=0}$ формулы Виета имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q. \end{cases}$$

Теорема Виета (обратная):

если сумма каких-нибудь чисел $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$ равна $-\boldsymbol{\frac{b}{a}}$, а их произведение равно $\boldsymbol{\frac{c}{a}}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$.

1) Найдите корень уравнения

$$x^2 - 17x + 72 = 0.$$

Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

$$\boldsymbol{D = b^2 - 4ac.}$$

$$\boldsymbol{D > 0}$$

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.}$$

Решение:

По теореме, обратной теореме Виета, сумма корней этого уравнения равна 17, а их произведение равно 72. Значит корни равны 8 и 9.

$$x^2 - 17x + 72 = 0$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = 9$$

$$D = (-17)^2 - 4 \cdot 72 = 289 - 288 = 1$$

$$x_1 = \frac{17-\sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 8$$

$$x_2 = \frac{17+\sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 9$$

Ответ: 8.

2) Найдите корень уравнения

$$(2x+7)^2=(2x-1)^2$$

Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них

Решение:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(2x+7)^2=(2x-1)^2$$

$$4x^2+28x+49=4x^2-4x+1$$

$$28x+4x=1-49$$

$$32x=-48$$

$$x=-48\div 32$$

$$x=-1{,}5$$

Ответ :-1,5.

3) Решите уравнение

$$(x-6)^2 = -24x$$

Решение:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$(\mathrm{x}-6)^2 = -24\mathrm{x}$

$\mathrm{x}^2 - 12\mathrm{x} + 36 = -24\mathrm{x}$

$\mathrm{x}^2 + 12\mathrm{x} + 36 = 0$

$(\mathrm{x}+6)^2 = 0$

$\mathrm{x} = -6$

$D = 12^2 - 4 \cdot 36 = 144 - 144 = 0$

X= $\frac{-12}{2}$=-6

Ответ:-6

4) Найдите корень уравнения

$$\frac{1}{3}x^2 = 16\frac{1}{3}$$

Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них

Решение:

$$\frac{1}{3}x^2 = \frac{49}{3}$$

$$x^2 = 49$$

$$x = \pm\sqrt{49}$$

$$x_1 = -7$$

$$x_2 = 7$$

$$x^2 - 49 = 0$$

$$(x-7)(x+7) = 0$$

$x - 7 = 0$ или $x + 7 = 0$

$x = 7$ $\quad\quad$ $x = -7$

Ответ: -7

Уравнения высшей степени

1)Найдите корень уравнения :

$$(x-1)^3 = 8$$

Решение :

Извлекая кубический корень из обеих частей уравнения, получаем

x-1=2 , откуда

x =2+1

x= 3

Ответ: 3

2)Найдите корень уравнения :

$$(x-1)^3 = -8$$

Решение :

Извлекая кубический корень из обеих частей уравнения, получаем

x-1=-2 , откуда

x =-2+1

x= -1

Ответ: -1

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 232-85-78

Дробно-рациональные уравнения

Уравнение f (x)=g(x) называется рациональным, если f (x) и g(x) – рациональные выражения. При этом если хотя бы одно из выражений f(x) и g(x) является дробным, то рациональное уравнение f (x)=g(x) называется дробным.

Простейшее дробно-рациональное уравнение вида $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, где f (x) и g(x)многочлены, равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$$

При решении дробно-рационального уравнения общего вида его либо приводят к простейшему виду $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, либо освобождаясь от знаменателя, приводят к целому рациональному уравнению.

1) Найдите корень уравнения

$$\frac{1}{9x-7}=\frac{1}{2}$$

Решение:

$$\frac{1}{9x-7}=\frac{1}{2} \qquad \text{ОДЗ: } 9x-7\neq 0\,;\ x\neq\frac{7}{9}$$

Числители равны, значит равны и знаменатели

$$9x-7=2$$

$$9x=2+7$$

$$9x=9$$

$$x=1$$

Ответ: 1.

2) Решите уравнение

$$\frac{x-119}{x+7} = -5$$

Решение:

$$\frac{x-119}{x+7} = \frac{-5}{1}$$

ОДЗ: $x \neq 7$

$$x - 119 = -5(x+7)$$

$$6x = 84x + 5x = 119 - 35$$

$$x - 119 = -5x - 35$$

$$x = 84:6$$

$$x = 14$$

Ответ: 14

3) Решите уравнение:

$$x = \frac{6x - 15}{x - 2}$$

Если корней несколько, то в ответе укажите больший из них.

Решение:

$$x = \frac{6x-15}{x-2} \qquad \text{ОДЗ:} x \neq 2$$

$$x(x-2) = 6x - 15$$

$$x^2 - 2x - 6x + 15 = 0$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$x_1 = 3 \in \text{ ОДЗ}$$

$$x_2 = 5 \in \text{ ОДЗ}$$

Ответ: 5

4) Решите уравнение:

$$\frac{x+8}{5x+7}=\frac{x+8}{7x+5}$$

Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите больший из корней.

Решение:

Заметим, что числители дробей равны. Имеем:

$$\frac{x+8}{5x+7}=\frac{x+8}{7x+5} \qquad \text{ОДЗ:} \begin{cases} 5x+7\neq 0, \\ 7x+5\neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\neq -1{,}4 \\ x\neq -\frac{5}{7} \end{cases}$$

$$5x+7=7x+5$$

$$2x=2$$

$$x=1$$

Ответ: 1

5) Решите уравнение

$$\frac{1}{3x-4}=\frac{1}{4x-11}.$$

Решение:

Если две дроби с равным числителем равны, то равны их знаменатели. Имеем:

ОДЗ: $\begin{cases} 3x-4\neq 0 \\ 4x-11\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq \dfrac{4}{3} \\ x\neq \dfrac{11}{4} \end{cases}$

$$3x-4=4x-11$$

$$4x-3x=11-4$$

$$x=7$$

Ответ:7.

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 232-85-78

Иррациональные уравнения

1) Найдите корень уравнения

$$\sqrt{\frac{2x+5}{3}} = 5$$

Решение:

$$\sqrt{\frac{2x+5}{3}} = 5$$

ОДЗ: $2x + 5 > 0$; $x > -2{,}5$

$$\sqrt{f(x)} = a, a \geq 0$$

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)^2 = a^2$$

$$\left(\sqrt{\frac{2x+5}{3}}\right)^2 = 5^2$$

$$\frac{2x+5}{3} = 25$$

$$2x + 5 = 25 \cdot 3$$

$$2x = 75 - 5$$

$$2x = 70$$

$$x = 35$$

Ответ: 35

2) Найдите корень уравнения

$$\sqrt{\frac{1}{15-4x}}=0,2$$

Решение:

$$\sqrt{\frac{1}{15-4x}}=0{,}2 \qquad \text{ОДЗ:}15-4x>0, x<3{,}75$$

$$\sqrt{f(x)}=a, a\geq 0$$

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)^2=a^2$$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{15-4x}}\right)^2=\left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$\frac{1}{15-4x}=\frac{1}{25}$$

$$15-4x=25$$

$$4x=15-25$$

$$4x=-10$$

$$x=-2{,}5$$

Ответ: $-2{,}5$

3) Найдите корень уравнения:

$$\sqrt{-72-17x}=-x.$$

Если корней несколько, в ответе укажите меньший из них.

$\sqrt{f(x)}=a, a\geq 0$

$\left(\sqrt{f(x)}\right)^2=a^2$

Решение:

$\sqrt{-72-17x}=-x$ ОДЗ: $\begin{cases}-72-17x\geq 0\\ -x\geq 0\end{cases}$ $\begin{cases}x\leq \dfrac{-72}{17}\\ x\leq 0\end{cases}$

$\left(\sqrt{-72-17x}\right)^2=(-x)^2$

$-72-17x=x^2$

$x^2+17x+72=0$

$x_1=-9$

$x_2=-8$

Ответ: -9

4) Найдите корень уравнения

$$\sqrt[3]{x-4}=3$$

Решение:

$$\sqrt[3]{\mathrm{x}-4}=3$$

$$\left(\sqrt[3]{\mathrm{x}-4}\right)^3=3^3$$

$$\mathrm{x}-4=27$$

$$\mathrm{x}=27+4$$

$$\mathrm{x}=31$$

Ответ: 31

Показательное уравнение

Показательным называется уравнение, содержащее переменные только в показателе степени.

Уравнение вида $\boldsymbol{a^x = b}$, где $\boldsymbol{a > 0}$ и $\boldsymbol{a \neq 1}$, называется простейшим показательным.

Если $\boldsymbol{b > 0}$, то уравнение имеет единственное решение $\boldsymbol{x = \log_a b}$.

Если $\boldsymbol{b \leq 0}$, то уравнение не имеет корней.

Решение показательных уравнений основано на свойстве степеней две степени с одним и тем же положительным и отличным от единицы основанием равны тогда и только тогда, когда равны их показатели.

Приведение обеих частей уравнения к одному основанию

Приведение обеих частей уравнения к одному основанию

$$a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}.$$

Полученное уравнение при $a > 0$ и $a \neq 1$ равносильно уравнению $f(x) = \varphi(x)$.

Уравнение вида $a^{f(x)} = 1$, $a > 0$, $a \neq 1$ равносильно уравнению $f(x) = 0$, так как $a^0 = 1$.

1) Найдите корень уравнения:

$$9^{-5+x} = 729$$

Решение:

$9^{-5+x} = 729$

$9^{-5+x} = 9^3$

$-5 + x = 3$

$x = 3 + 5$

$x = 8$

$a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1$

$f(x) = g(x)$

Ответ: 8

2) Найдите корень уравнения

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8}=\frac{1}{9}$$

Решение:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8}=\frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$$

$$x-8=2$$

$$x=2+8$$

$$x=10$$

$$\boldsymbol{a^{f(x)}=a^{g(x)},\ a>0,\ a\neq 1}$$

$$\boldsymbol{f(x)=g(x)}$$

Ответ: 10

3) Найдите корень уравнения

$$7^{18,5x+0,7}=\frac{1}{343}.$$

Решение:

$$7^{18,5x+0,7}=\frac{1}{343}$$

$$7^{18,5x+0,7}=\left(\frac{1}{7}\right)^{3}$$

$$7^{18,5x+0,7}=7^{-3}$$

$$18,5x+0,7=-3$$

$$18,5x=-3-0,7$$

$$18,5x=-3,7$$

$$x=-3,7:18,5$$

$$x=-0,2$$

$$\boldsymbol{a^{f(x)}=a^{g(x)},\ a>0,\ a\neq 1}$$

$$\boldsymbol{f(x)=g(x)}$$

Ответ: $-0,2$

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 232-85-78

4) Найдите корень уравнения

$$8^{9-x} = 64^x$$

Решение:

$8^{9-x} = 64^x$

$8^{9-x} = 8^{2x}$

$9 - x = 2x$

$3x = 9$

$x = 3$

$$\boldsymbol{a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1}$$

$$\boldsymbol{f(x) = g(x)}$$

Ответ: 3

5) Найдите корень уравнения:

$$2^{3+x} = 0,4 \cdot 5^{3+x}$$

Решение:

$$2^{3+x} = 0,4 \cdot 5^{3+x} \quad \Big| : 5^{3+x}$$

$$y = a^x$$

$$a > 0, a \neq 1$$

$$\frac{2^{3+x}}{5^{3+x}} = \frac{0,4 \cdot 5^{3+x}}{5^{3+x}}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{3+x} = 0,4$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{3+x} = \frac{2}{5}$$

$$3 + x = 1$$

$$x = 1 - 3$$

$$x = -2$$

Ответ: -2

Логарифмическое уравнение

Логарифмическим называется уравнение, содержащее переменные только под знаком логарифма.

1. Логарифмические уравнения, решаемые по определению логарифма

Уравнение вида $\boldsymbol{\log_a f(x) = b}$ при $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$ равносильно уравнению $\boldsymbol{f(x) = a^b}$.

1) Найдите корень уравнения

$$\log_3(5 + x) = 3.$$

$\boldsymbol{\log_a b = c}$

$\boldsymbol{a^c = b}$

$\boldsymbol{a > 0, a \neq 1, b > 0}$

Решение:

$\log_3(5 + x) = 3$ ОДЗ : $5 + x > 0 \Rightarrow x > -5$

$5 + x = 3^3$

$x = 27 - 5$

$x = 22$

Ответ:22

2) Найдите корень уравнения

$$\log_{\frac{1}{2}}(9-x)=-2$$

Решение:

$\log_{\frac{1}{2}}(9-x)=-2$ ОДЗ: $9-x>0, x<9$

$9-x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$9-x=2^2$

$9-x=4$

$x=9-4$

$x=5$

Ответ: 5

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 232-85-78

2. Уравнения первой степени относительно логарифма, решаемые потенцированием

Уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ при $a > 0$ и $a \neq 1$ равносильны каждой из следующих систем:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \text{ или } \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

При решении таких уравнений переходят только к одной из указанных систем (более простой) либо к уравнению $f(x) = g(x)$,
корни которого проверяют подстановкой в исходное уравнение, так как они могут быть посторонними для него.

3) Найдите корень уравнения

$$\log_8(x + 6) = \log_8(3x - 8)$$

$$\boldsymbol{\log_a f(x) = \log_a g(x)}$$
$$\boldsymbol{f(x) = g(x)}$$
$$\boldsymbol{a > 0, a \neq 1, g(x) > 0, f(x) > 0}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x + 6 > 0 \\ 3x - 8 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > -6 \\ x > \dfrac{8}{3} \end{cases}$ $\Rightarrow x > \dfrac{8}{3}$

Решение:

$\log_8(x + 6) = \log_8(3x - 8)$

$x + 6 = 3x - 8$

$2x = 14$

$x = 7$

Ответ :7

4) Найдите корень уравнения

$$\log_5(x^2+2x)=\log_5(x^2+10)$$

$$\log_a f(x)=\log_a g(x)$$
$$f(x)=g(x)$$
$$a>0, a\neq 1, g(x)>0, f(x)>0$$

Решение:

$\log_5(x^2+2x)=\log_5(x^2+10)$

ОДЗ: $x^2+2x>0 \Rightarrow x\in(-\infty,-2)(0,+\infty)$

$x^2+2x=x^2+10$

$2x=10$

$x=5$

Ответ: 5

5) Найдите корень уравнения

$$\log_3(12 - x) = 3\log_3 4.$$

$\boldsymbol{\log_a b^r = r\log_a b, a > 0, a \neq 1, b > 0}$

Решение:

$\log_3(12 - x) = 3\log_3 4$

$\log_3(12 - x) = \log_3 4^3$

$12 - x = 64$

$x = 12 - 64$

$x = -52$

ОДЗ: $12 - x > 0$, $x < 12$

Ответ: -52

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ,

ЖЕЛАЮ УСПЕХОВ!

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 232-85-78