Геометрия.
Тела и поверхности вращения.
Задание 3 профильного уровня (11, 13 базового уровня)

Андрафанова Наталия Владимировна
Кубанский казачий кадетский корпус
имени атамана М.П.Бабыча, г. Краснодар
учитель математики

Спецификация КИМ ЕГЭ

1.Часть 1 профильного уровня содержит 7 заданий базового уровня сложности (задания 1-4, 6-8). Правильное выполнение задания оценивается 1 баллом (22% от общего количества баллов).

2.Среди этих заданий три задания геометрического блока: задача по планиметрии, задача на координаты и векторы, задача по стереометрии.

3.Для выполнения задания 3 (задача по стереометрии) профильного уровня выделено примерно 3 мин. Для выполнения заданий 11, 13 базового уровня (задача по стереометрии) выделено 11 мин и 8 мин соответственно.

ЕГЭ по математике, профильный уровень (геометрический блок)*

№ задания	Уровень сложности	Средний процент выполнения	Проверяемый элемент содержания/умения	Примерное время выполнения (в мин)
1	Б	72	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	3
2	Б	60	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	3

Из-за неразвитости пространственных представлений и незнания формул объемов тел значительное число участников экзамена получили неверный результат.

Для выполнения геометрических задач требуется не формальное, а развитое наглядное представление об отношениях объемов круглых тел.

- Данные из методических рекомендаций для учителей, подготовленных на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2023 года по математике

ЕГЭ по математике, профильный уровень (геометрический блок)*

№ задания	Уровень сложности	Средний процент выполнения	Проверяемый элемент содержания/умения	Примерное время выполнения (в мин)
13	П	2,1	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	20
16	П	3,2	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	35

Заметный рост выполнения геометрических заданий части 1 экзаменационной работы создает хорошие предпосылки для роста выполнения геометрических заданий части 2, в том числе стереометрического задания.

Основные сложности в выполнении этого задания и высокий процент не приступивших к выполнению этого задания связаны с фактическим игнорированием в значительном количестве школ формирования таких важных умений, как решение двух–четырехходовых стереометрических задач.

Большой разрыв результатов решения задания по стереометрии части 2 и этих заданий части 1 говорит о том, что на уроках ограничиваются лишь решением простейших наглядных и вычислительных заданий. Отмечая важность развития умений выполнять такие задания для успешного продолжения образования не только по инженерным, но и по IT-специальностям, следует обратить внимание учителей на необходимость усиления внимания к курсу стереометрии, в особенности к выработке умения решать задачи различными методами, как геометрическими, так и аналитическими.

ЕГЭ по математике, базовый уровень (геометрический блок)

№ задания	Уровень сложности	Проверяемый элемент содержания/умения	Примерное время выполнения (в мин)
11	Б	Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин, использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы	11
13	Б	Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин, использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы	8

11 задание

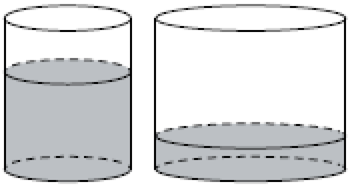
Только треть участников экзамена верно ответила на вопрос задачи, при этом пятая часть участников даже не приступала к решению из-за неразвитости пространственных представлений.

13 задание

Базовое задание по стереометрии выполняет заметно менее половины участников экзамена; это в сочетании с уровнем решения планиметрических задач показывает, что требуется существенная перестройка курсов стереометрии базового уровня, так как более половины школьников фактически не готовы к его освоению.

Демонстрационный вариант ЕГЭ 2024 г. Профильный уровень.

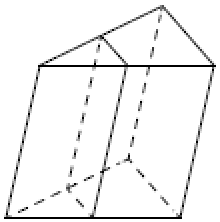
3 В первом цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. Эту жидкость перелили во второй цилиндрический сосуд, диаметр основания которого в 2 раза больше диаметра основания первого. На какой высоте будет находиться уровень жидкости во втором сосуде? Ответ дайте в сантиметрах.



Ответ: ___________________________.

ИЛИ

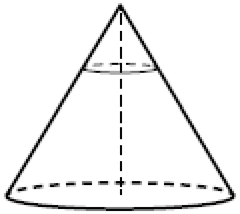
Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 24. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



Ответ: ___________________________.

ИЛИ

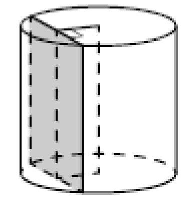
Через точку, лежащую на высоте прямого кругового конуса и делящую её в отношении $1:2$, считая от вершины конуса, проведена плоскость, параллельная его основанию и делящая конус на две части. Каков объём той части конуса, которая примыкает к его основанию, если объём всего конуса равен 54?



Ответ: ___________________________.

Демонстрационный вариант ЕГЭ 2024 г. Базовый уровень.

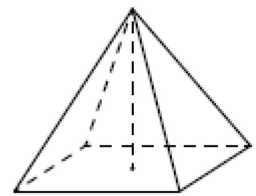
13 Радиус основания цилиндра равен 13, а его образующая равна 18. Сечение, параллельное оси цилиндра, удалено от неё на расстояние, равное 12. Найдите площадь этого сечения.



ИЛИ

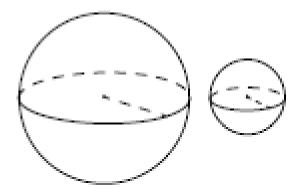
Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 4, а боковое ребро равно $\sqrt{17}$.

Ответ:

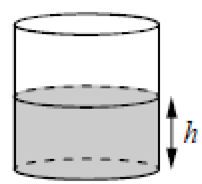


ИЛИ

Даны два шара радиусами 9 и 3. Во сколько раз площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего?

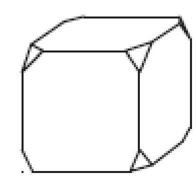


11 Вода в сосуде цилиндрической формы находится на уровне $h = 80$ см. На каком уровне окажется вода, если её перелить в другой цилиндрический сосуд, у которого радиус основания в 4 раза больше, чем у данного? Ответ дайте в сантиметрах.



ИЛИ

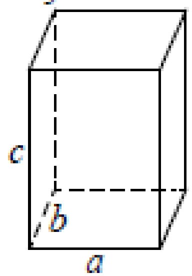
От деревянного кубика отпилили все его вершины (см. рисунок). Сколько граней у получившегося многогранника (невидимые рёбра на рисунке не изображены)?



Справочные материалы по геометрии (базовый уровень)

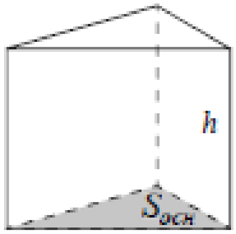
Площади поверхностей и объёмы тел

Прямоугольный параллелепипед



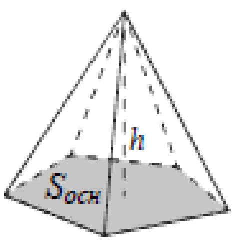
$$V = abc$$

Прямая призма



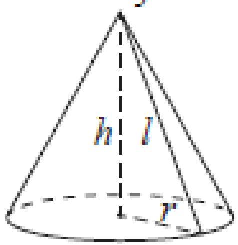
$$V = S_{\text{осн}} h$$

Пирамида



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$$

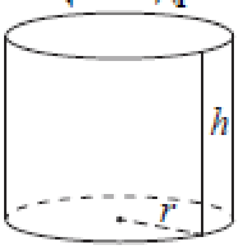
Конус



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$S_{\text{бок}} = \pi r l$$

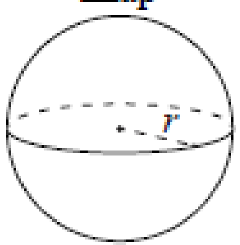
Цилиндр



$$V = \pi r^2 h$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r h$$

Шар

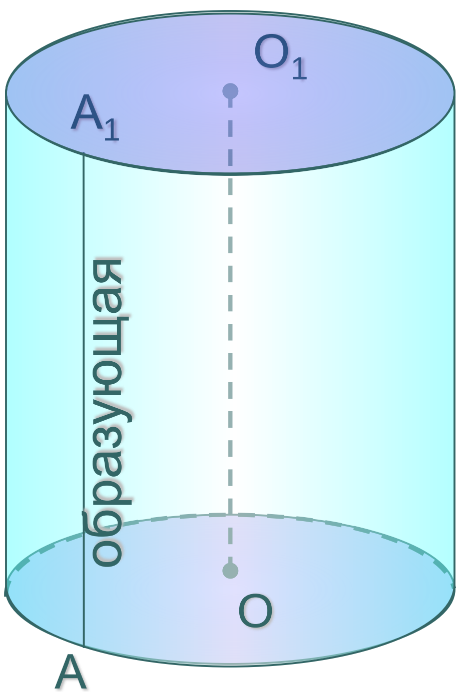


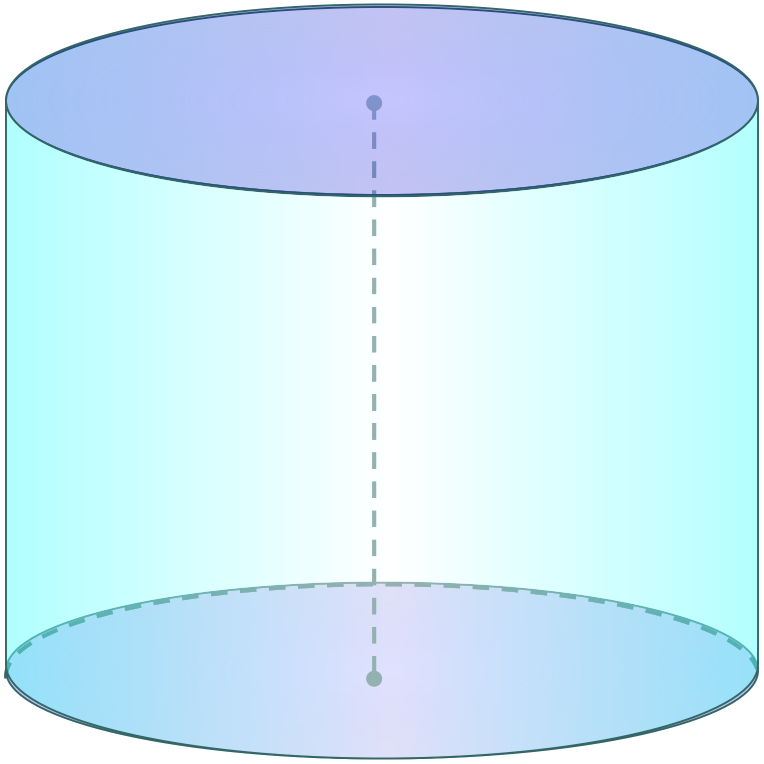
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$S = 4\pi r^2$$

1.Цилиндр*

Тело ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами, называется **цилиндром.**
Цилиндрическая поверхность называется **боковой поверхностью цилиндра**, а круги – **основаниями цилиндра.**
Образующие цилиндрической поверхности называются **образующими цилиндра,** прямая OO_1 - **осью цилиндра.**





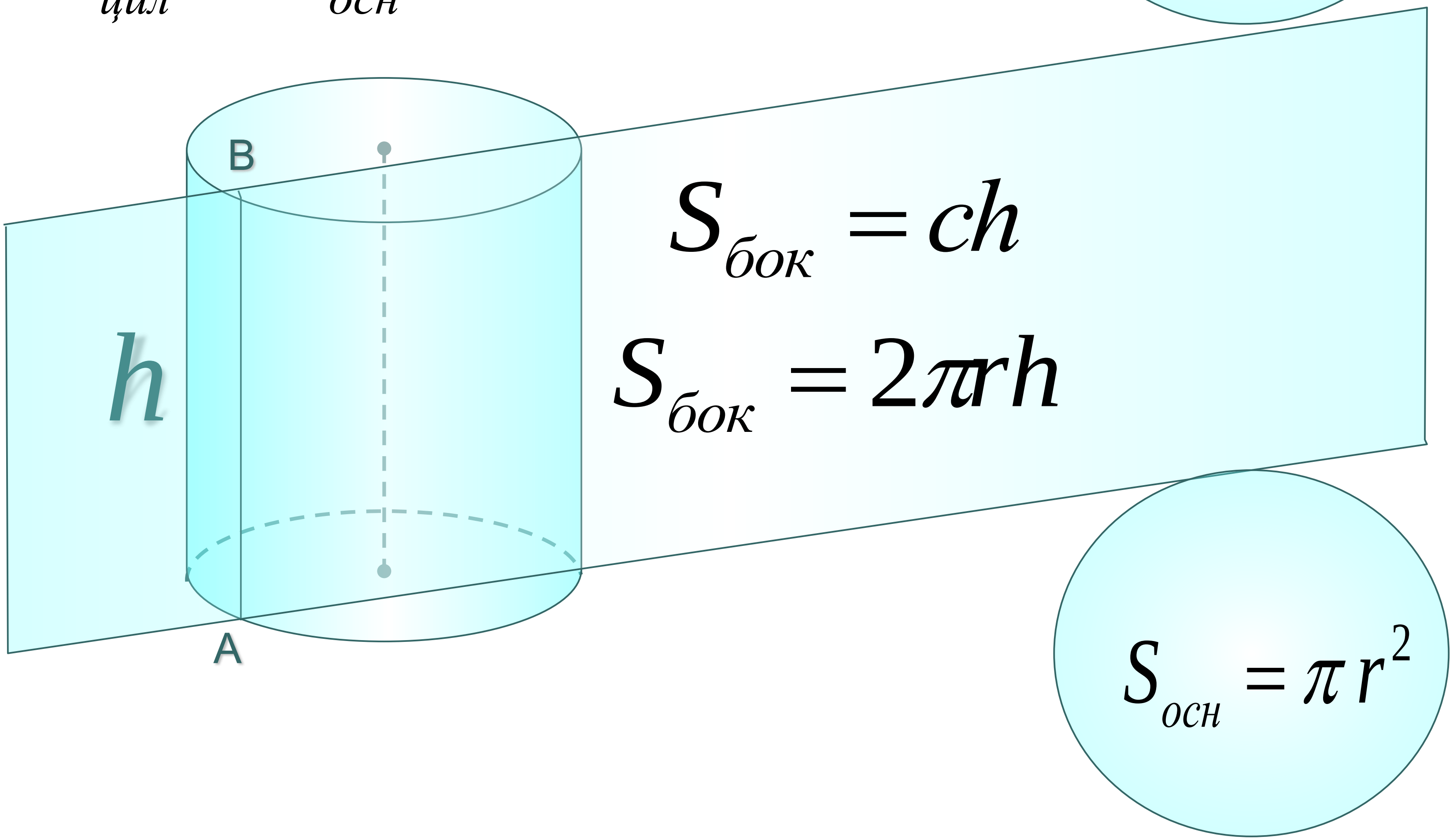
* Учебник Геометрия 10-11 классы. Л.С. Атанасян и др.

Формулы

$$S_{цил} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

$$V_{цил} = S_{осн} h = \pi r^2 h$$

$$S_{осн} = \pi r^2$$



$$S_{бок} = ch$$

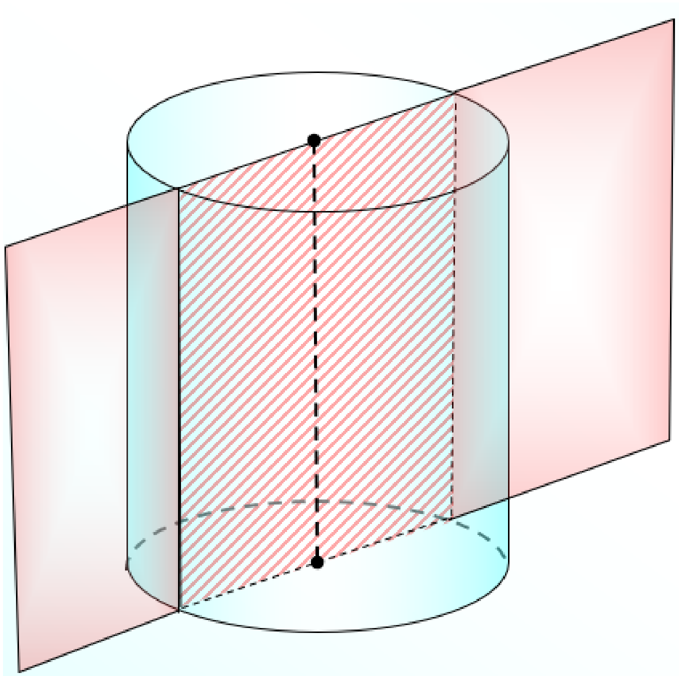
$$S_{бок} = 2\pi rh$$

$$S_{осн} = \pi r^2$$

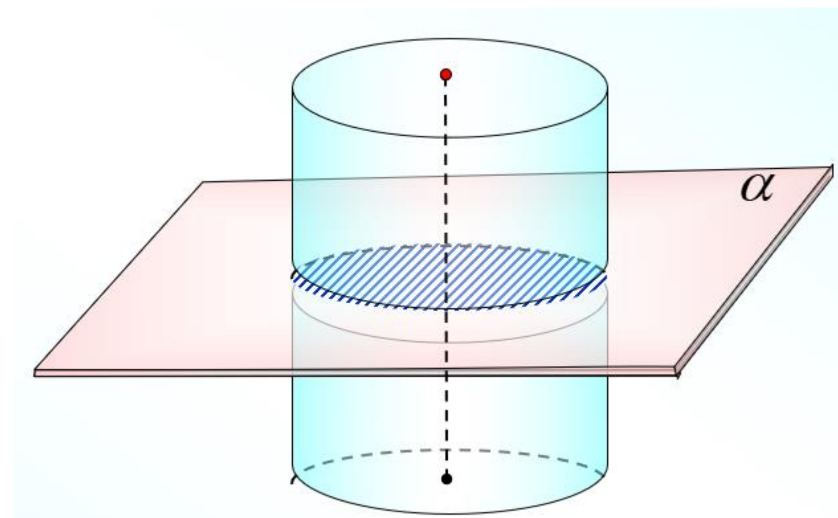
Площадь боковой поверхности цилиндра – площадь ее развертки

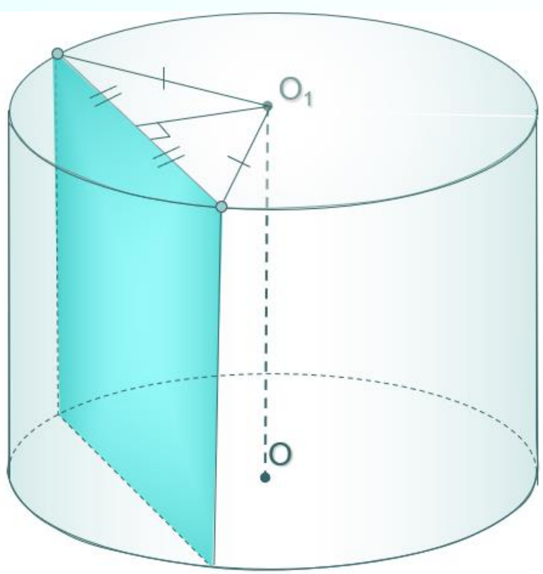
Сечения цилиндра плоскостью

1.Осевое сечение цилиндра - прямоугольник.



2.Сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной к оси – круг.

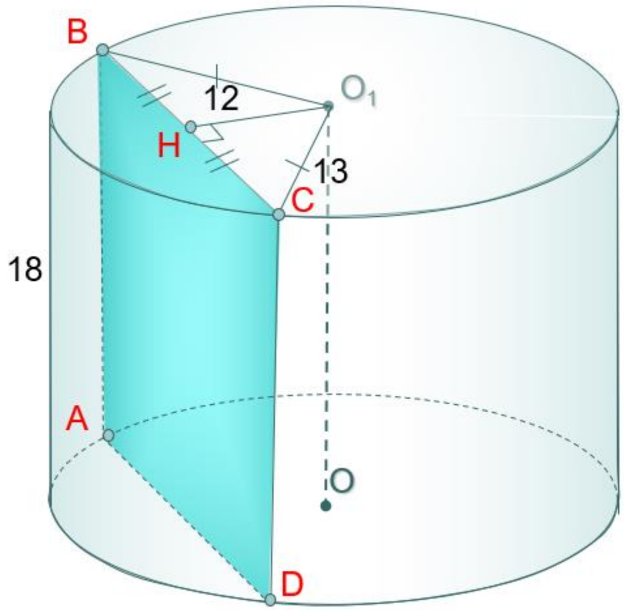




3.Сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра – прямоугольник.

Задачи по теме «Цилиндр» (демонстрационный вариант)

Радиус основания цилиндра равен 13, а его образующая равна 18. Сечение, параллельное оси цилиндра, удалено от нее на расстояние, равное 12. Найдите площадь этого сечения.



Решение.

1.Сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра – прямоугольник ABCD.

2.Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон AB*BC.
AB – *высота* цилиндра (*образующая*).

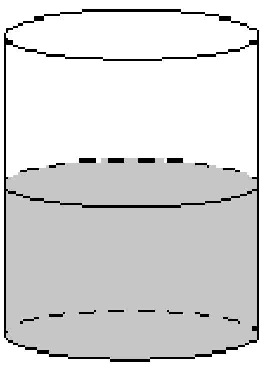
3.BC найдем из ΔBCO_1 (равнобедренный).
Расстояние (*перпендикуляр*) – высота HO_1.
Высота является медианой в равнобедренном треугольнике $\Rightarrow$ BH=CH.

4.CH найдем из ΔCHO_1 (прямоугольный) по теореме Пифагора:
$CO_1^2=CH^2+HO_1^2$, $CH=5 \Rightarrow BC=2*5=10$.

5.S=AB*BC, S=18*10=180. *Ответ: 180.*

Задачи по теме: «Цилиндр»

Вода в сосуде цилиндрической формы находится на уровне $h=80$ *см. На каком уровне окажется вода, если ее перелить в другой цилиндрический сосуд, у которого радиус основания в 4 раза больше, чем у данного? Ответ дайте в сантиметрах.*



Решение.

1.Сосуды имеют форму цилиндра. Объем цилиндра находится по формуле: $V=\pi r^2 h$, r - радиус основания, h - высота.

2.Объем жидкости в первом сосуде: $V_1=\pi r^2\cdot 80$.
Объем жидкости во втором сосуде: $V_2=\pi(4r)^2\cdot h$.

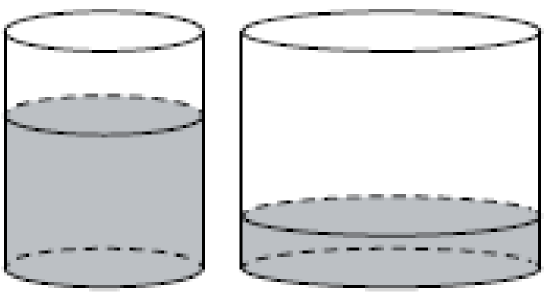
3.Так как жидкость переливали из одного сосуда в другой, то объем жидкости не изменился: $V_1=V_2$.

$$\pi r^2\cdot 80=\pi(4r)^2\cdot h,$$
$$\pi r^2\cdot 80=\pi\cdot 16r^2\cdot h,$$
$$80=16\cdot h,$$
$$h=5 \text{ (см)}$$

Ответ: 5.

Задачи по теме «Цилиндр»

В первом цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. Эту жидкость перелили во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра основания первого. На какой высоте будет находиться уровень жидкости во втором сосуде? Ответ дайте в сантиметрах.



Решение.

1.Сосуды имеют форму цилиндра. Объем цилиндра находится по формуле: $V=\pi r^2 h$, r - радиус основания, h - высота.

2.Объем жидкости в первом сосуде: $V_1=\pi r^2\cdot 16$.
Объем жидкости во втором сосуде: $V_2=\pi(2r)^2\cdot h$.

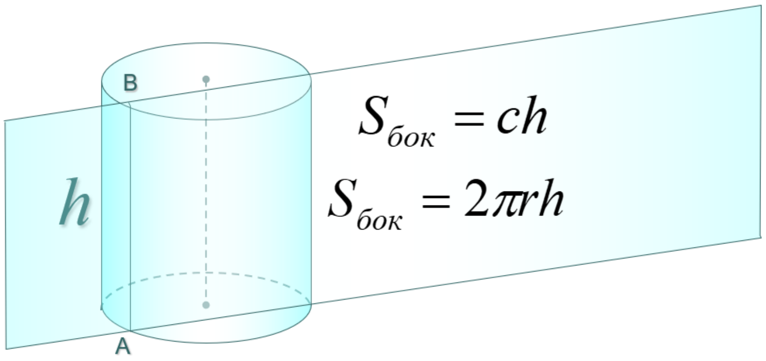
3.Так как жидкость переливали из одного сосуда в другой, то объем жидкости не изменился: $V_1=V_2$.

$$\pi r^2\cdot 16=\pi(2r)^2\cdot h,$$
$$\pi r^2\cdot 16=\pi\cdot 4r^2\cdot h,$$
$$16=4\cdot h,$$
$$h=4 \text{ (см)}$$

Ответ: 4.

Задачи по теме: «Цилиндр» (из банка ФИПИ)

Площадь боковой поверхности цилиндра равна 20π, а высота равна 4. Найдите диаметр основания.



Решение.

Развертка боковой поверхности цилиндра – прямоугольник.

Одна сторона –образующая (высота) цилиндра (h), другая сторона – длина окружности ($2\pi r$).

По формуле нахождения площади боковой поверхности: $S_{бок}=2\pi rh$ получаем:

$20\pi=2\pi r\cdot 4$

$20=8r$

$r=2,5$

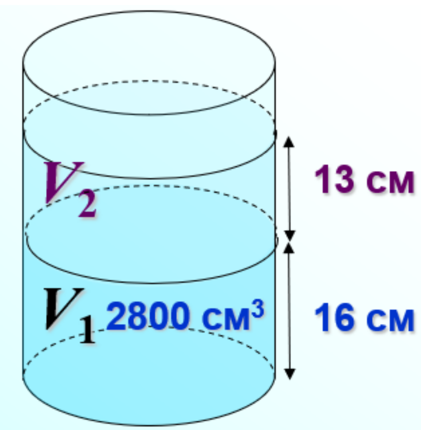
$d=2r=2\cdot 2,5=5$ (см)

Ответ: 5.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна 12π, а диаметр основания равен 6. Найдите высоту цилиндра.

Задачи по теме: «Цилиндр» (из банка ФИПИ)

В цилиндрический сосуд налили 2800 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 16 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 13 см. Найдите объём детали. Ответ выразите см^3.



$$V_{цил} = S_{осн} h = \pi r^2 h$$

Решение.

Из курса физики известно, что объем детали будет равен объему вытесненной жидкости.

I способ

Найдем отношение объемов: $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\cancel{S}_{осн} \cdot h_1}{\cancel{S}_{осн} \cdot h_2} = \dfrac{h_1}{h_2}$

$$\frac{\overset{2800}{V_1}}{V_2} = \frac{\overset{16}{h_1}}{\underset{13}{h_2}} \qquad V_2 = 2275\left(см^3\right)$$

II способ

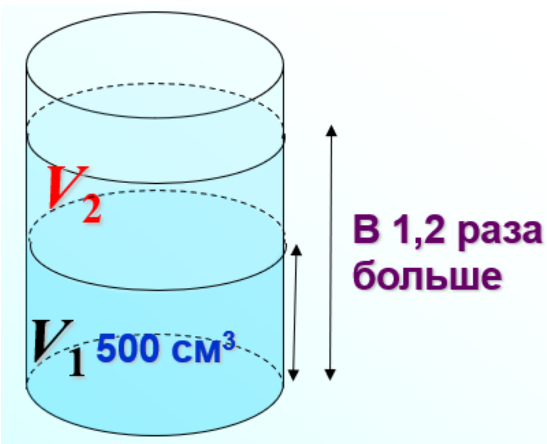
Найдем площадь основания: $S_{осн} = \dfrac{V_{цил}}{h} = \dfrac{2800}{16} = 175\left(см^2\right)$

Найдем объем вытесненной жидкости: $V_{цил} = S_{осн} h = 175 \cdot 13 = 2275\left(см^3\right)$

Ответ: 2275.

Задачи по теме: «Цилиндр» (из банка ФИПИ)

В цилиндрический сосуд налили 500 см^3 воды. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в 1,2 раза. Найдите объём детали. Ответ выразите см^3.



Решение.

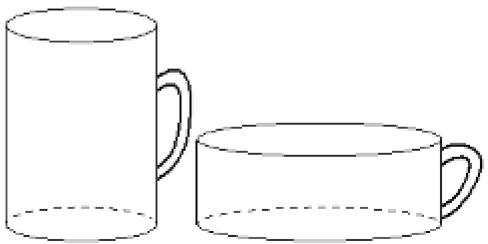
1.Найдем объем жидкости в сосуде после погружения детали: $500 \cdot 1{,}2 = 600$ (см^3).

2.Найдем объем детали: $600 - 500 = 100$ (см^3).

Ответ: 100.

Задачи по теме: «Цилиндр» (из банка ФИПИ)

Первая цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в три раза шире. Найдите отношение объёма второй кружки к объёму первой.



Решение.

1.Пусть высота первой кружки h, а радиус основания r. Тогда $V_1=\pi r^2 h$.

2.Первая кружка вдвое выше второй, значит, вторая вдвое ниже первой, т.е. ее высота равна $h/2$.

Вторая кружка в три раза шире первой, т.е. ее радиус равен $3r$.

Тогда $V_2=\pi(3r)^2\frac{h}{2}$.

3.Найдем отношение объемов:

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\pi(3r)^2\frac{h}{2}}{\pi r^2 h}=\frac{\cancel{\pi}\cdot 9\cancel{r}^2\cdot\frac{\cancel{h}}{2}}{\cancel{\pi}\cancel{r}^2\cancel{h}}=\frac{9\cdot\frac{1}{2}}{1}=\frac{9}{2}=4,5$$

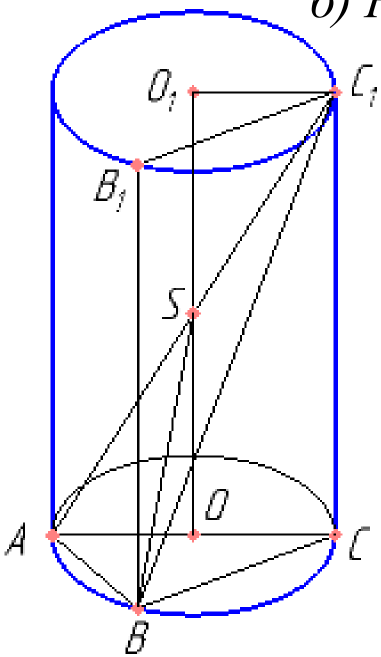
Ответ: 4,5.

Задачи по теме: «Цилиндр» (из банка ФИПИ)

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1 , причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите объём цилиндра, если $AB=7$, $BB_1=24$, $B_1C_1=10$.



Решение.

1.Д.п. CC_1–образующая, $C\in$плоскости основания

Д.п. AC – диаметр ($AC_1\cap OO_1=S$ по условию, $OO_1 || CC_1$, $O\in AC$)

ΔABC––прямоугольный, $\angle ABC=90^0$, $AB\perp BC$.

$AB \in$ плоскости основания, $BB_1 \perp$ плоскости основания, $AB\perp BB_1$.

$BC\cap BB_1=B$, $AB\perp(CBB_1)\Rightarrow AB\perp BC_1$ ч.т.д.

2. $V_{цил}=S_{осн}\cdot h$

$BC=B_1C_1=10$, $AB=7$, $S_{осн}=(AB\cdot BC)/2=7\cdot 10/2=35$

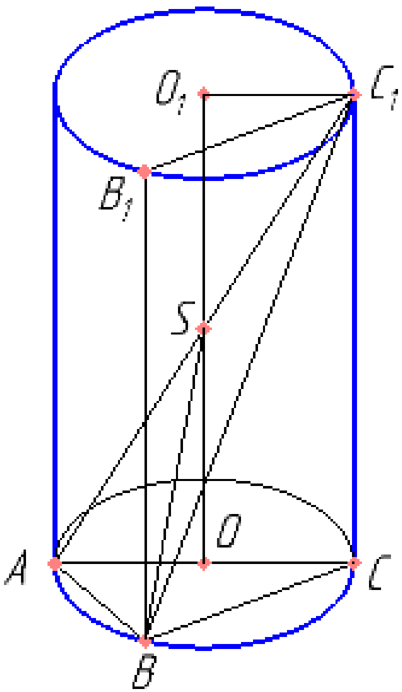
$V_{цил}=S_{осн}\cdot h=35\cdot 24=840$.

Задачи по теме: «Цилиндр» (из банка ФИПИ)

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1, причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если $AB=20$, $BB_1=15$, $B_1C_1=21$.



Решение.

1.

2. $S_{бок}=2\pi \cdot r \cdot h$

ΔABC––прямоугольный, $\angle ABC=90^0$.

AC-гипотенуза, $AC^2=AB^2+BC^2$, $AC^2=841$, $AC=29$

AC –диаметр, $r=14,5$

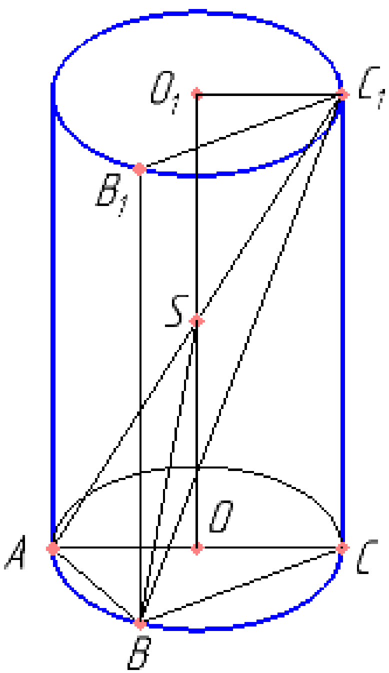
$S_{бок}=2\pi \cdot r \cdot h=2\pi \cdot 14,5 \cdot 15=435\pi$

Задачи по теме: «Цилиндр» (из банка ФИПИ)

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1, причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1, если $AB=6$, $BB_1=15$, $B_1C_1=8$



Решение.

1.

2. $BB_1 \parallel CC_1$ (образующие), $\angle AC_1B$–искомый

ΔBCC_1––прямоугольный.

$BC_1^2=BC^2+CC_1^2$, $BC_1^2=289$, $BC_1=17$

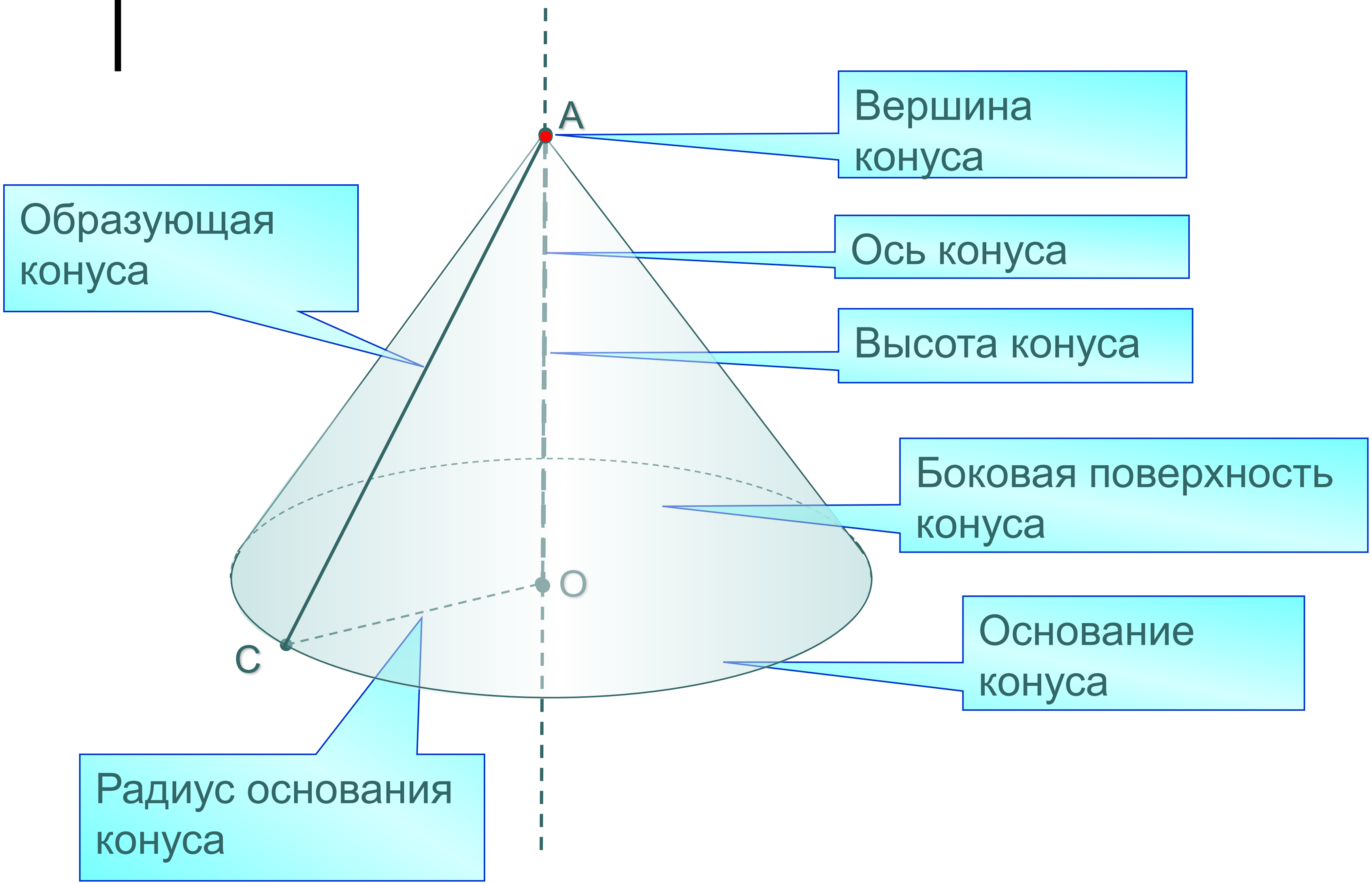
ΔABC_1––прямоугольный.

$tg\angle AC_1B=AB/BC_1=6/17$

$\angle AC_1B=arctg(6/17)$

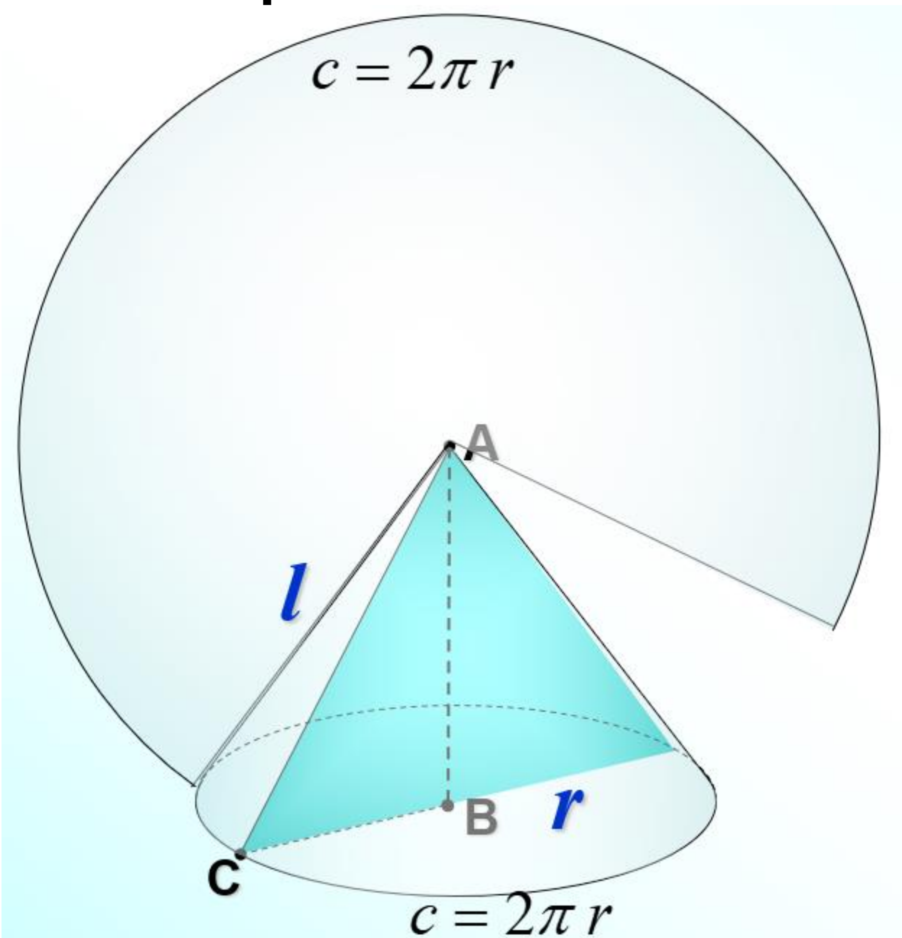
2.Конус

Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L, называется конусом.



Формулы

Развертка боковой поверхности конуса – круговой сектор.



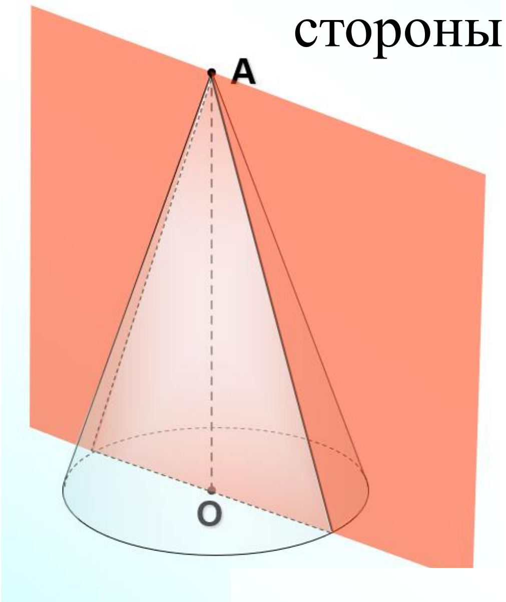
$$S_{бок} = \pi r l$$

$$S_{кон} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r (l + r)$$

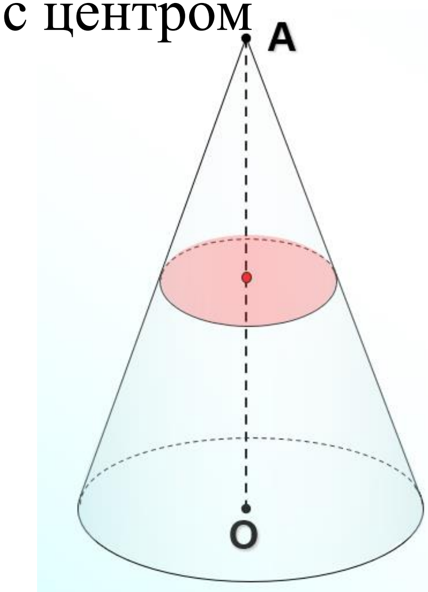
$$V_{кон} = \frac{1}{3} S_{осн} h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

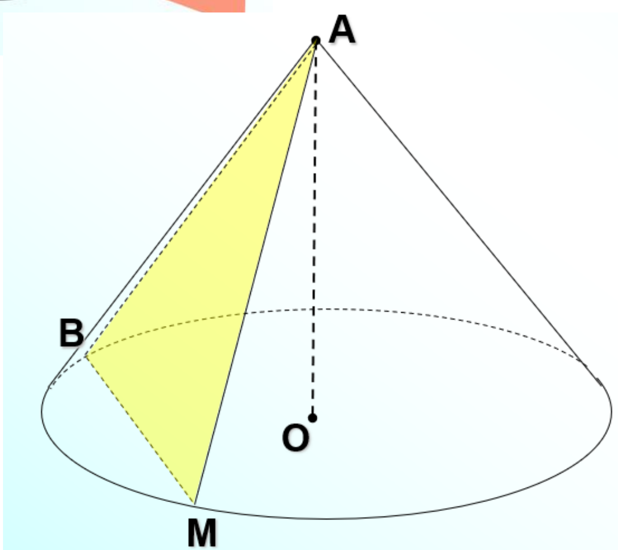
Сечения конуса

1.Осевое сечение конуса – равнобедренный треугольник, основание которого – диаметр основания конуса, а боковые стороны – образующие конуса.



2.Сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к оси – круг с центром расположенным на оси конуса.

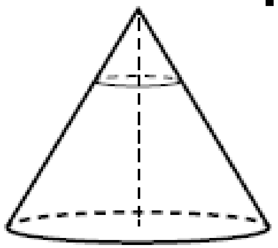




3.Сечение конуса плоскостью, проведенной через две образующие – равнобедренный треугольник.

Задачи по теме «Конус» (демонстрационный вариант)

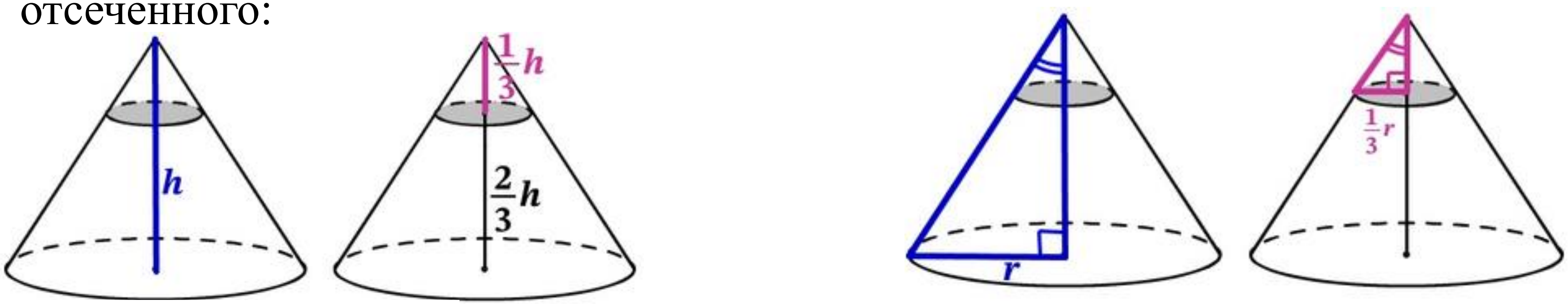
Через точку, лежащую на высоте прямого кругового конуса и делящую ее в отношении 1:2, считая от вершины конуса, проведена плоскость, параллельная его основанию и делящая конус на две части. Каков объем той части конуса, которая примыкает к его основанию, если объем конуса равен 54?



Решение.

1.Найдем объем отсеченного конуса.

На рисунке представлены соотношения высот и радиусов исходного конуса и отсеченного:



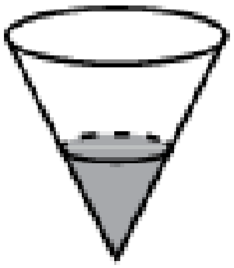
$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 54$$

$$V_{\text{отс}} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{3}r\right)^2\cdot\ \frac{1}{3}h = \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{27}\cdot V_{\text{кон}} = \frac{1}{27}\cdot 54 = 2$$

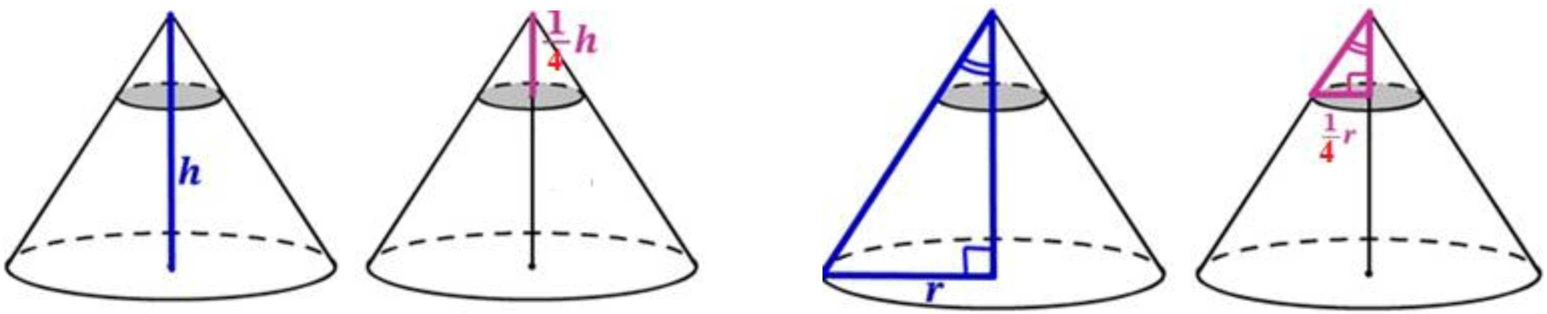
2. Найдем объем части конуса, который примыкает к его основанию:

$V_{\text{осн}} = V – V_{\text{отс}} = 54 – 2 = 52$

Задачи по теме «Конус» (из банка ФИПИ)



В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает 1/4 высоты. Объём жидкости равен 1 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Решение.

$$V_{бол} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V_{мал} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{4}\right)^2 \frac{h}{4} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \cdot \frac{1}{64}$$

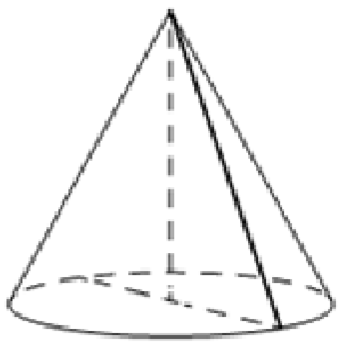
$$V_{бол} = 64$$

$$V_{дол} = V_{бол} - V_{мал} = 64 - 1 = 63$$

Ответ: 63.

Задачи по теме «Конус» (из банка ФИПИ)

Высота конуса равна 12, а диаметр основания равен 70. Найдите длину образующей конуса.

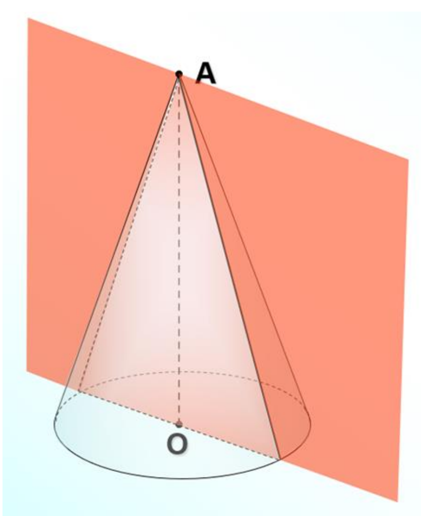


Высота конуса равна 9, а длина образующей равна 41. Найдите диаметр основания конуса.

Диаметр основания конуса равен 10, а длина образующей – 13. Найдите высоту конуса.

Решение.

Осевое сечение конуса – равнобедренный треугольник.

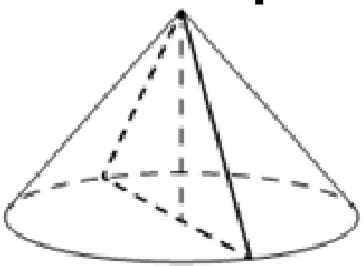


Свойство высоты равнобедренного треугольника.

Теорема Пифагора.

Задачи по теме «Конус» (из банка ФИПИ)

Диаметр основания конуса равен 90, а длина образующей – 51. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

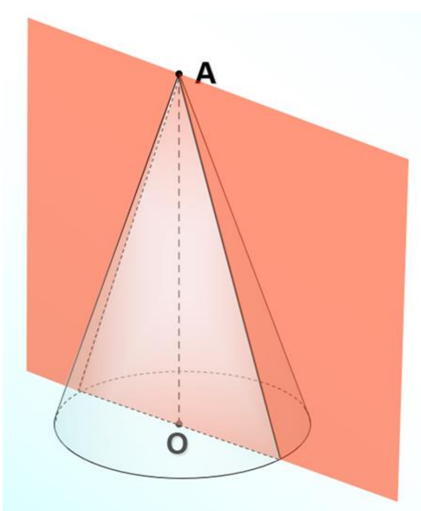


Высота конуса равна 40, а длина образующей – 58. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

Площадь основания конуса равна 4π, высота – 3. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

Решение.

Осевое сечение конуса – равнобедренный треугольник.



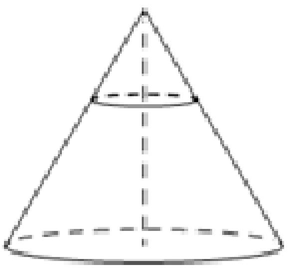
Свойство высоты равнобедренного треугольника.

Теорема Пифагора.

Формула нахождения площади треугольника.

Задачи по теме «Конус» (из банка ФИПИ)

Площадь основания конуса равна 48. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 4 и 12, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.



Решение.

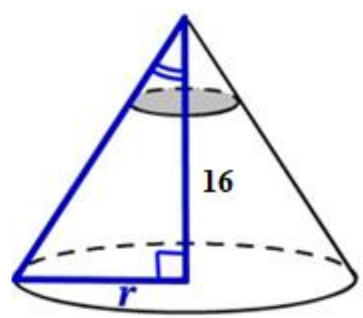
I способ

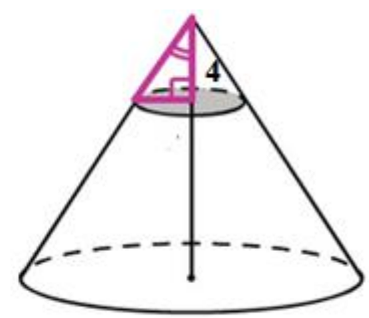
Рассмотрим исходный конус и конус, полученный в результате сечения плоскостью, параллельной плоскости основания конуса.

Основания этих конусов – подобные фигуры (круги разного радиуса).

$$\frac{S_{бол}}{S_{мал}} = k^2, k - коэффициент\ подобия$$

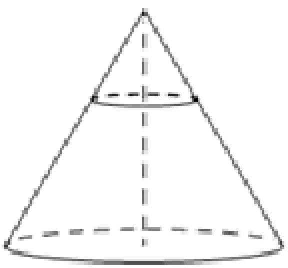
$$k = \frac{16}{4} = 4 \qquad \frac{48}{S_{мал}} = 4^2 \qquad S_{мал} = 3$$





Задачи по теме «Конус» (из банка ФИПИ)

Площадь основания конуса равна 48. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 4 и 12, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.



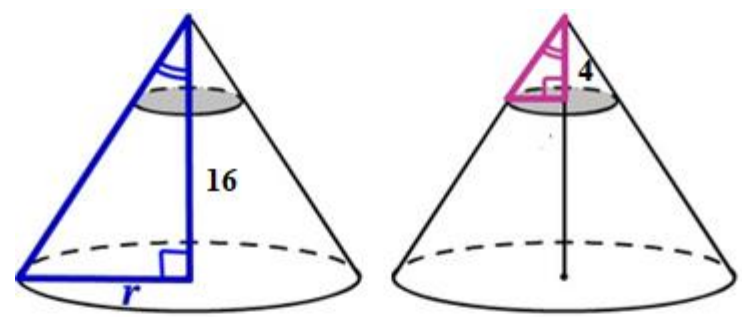
Решение.

II способ

Рассмотрим исходный конус и конус, полученный в результате сечения плоскостью, параллельной плоскости основания конуса.

$$S_{бол} = \pi r^2$$

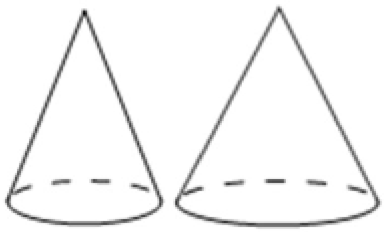
$$S_{мал} = \pi \left(\frac{r}{4}\right)^2$$



$$\frac{S_{бол}}{S_{мал}} = \frac{\pi r^2}{\pi \left(\frac{r}{4}\right)^2} = 16 \qquad \frac{48}{S_{мал}} = 16 \qquad S_{мал} = 3$$

Задачи по теме «Конус» (из банка ФИПИ)

Во сколько раз увеличится объём конуса, если радиус его основания увеличить в 8 раз, а высоту оставить прежней?



Во сколько раз уменьшится объём конуса, если его высота уменьшится в 4 раза, а радиус основания останется прежним?

Решение.

$$V_{исх} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

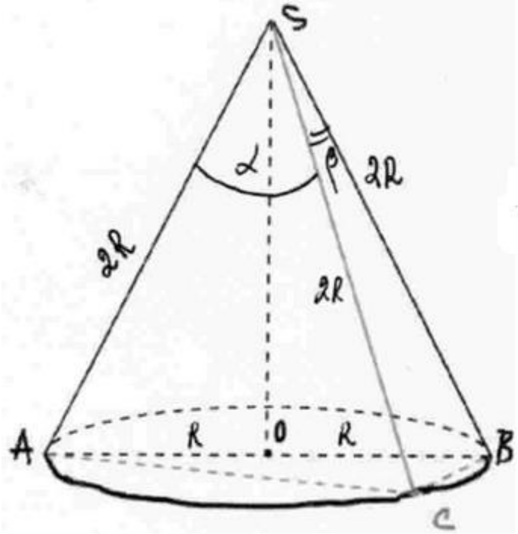
$$V_{увел} = \frac{1}{3}\pi (8 \cdot r)^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 h \cdot 64$$

$$\frac{V_{увел}}{V_{исх}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h \cdot 64}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = 64$$

Ответ: 64.

Задачи по теме «Конус» (из банка ФИПИ)

Различные точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S так, что отрезок AB является её диаметром. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен 60°.
а) Докажите, что cos∠ASC + cos∠BSC =1,5 .
б) Найдите объём тетраэдра SABC, если SC=1, cos∠ASC = 2/3 .



Решение.

1.Пусть ∠ASC=α, ∠BSC=β

Т.к.∠SAB=60^0, то ΔABS-равносторонний, AS=AB=2R

ΔASC, $AC^2=AS^2+SC^2-2\cdot AS\cdot SC\cdot \cos\alpha$, $AC^2=8R^2-8R^2\cos\alpha$ (*)

ΔCSB, $BC^2=CS^2+BS^2-2\cdot CS\cdot BS\cdot \cos\beta$, $BC^2=8R^2-8R^2\cos\beta$ (теорема косинусов)

ΔABC –прямоугольный ∠ACB=90^0 (вписанный, опирается на диаметр)

$AB^2= AC^2+ BC^2$, $4R^2=16R^2-8R^2(\cos\alpha+\cos\beta)$,

$\cos\alpha+\cos\beta=1,5$ ч.т.д.

2.$V_{SABC}=1/3\cdot S_{\Delta ABC}\cdot SO$

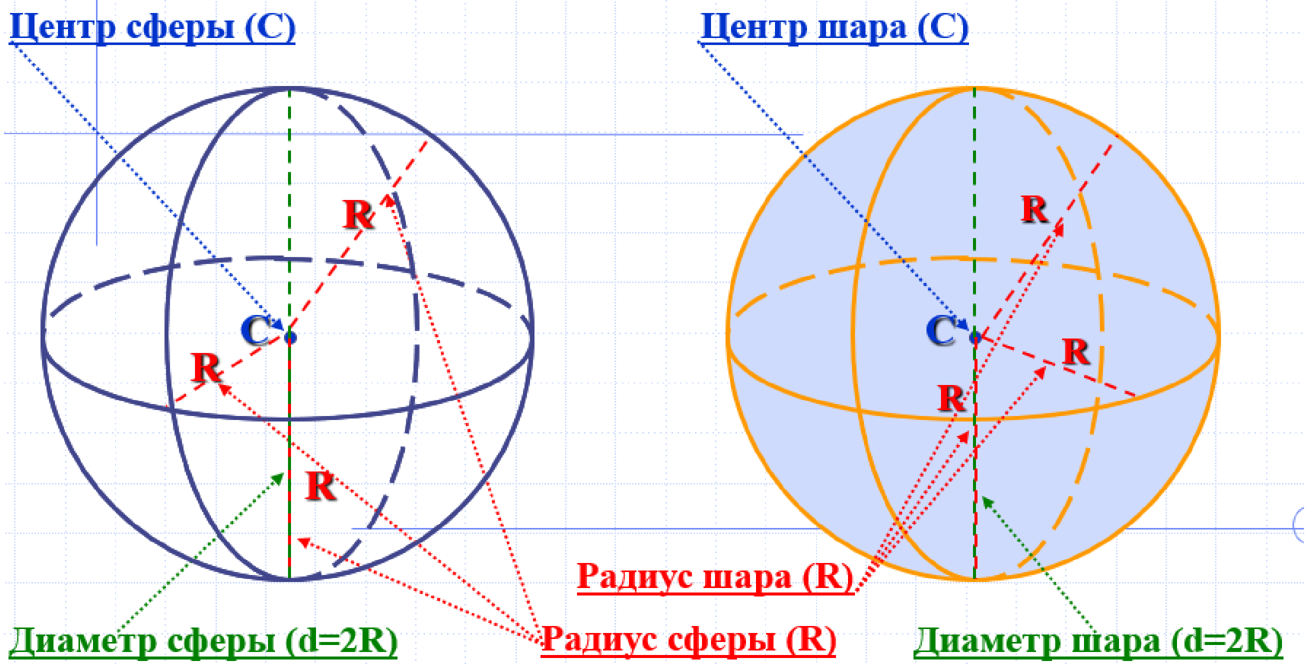
$\cos\alpha=2/3$, $\cos\beta=1,5-2/3=5/6$. Из (*) $AC=\sqrt{\dfrac{2}{3}},\ BC=\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ $\quad SO=R\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{36}$$

Сфера. Шар

__Сфера__ – это поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии (R) от данной точки (C).

__Шар__ – это тело, ограниченное сферой.

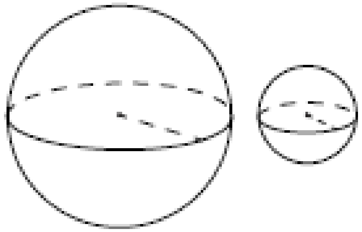


$$S = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Задачи по теме «Шар. Сфера» (демонстрационный вариант)

Даны два шара радиусами 9 и 3. Во сколько раз площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего?



Решение.

$$S = 4\pi R^2$$

$$S_{бол} = 4\pi \cdot 9^2 = 4\pi \cdot 81$$

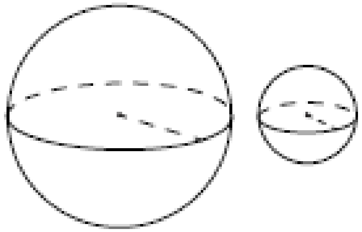
$$S_{мал} = 4\pi \cdot 3^2 = 4\pi \cdot 9$$

$$\frac{S_{бол}}{S_{мал}} = \frac{4\pi \cdot 81}{4\pi \cdot 9} = 9$$

Ответ: 9.

Задачи по теме «Шар. Сфера» (из банка ФИПИ)

Радиусы двух шаров равны 9 и 12. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.



Решение.

$$S = 4\pi R^2$$

$$S_1 = 4\pi \cdot R_1^{\,2}$$

$$S_2 = 4\pi \cdot R_2^{\,2}$$

$$S_3 = 4\pi \cdot R_1^2 + 4\pi \cdot R_2^2 = 4\pi \cdot \left(R_1^2 + R_2^2\right)$$

$$R_3^2 = R_1^2 + R_2^2 = 9^2 + 12^2 = 225$$

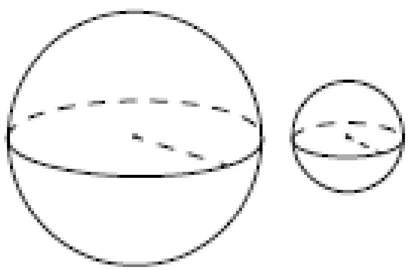
$$R_3 = 15$$

Ответ: 15.

Задачи по теме «Шар. Сфера» (из банка ФИПИ)

Дано два шара. Радиус первого шара в 2 раза больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

Дано два шара. Радиус первого шара в 9 раз больше радиуса второго. Во сколько раз объём первого шара больше объёма второго?



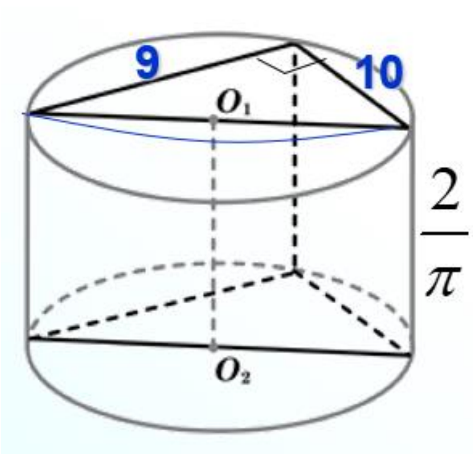
$$S = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Вписанные и описанные фигуры (из банка ФИПИ)

В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 10 и 9. Боковые рёбра призмы равны $\frac{2}{\pi}$.

Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.



Решение.

1.V=πr^2h, r - радиус основания, h - высота.

2.Найдем радиус из прямоугольного треугольника, лежащего в основании призмы, так как его гипотенуза – диаметр.

$$d = \sqrt{9^2 + 10^2} = \sqrt{181}$$

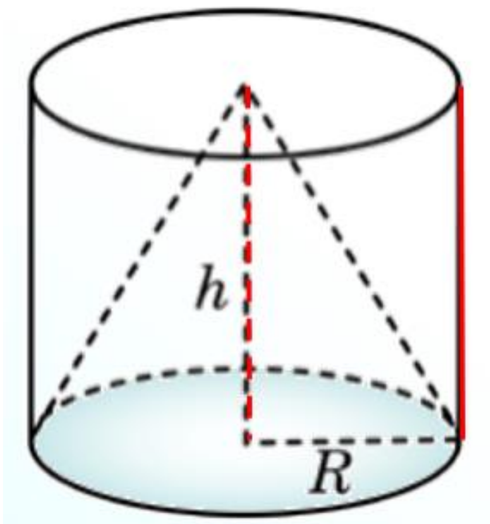
$$r = \frac{1}{2}\sqrt{181}$$

$$V = \pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{181}\right)^2 \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{181}{2} = 90{,}5$$

Вписанные и описанные фигуры (из банка ФИПИ)

Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту (конус вписан в цилиндр). Вычислите объём конуса, если объём цилиндра равен 162.

Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту (конус вписан в цилиндр). Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 45.



Решение.

1.Найдем отношение объемов цилиндра и конуса:

$$\frac{V_{цил}}{V_{кон}} = \frac{S_{осн} \cdot h}{\frac{1}{3} S_{осн} \cdot h} = 3$$

$$\frac{162}{V_{кон}} = 3$$

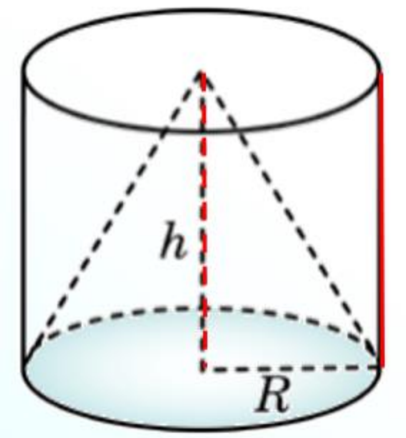
$$V_{кон} = 54$$

Ответ: 54

Вписанные и описанные фигуры (из банка ФИПИ)

Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $3\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $5\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



Решение.

1.Найдем отношение площадей поверхностей цилиндра и конуса, учитывая, что $r=h$:

$$\frac{S_{бок\ цил}}{S_{бок\ кон}} = \frac{2\pi rh}{\pi rl} = \frac{2\pi r^2}{\pi rl}$$

Образующая конуса связана с радиусом и высотой соотношением по теореме Пифагора: $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$

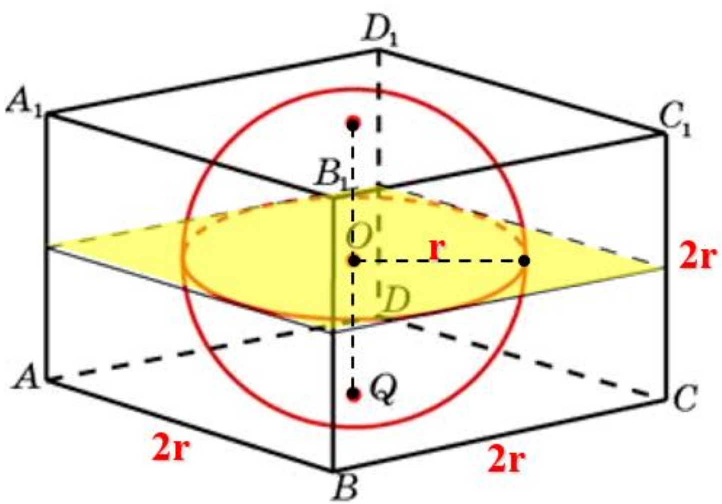
$$\frac{S_{бок\ цил}}{S_{бок\ кон}} = \frac{2\pi r^2}{\pi rl} = \frac{2\pi r^2}{\pi r \cdot r\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

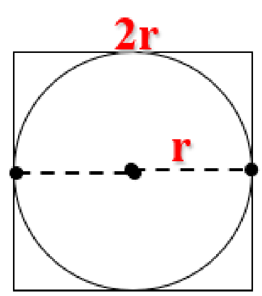
$$\frac{S_{бок\ цил}}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$S_{бок\ цил} = 6$$

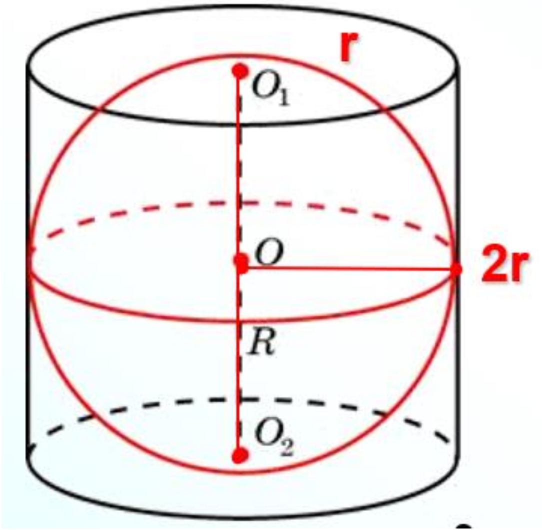
Вписанные и описанные фигуры (из банка ФИПИ)

1. *В куб с ребром 3 вписан шар. Найдите объём этого шара, делённый на π.*
2. *Куб описан около сферы радиуса 3. Найдите объём куба.*
3. *Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 7,5. Найдите его объём.*
4. *Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 29. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.*
5. *Шар, объём которого равен 18, вписан в цилиндр. Найдите объём цилиндра.*
6. *Цилиндр, объём которого равен 42, описан около шара. Найдите объём шара.*





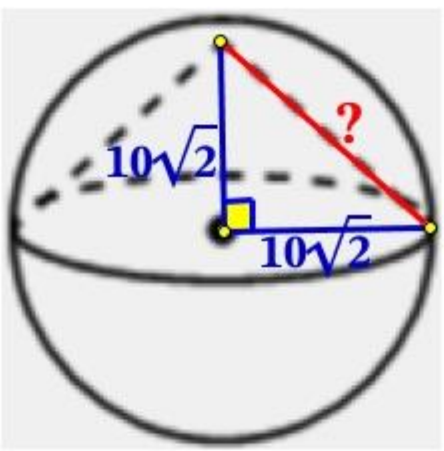
$a = 2r$



Вписанные и описанные фигуры (из банка ФИПИ)

Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $10\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Образующая конуса равна $85\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.



Решение.

Так как конус вписан в сферу, то образующие конуса пересекаются под углом в 90 градусов и образуют вместе с диаметром равнобедренный прямоугольный треугольник.

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$$

$$\left(20\sqrt{2}\right)^2 = 2l^2$$

$$l = 20$$

Ответ: 20.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!