Графики функции.

Задание №11 профильного ЕГЭ по математике.

Помозова Инна Григорьевна,
учитель математики МБОУ СОШ №2
г. Темрюк МО Темрюкский район.

Линейная функция.

График – прямая.

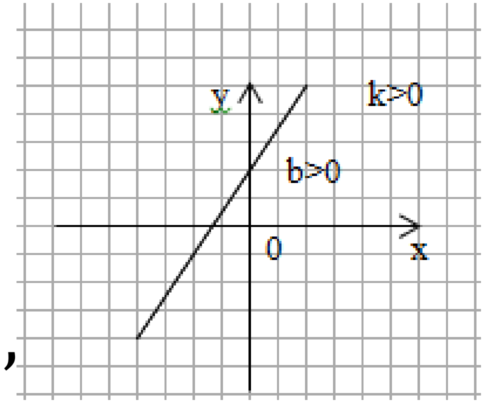
$y = kx + b$

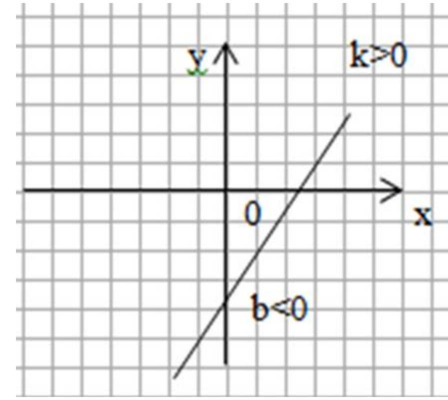
$f(x)$ – возрастающая, если $k > 0$.

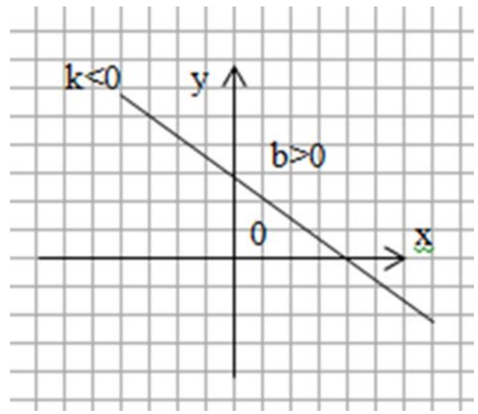
$f(x)$ – убывающая, если $k < 0$.

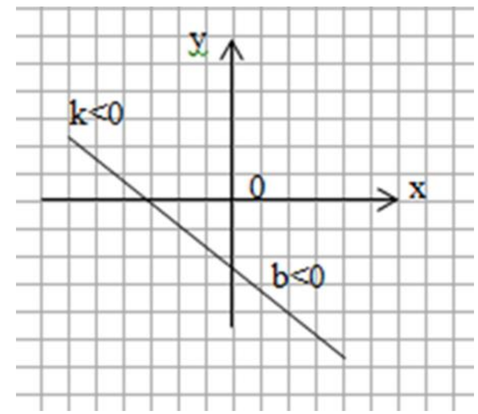
Если $x = 0$, то

$f(0) = b$- точка пересечения графика с осью OY



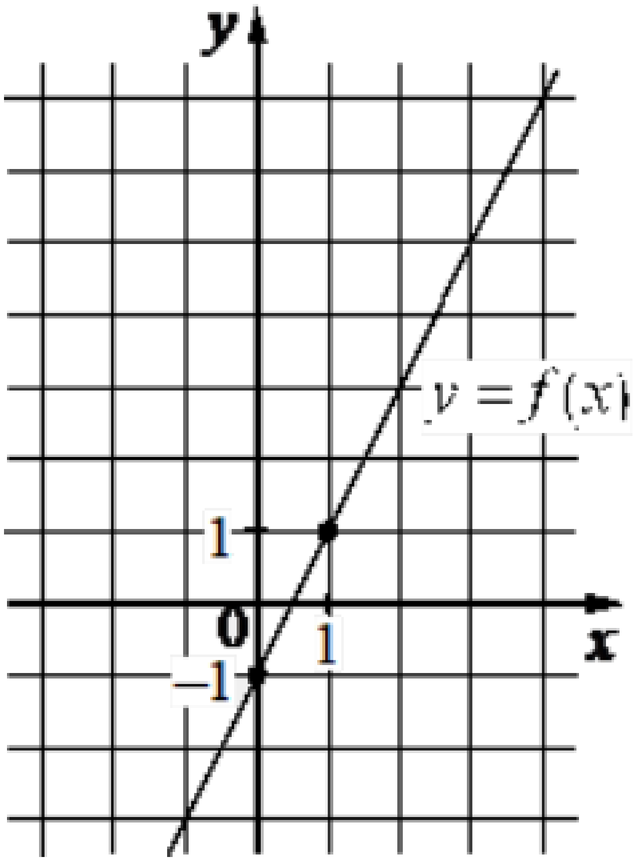






ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 203-53-01, кафедра математики, информатики и технологического образования тел.: +7 (861) 203-50-52

1. На рисунке изображён график функции вида $f(x) = kx + b$. Найдите значение $f(5)$.

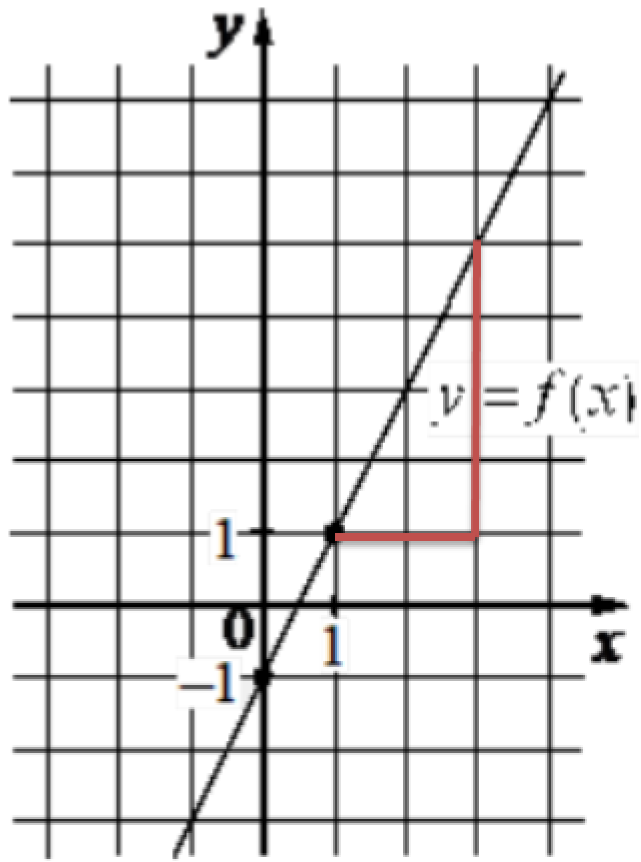


По графику можно определить коэффициент b. $f(0) = -1 \Rightarrow b = -1$.

На прямой выделена точка (1;1), подставим координаты этой точки и значение коэффициента b в уравнение прямой $y = kx + b$.

Получим

$1 = k \cdot 1 + (-1)$, решим уравнение и получим, что k=2

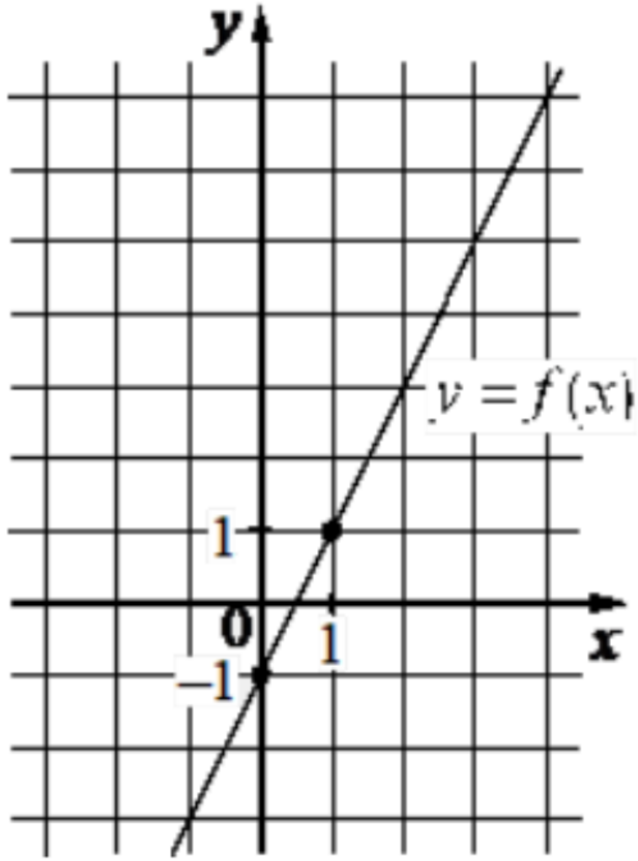


Угловой коэффициент можно найти, как тангенс угла наклона прямой с осью OX.

$$k = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$k = \frac{4}{2} = 2$$

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 203-53-01, кафедра математики, информатики и технологического образования тел.: +7 (861) 203-50-52



На рисунке изображён график функции вида f(x)=kx+b. Найдите значение f(5).

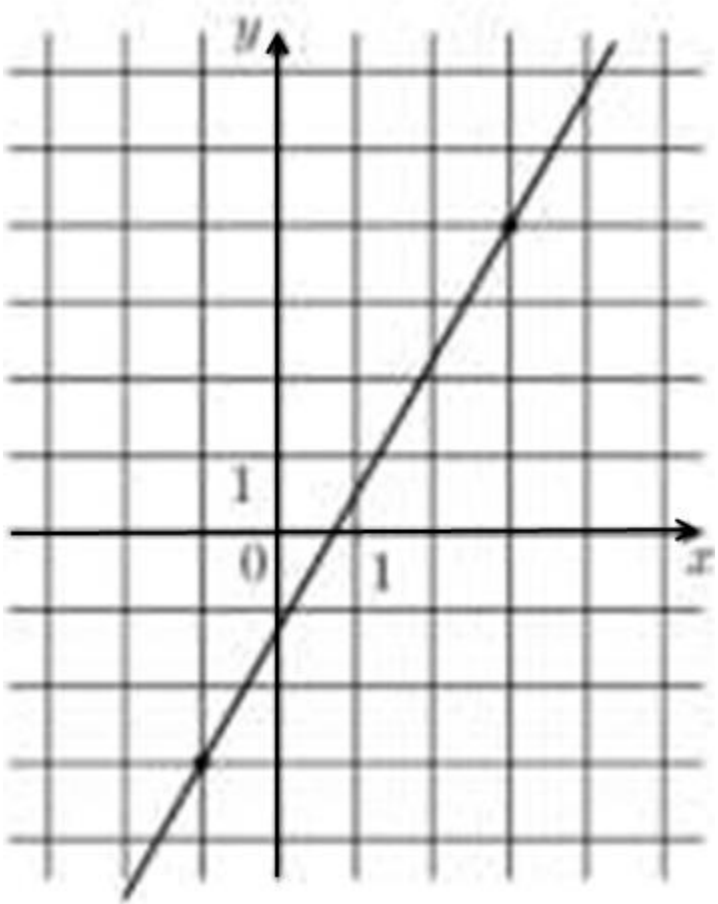
$$y = kx + b$$

$$b = -1, \qquad k = 2$$

$$f(5) = 2 \cdot 5 + (-1) = 9$$

Ответ: 9.

2. На рисунке изображен график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x при котором $f(x) = -13{,}5$.



По графику определить коэффициент b нельзя.

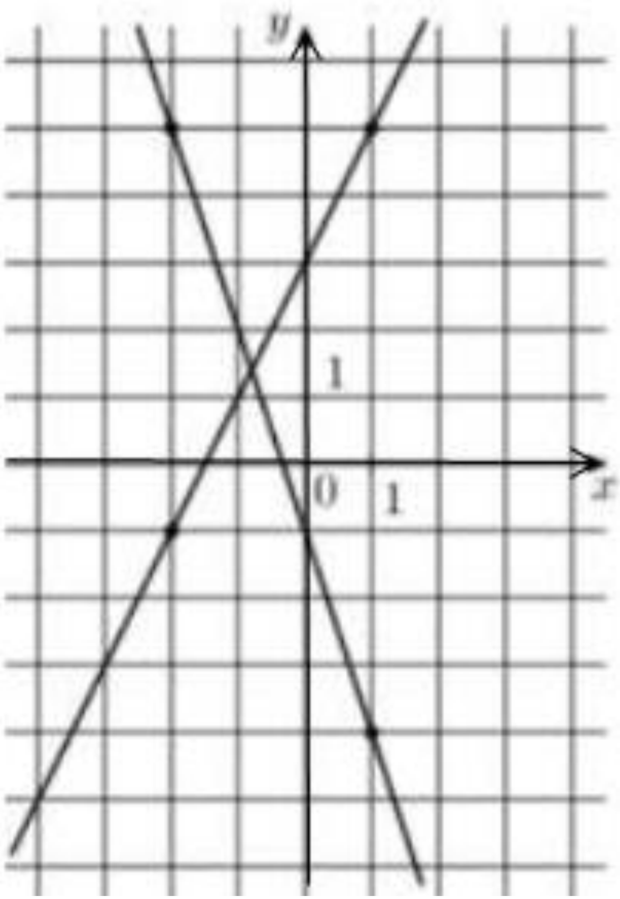
На графике выделены две точки (-1;-3) и (3;4). Подставим координаты этих точек в уравнение $y = kx + b,$ составим систему уравнений и решим:

$$(-1;-3) \Longrightarrow -1\cdot k + b = -3$$
$$(3;4) \Longrightarrow 3\cdot k + b = 4$$
$$\begin{cases} -1k + b = -3, \\ 3k + b = 4; \end{cases}$$
Решим систему вычитая из первого уравнения, второе:
$$-k - 3k = -3 - 4$$
$$-4k = -7$$
$$k = \frac{7}{4}$$
Подставим $k = 1{,}75$ в первое уравнение: $-1\cdot 1{,}75 + b = -3$
$$b = -1{,}25$$

Получаем
$$y = 1{,}75x - 1{,}25$$
Найдем значение x при котором $f(x) = -13{,}5$
$$1{,}75x - 1{,}25 = -13{,}5$$
$$1{,}75x = -12{,}25$$
$$x = -7$$

Ответ : -7.

3.На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.

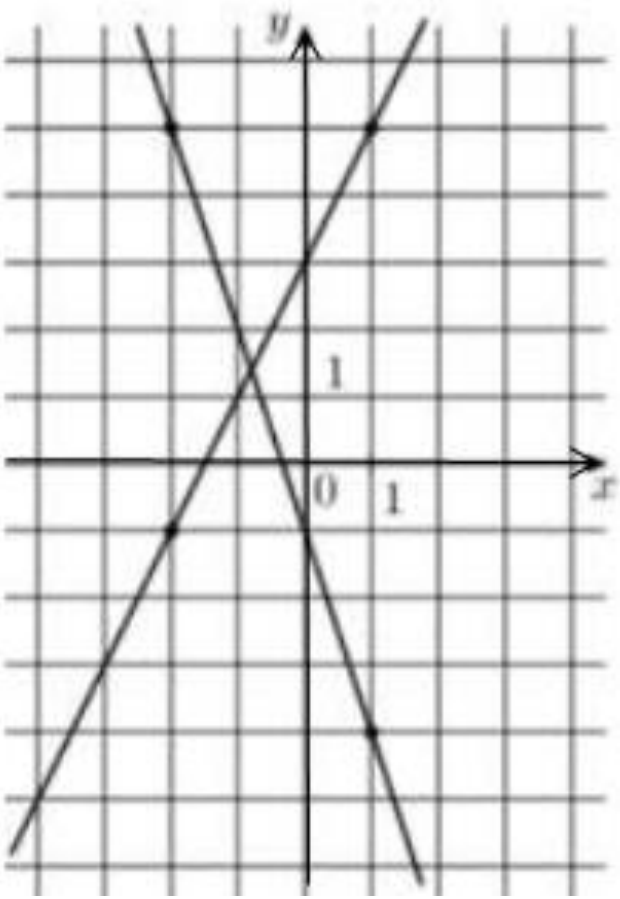


На одной прямой возьмем точку (-2;5) и определяется коэффициент $b = -1$.

На другой прямой возьмем точку (-2;-1) и определяется коэффициент $b = 3$.

Найдем коэффициенты k двух прямых.

1)Подставим (-2;5) и $b = -1$ в уравнение $y = kx + b$ $$-2k - 1 = 5$$ $$-2k = 6$$ $$k = -3$$ Получаем уравнение прямой: $y = -3x - 1$	2)Подставим (-2;-1) и $b = 3$ в уравнение $y = kx + b$ $$-2k + 3 = -1$$ $$-2k = -4$$ $$k = 2$$ Получаем уравнение прямой: $y = 2x + 3$



Так как нужно найти абсциссу точки пересечения графиков (т.е. нужно найти x), составим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = -3x - 1, \\ y = 2x + 3; \end{cases}$$

$$-3x - 1 = 2x + 3$$

$$-5x = 4$$

$$x = -0{,}8$$

Ответ: $-0{,}8$

Квадратичная функция

$$y = ax^2 + bx + c$$

где a, b и c $-$ заданные числа, $a \neq 0$.

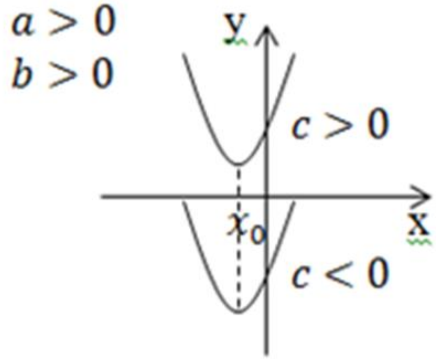
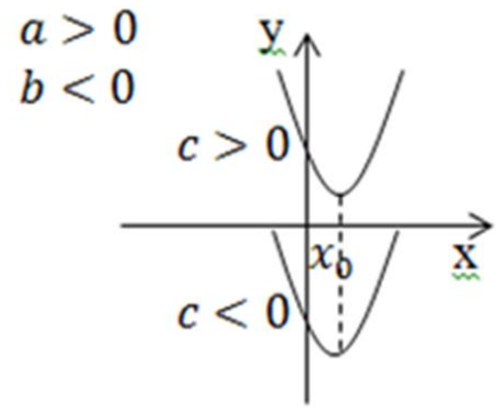
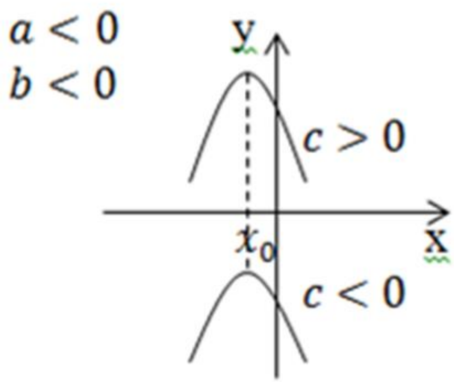
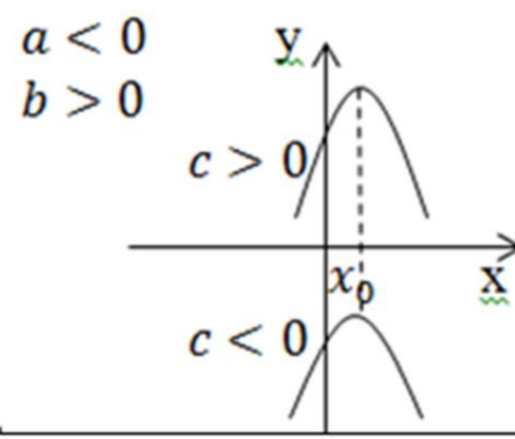
График квадратичной функции – парабола.

Если $a > 0$, ветви направлены вверх

Если $a < 0$, ветви направлены вниз

Вершина параболы $M(x_0; y_0)$, $x_0 = \frac{-b}{2a}$

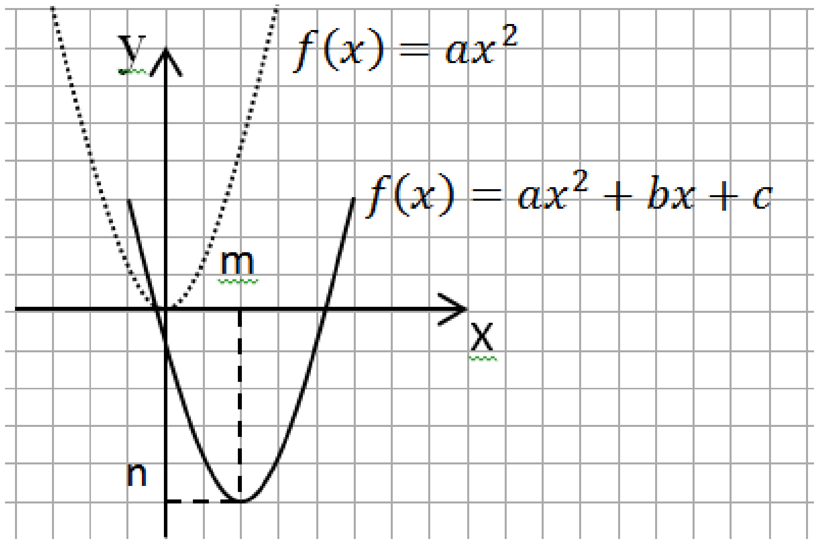
Если $x = 0$, то $f(0) = c$ – точка пересечения графика с осью OY

если a и b одного знака ($ab > 0$), то вершина (x_0) слева от оси ОХ	если a и b разных знаков ($ab < 0$), то вершина (x_0) справа от оси ОХ
	
	

Сдвиг графика функции $f(x) = ax^2$ вдоль осей координат.

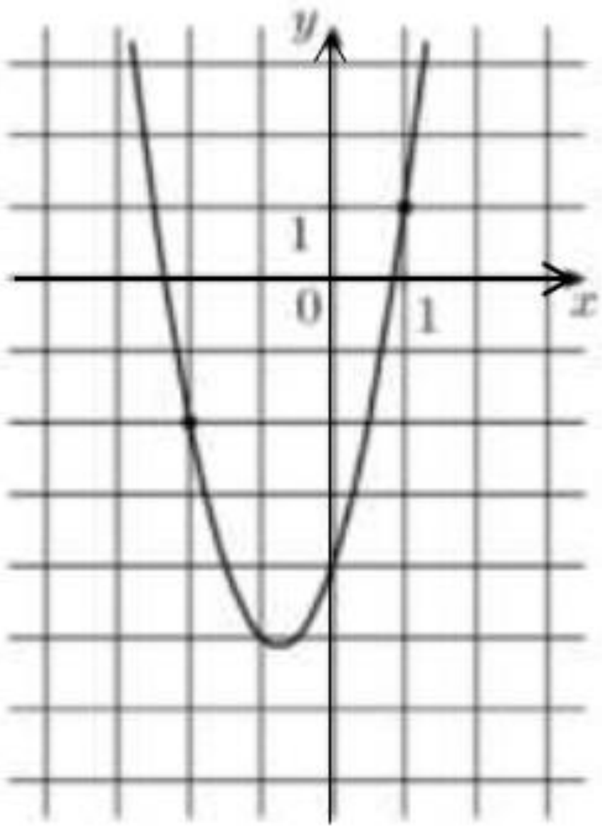
Вершина параболы $M(m;n)$

Тогда уравнение параболы проходящей через точку $M(m;n)$



$$f(x) = a(x-m)^2 + n$$

4. На рисунке изображен график функции $f(x) = 2x^2 + bx + c$. Найдите $f(-5)$



Коэффициент $a = 2, b > 0$. По графику можно определить коэффициент c, $f(0) = -4 \Longrightarrow c = -4$.

На графике выделена точка (1;1). Подставим координаты точки и $c = -4$ в уравнение функции:

$$2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + (-4) = 1$$

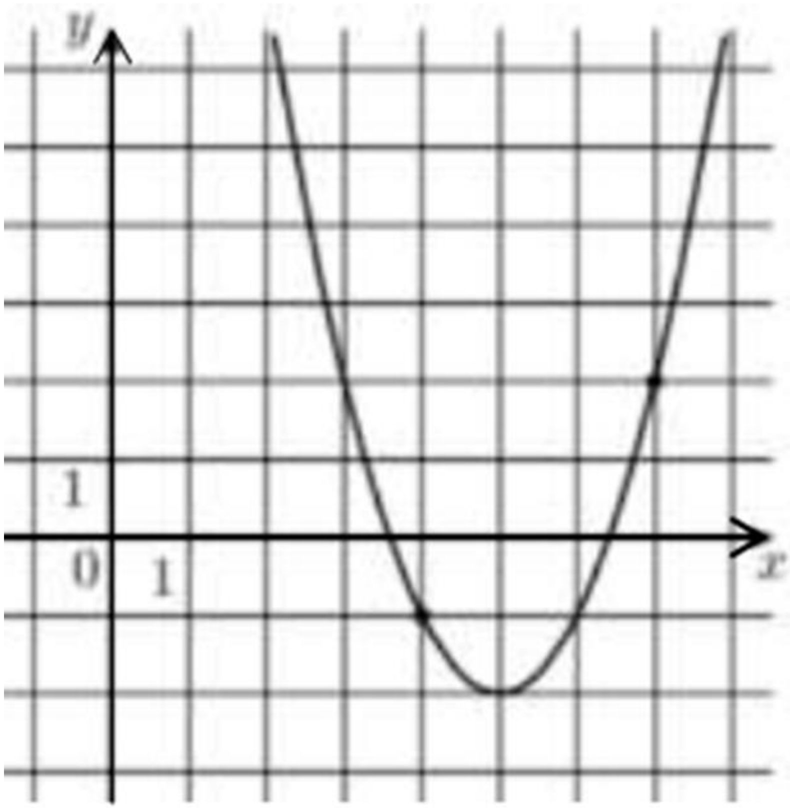
$$b = 3$$

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 4$$

$$f(-5) = 2(-5)^2 + 3 \cdot (-5) - -4 = 50 - 15 - 4 = 31$$

Ответ: 31.

5. На рисунке изображен график функции $f(x) = x^2 + bx + c$. Найдите $f(-1)$.



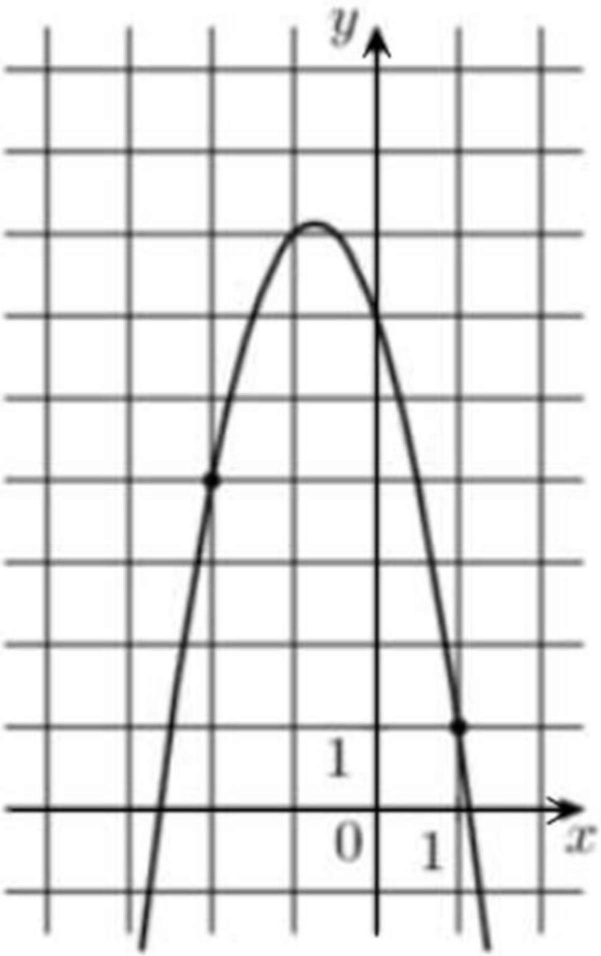
По условию $a = 1, b < 0$, коэффициент c найти по графику нельзя. Вершина параболы - $M(5; -2)$. Тогда рассмотрим сдвиг графика и уравнение параболы проходящей через точку $M(5; -2)$ примет вид:

$$f(x) = 1 \cdot (x-5)^2 - 2$$

$$f(-1) = (-1-5)^2 - 2 = 34$$

Ответ: 34

6. На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 - 3x + c$. Найдите $f(-4)$.



Коэффициент $a < 0, b = -3$, по графику с = 6. Возьмем на графике точку (1;1). Получаем

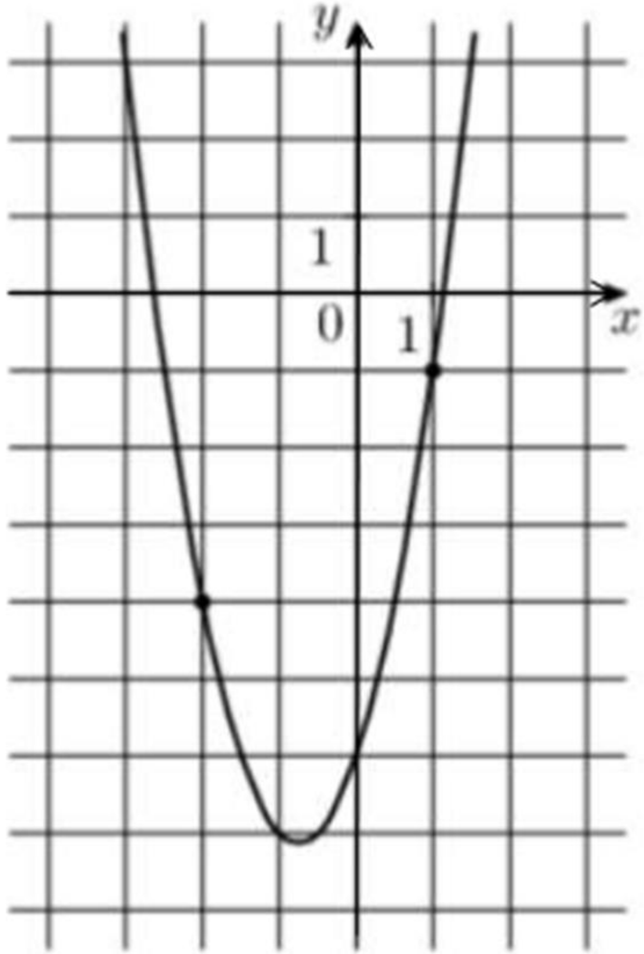
$$a \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 6 = 1$$

$$a = -2.$$

$f(-4) = -2 \cdot (-4)^2 - 3 \cdot (-4)$
$+6 = -32 + 12 + 6 = -14$

Ответ: -14.

7. На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx - 6$. Найдите $f(-6)$.



$$a > 0, b > 0, c = -6$$

На графике выделены две точки (-2;-4) и (1;-1). Чтобы найти коэффициенты a и b подставим координаты точек в уравнение функции и составим систему:

$$\begin{cases} 4a - 2b - 6 = -4, \\ 1a + 1b - 6 = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a - 2b = 2, \\ a + b = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a - 2b = 2, \\ a + b = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = 2, \\ 2a + 2b = 10; \end{cases} \Rightarrow 6a = 12$$

$\underline{a = 2}$

$2 + b = 5$

$\underline{b = 3}$

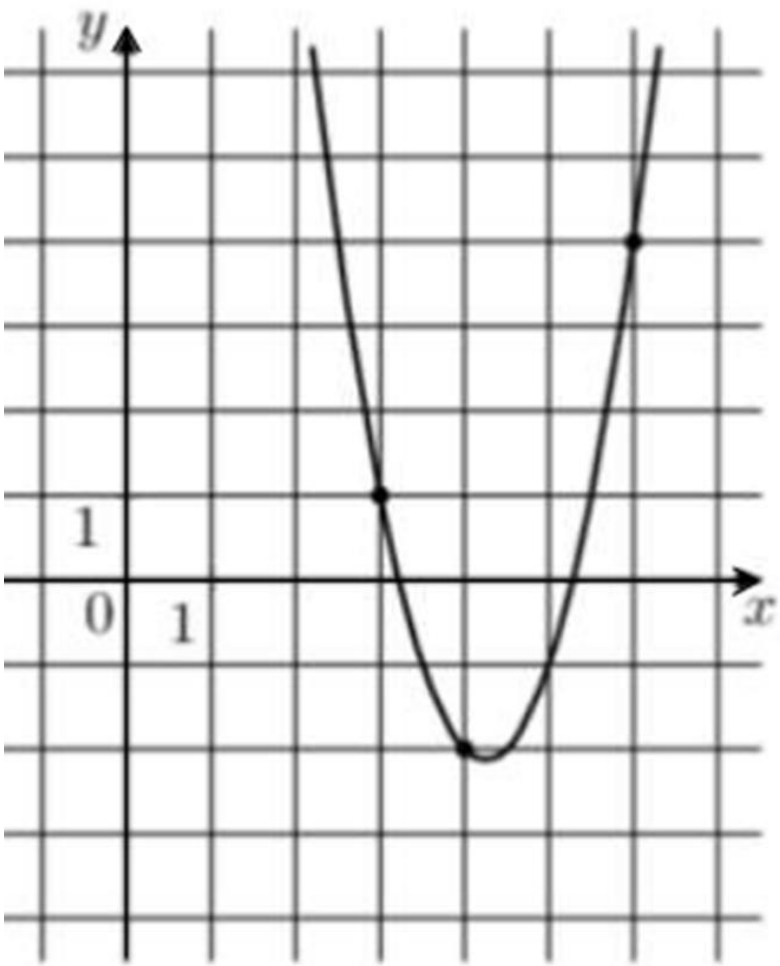
$f(x) = 2x^2 + 3x - 6$

$f(-6) = 2(-6)^2 + 3 \cdot (-6) - 6 =$

$= 72 - 18 - 6 = 48$

Ответ: 48.

8. На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(10)$.



$a > 0, b < 0, c > 0$

По графику определить коэффициенты нельзя, координаты вершины не целые числа. На графике выделены три точки (3;1), (4;-2) и (6;4). Составим систему уравнений

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 1, (1) \\ 16a + 4b + c = -2, (2) \\ 36a + 6b + c = 4;\ (3) \end{cases}$$

Решим систему $\begin{cases} 9a + 3b + c = 1, (1) \\ 16a + 4b + c = -2, (2) \\ 36a + 6b + c = 4;\ (3) \end{cases}$

Из (3) – (2), а из (2)-(1).

$\begin{cases} 20a + 2b = 6, \\ 7a + b = -3; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 20a + 2b = 6, \\ -14a - 2b = 6; \end{cases} \Longrightarrow 6a = 12 \Longrightarrow \underline{a = 2}$

$7 \cdot 2 + b = -3$

$\underline{b = -17}$

$9 \cdot 2 - 17 \cdot 3 + c = 1$

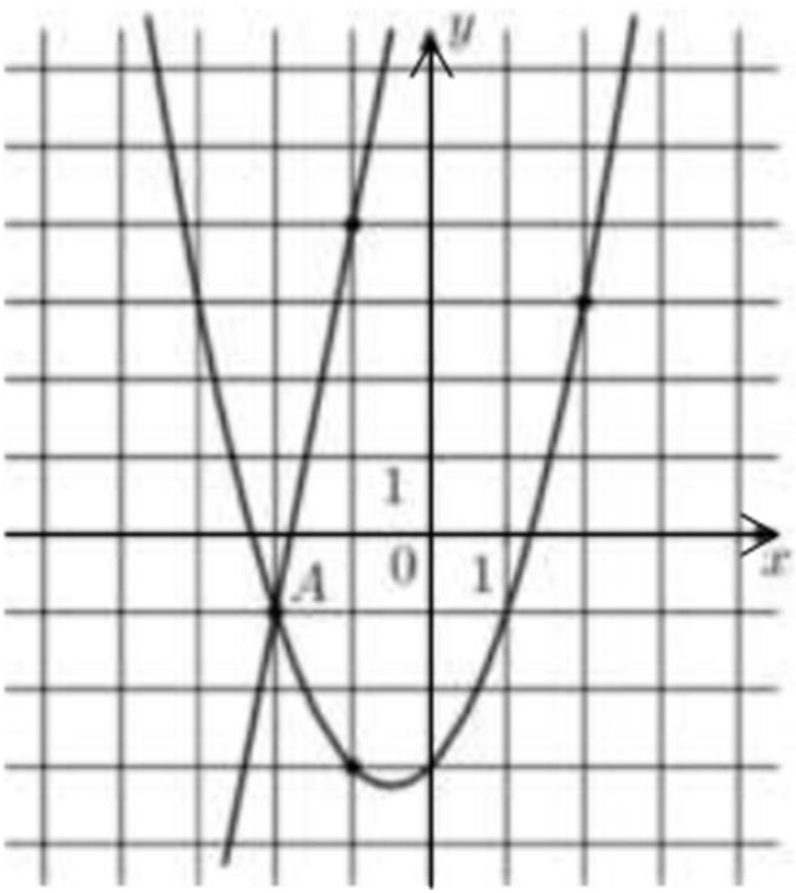
$\underline{c = 34}$

$f(x) = 2x^2 - 17x + 34$

$f(10) = 2 \cdot 10^2 - 17 \cdot 10 + 34 = 64$

Ответ: 64.

9. На рисунке изображены графики функций $f(x) = 5x + 9$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

$a > 0, b > 0, c = -3$ (по графику). Точки (2;3) и (-1;-3)

Составим систему уравнений:

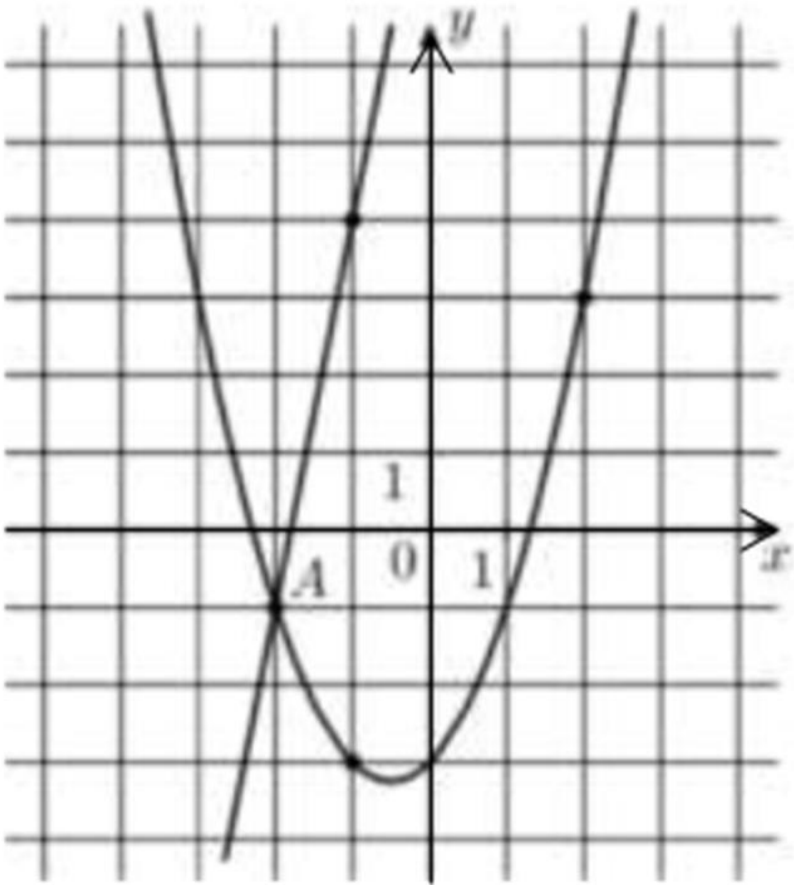
$$\begin{cases} 4a + 2b - 3 = 3, \\ 1a - 1b - 3 = -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = 6, \\ a - b = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b + 2b = 6, \\ a = b; \end{cases}$$

$a = 1, b = 1$

$$g(x) = x^2 + x - 3$$



Графики функций $f(x) = 5x + 9$ и

$g(x) = x^2 + x - 3$ пересекаются, тогда составим систему:

$$\begin{cases} y = 5x + 9, \\ y = x^2 + x - 3; \end{cases}$$

$x^2 + x - 3 = 5x + 9$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$x_1 = -2 \quad x_2 = 6$

-2 абсцисса точки А, тогда 6 - абсцисса точки В.

Ответ: 6.

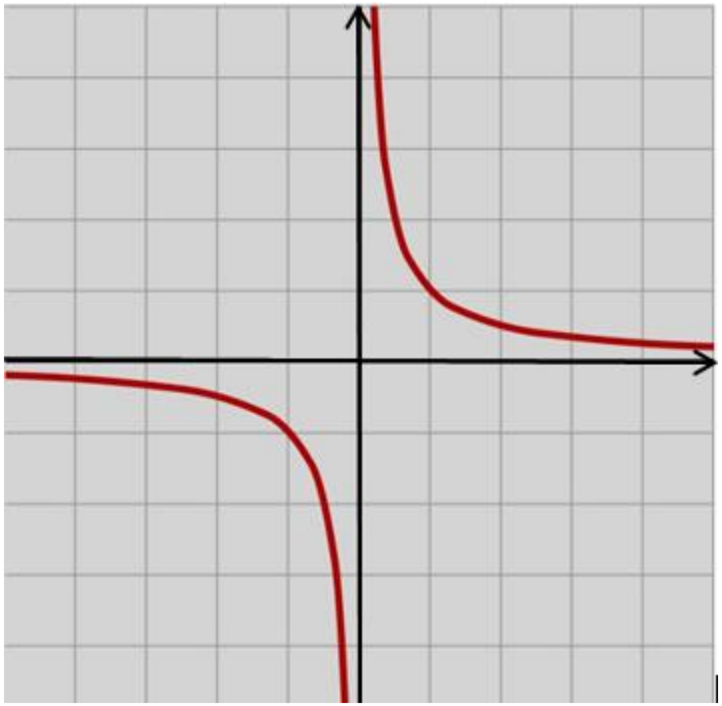
Дробно-линейная функция

Частным случаем дробно-линейной функции является обратно пропорциональная зависимость т. е. $y = \frac{k}{x}$.

График – гипербола, состоит из двух бесконечных ветвей.

Эти ветви, удаляясь в бесконечность, неограниченно приближаются к осям координат однако общих точек с осями они не имеют.

Говорят, что координатные оси являются асимптотами графика функции $y = \frac{k}{x}$.



В общем случае графиком дробно-линейной функции также является гипербола, причем этот график может быть получен с помощью сдвигов вдоль координатных осей гиперболы $y = \frac{k}{x}$.

$y = \frac{k}{x} + а.$

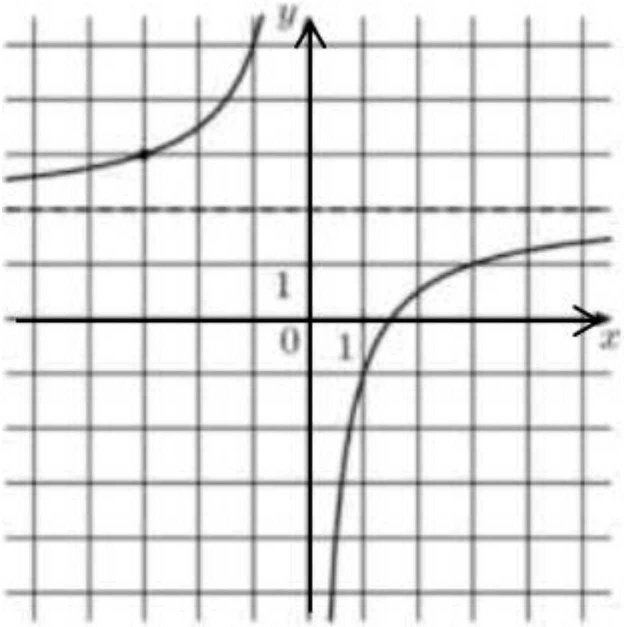
Смещается график вдоль оси OY

горизонтальная асимптота $y = а.$

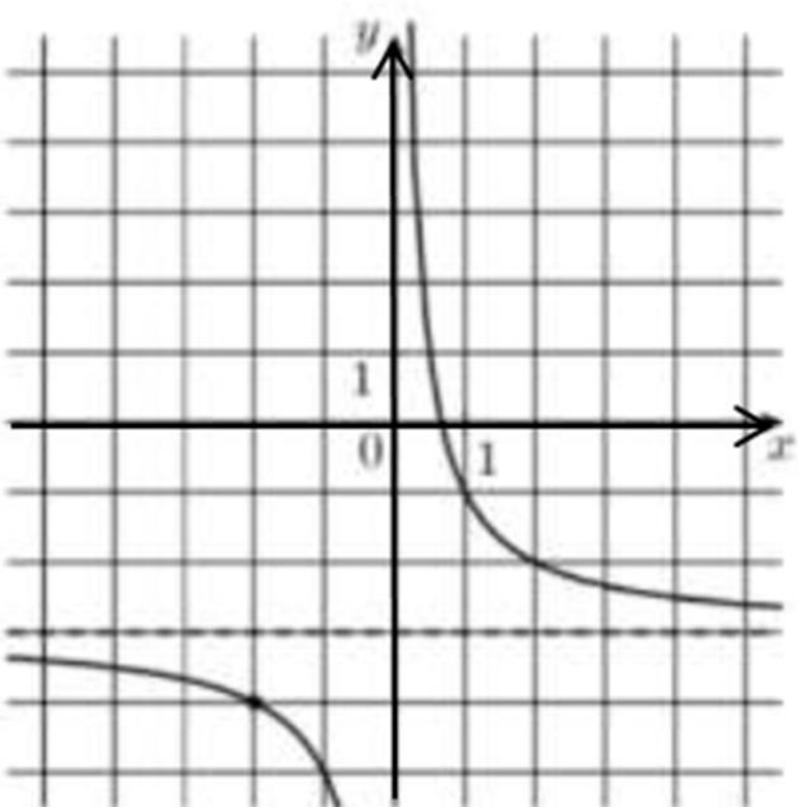
На рисунке функция $y = \frac{k}{x} + 2$

горизонтальная асимптота $y = 2$

т.е. $а = 2$



10. На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите $f(50)$.



Горизонтальная асимптота $y = -3$, значит $a = -3$. На графике точка (-2;-4)

$$\frac{k}{-2} - 3 = -4$$

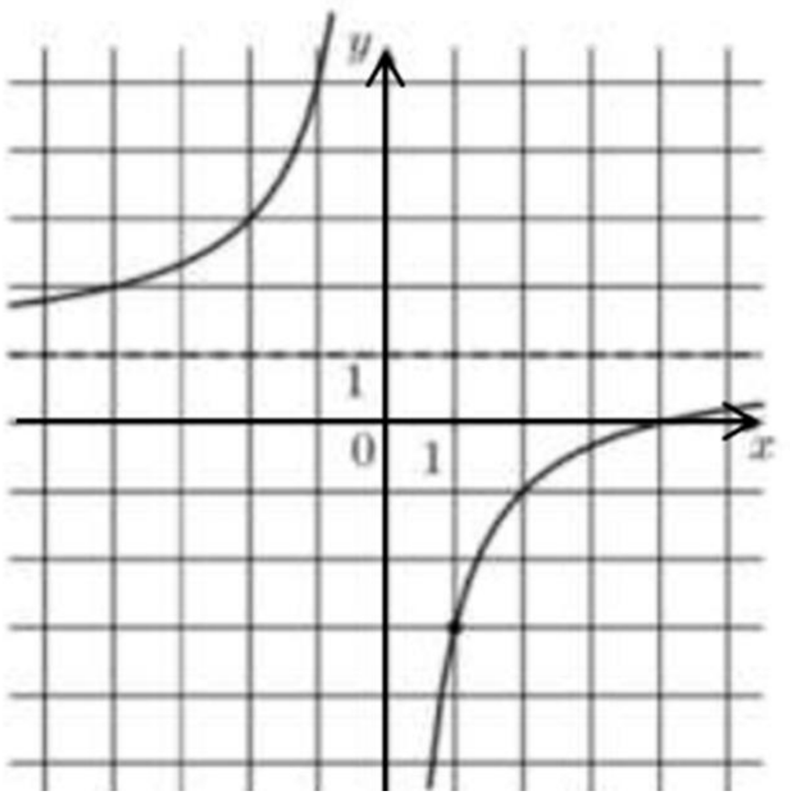
$$\frac{k}{-2} = -1$$

$$k = 2$$

$$f(50) = \frac{2}{50} - 3 = -2{,}96.$$

Ответ: - 2,96.

11. На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 0,75.



Горизонтальная асимптота $y = 1$, значит $a = 1$. На графике точка (1;-3)

$$\frac{k}{1} + 1 = -3$$

$$k = -4$$

$$f(x) = \frac{-4}{x} + 1 = 0{,}75$$

$$\frac{-4}{x} = -0{,}25$$

$$x = 16.$$

Ответ: 16.

График функции $y = \frac{k}{x+a}$

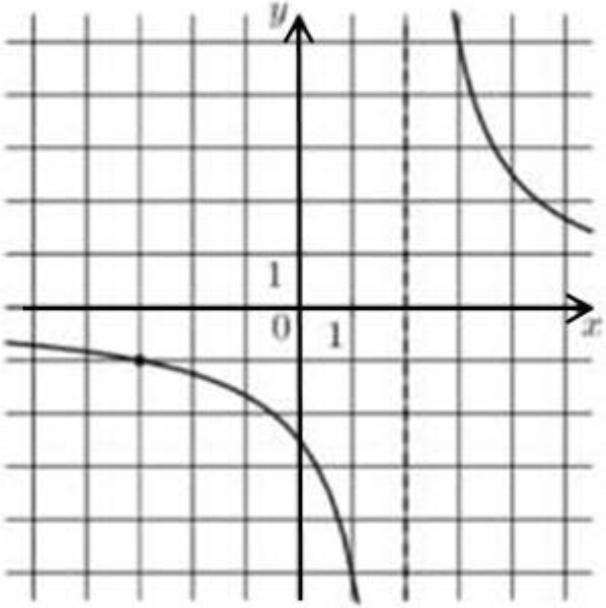
смещается вдоль оси OX

вертикальная асимптота $x = -a$.

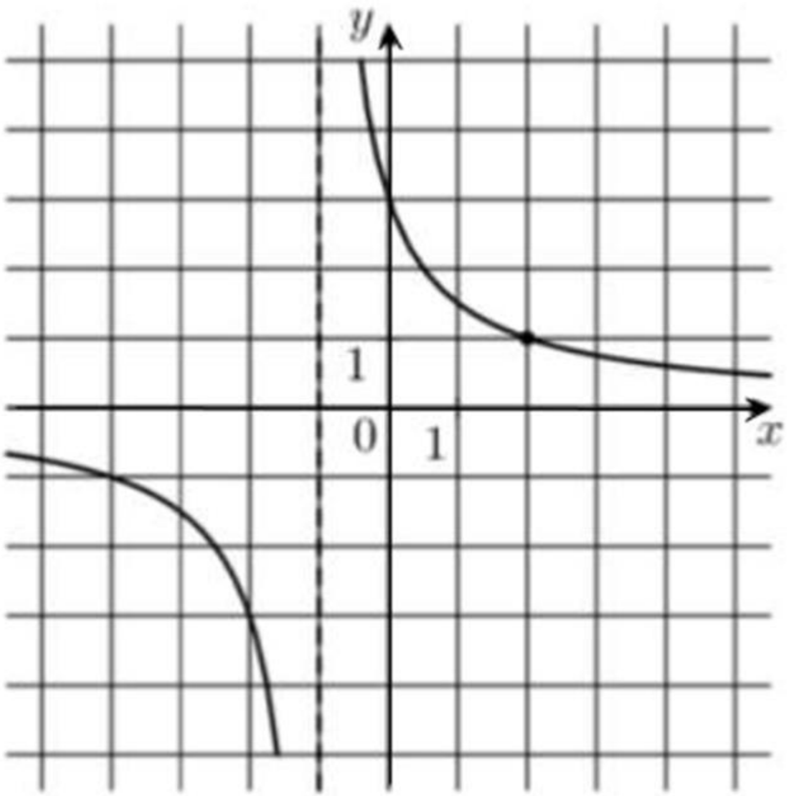
На рисунке функция $y = \frac{k}{x-2}$

вертикальная асимптота

$x = 2$ т.е.$a = -2$.



12. На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x+a}$. Найдите $f(19)$.



Вертикальная асимптота $x = -1$, значит $a = 1$

На графике точка $(2; 1)$

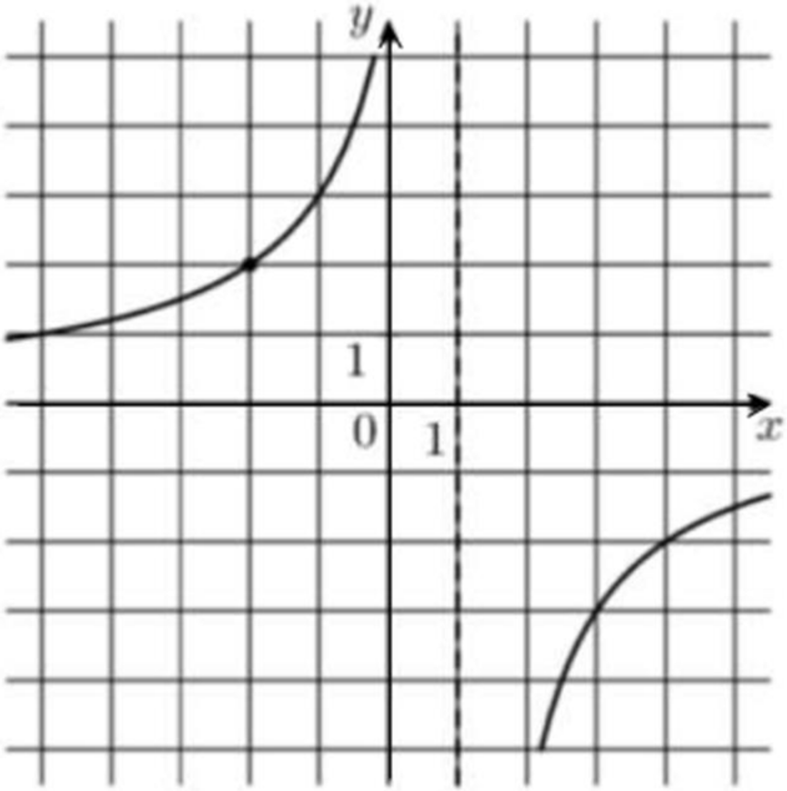
$$\frac{k}{2+1} = 1$$

$$k = 3$$

$$f(19) = \frac{3}{19+1} = 0{,}15$$

Ответ: 0,15

13. На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x+a}$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 0,2.



Вертикальная асимптота $x = 1$, значит $a = -1$

На графике точка $(-2; 2)$

$$\frac{k}{-2-1} = 2$$

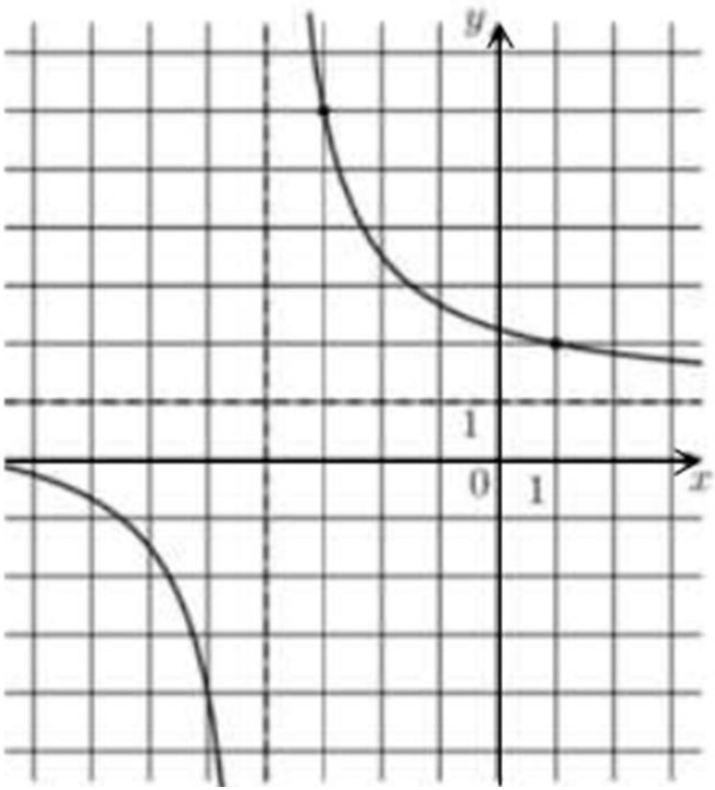
$$k = -6$$

$$\frac{-6}{x-1} = 0{,}2$$

$$x = -29$$

Ответ: -29.

14. На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{kx+a}{x+b}$. Найдите k.



Рассмотрим сдвиг графика $y = \frac{m}{x}$

горизонтальная асимптота $y = 1,$

вертикальная асимптота $x = -4.$

Получаем уравнение $y = \frac{m}{x+4} + 1$

На графике возьмем точку (1;2)

$$\frac{m}{1+4} + 1 = 2 \Rightarrow \frac{m}{5} = 2 - 1$$

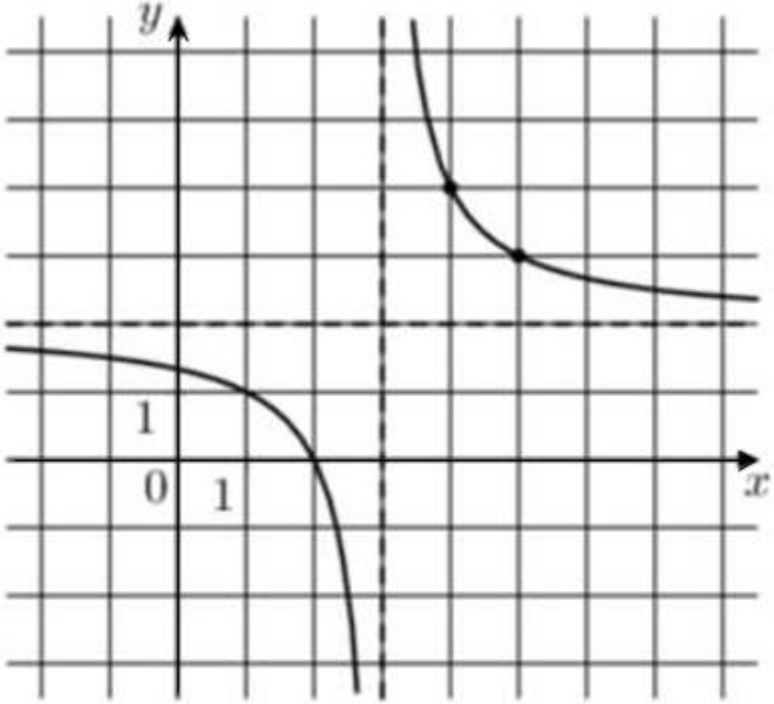
$$\frac{m}{5} = 1 \Rightarrow m = 5$$

$$f(x) = \frac{5}{x+4} + 1 = \frac{5+x+4}{x+4} = \frac{x+9}{x+4}$$

Коэффициент $k = 1, a = 9, b = 4$

Ответ: 1

15. На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{kx+a}{x+b}$. Найдите a.



Рассмотрим сдвиг графика $y = \frac{m}{x}$

горизонтальная асимптота $y = 2$,

вертикальная асимптота $x = 3$.

Получаем уравнение $y = \frac{m}{x-3} + 2$

На графике возьмем точку (4;4)

$$\frac{m}{4-3} + 2 = 4 \Rightarrow \frac{m}{1} = 4 - 2$$

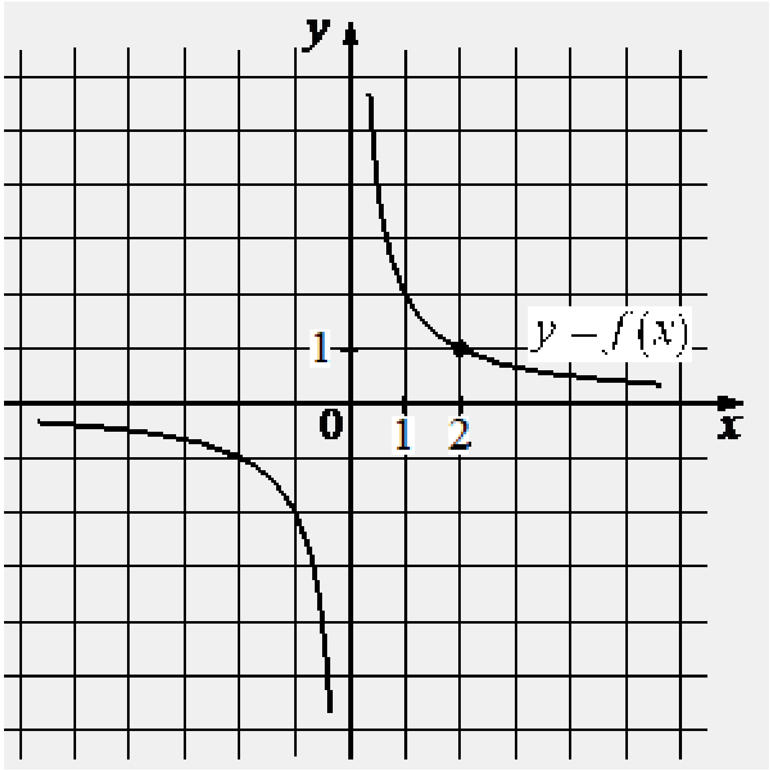
$$\frac{m}{1} = 2 \Rightarrow m = 2$$

$$f(x) = \frac{2}{x-3} + 2 = \frac{2+2x-6}{x-3} = \frac{2x-4}{x-3}$$

Коэффициент $k = 2, a = -4, b = -3$

Ответ: -4

16. На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



На графике выделена точка (2;1) подставим координаты в уравнение:

$$\frac{k}{2} = 1 \Longrightarrow k = 2$$

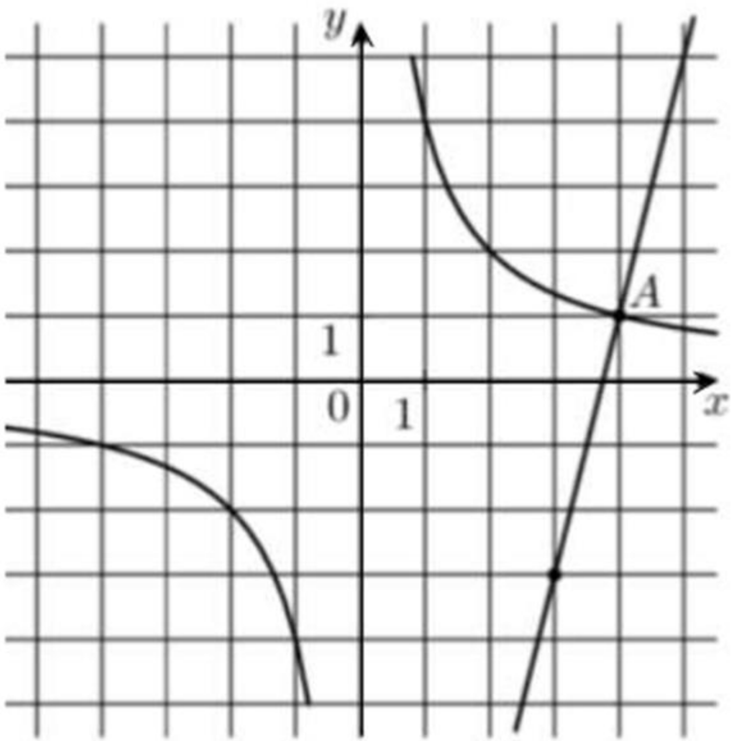
Получаем уравнение функции

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

$$f(10) = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

Ответ: 0,2

17. На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.



$f(x) = \frac{k}{x}$, график - гипербола

Точка A(4;1)

$\frac{k}{4} = 1 \Longrightarrow k = 4$ и $f(x) = \frac{4}{x}$

$g(x) = ax + b$, график-прямая

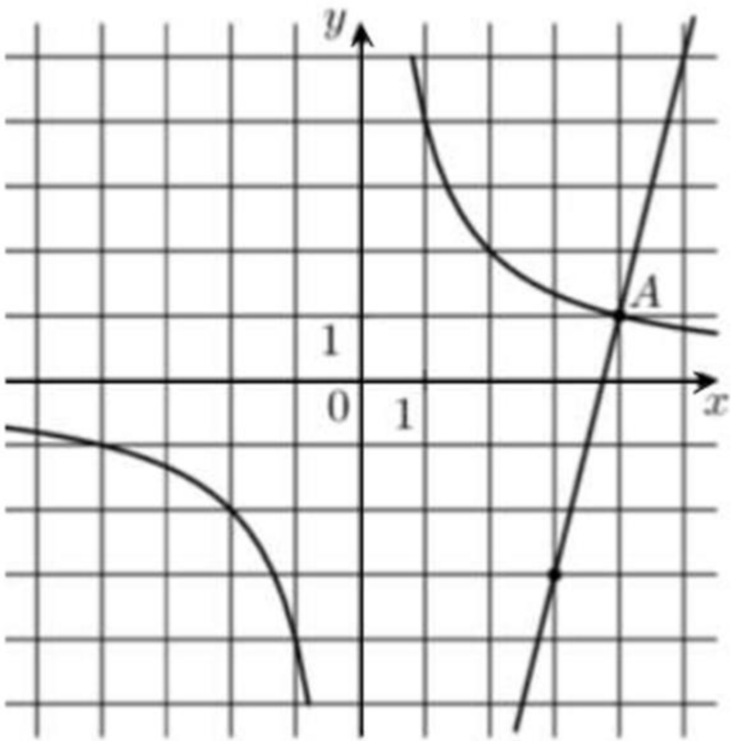
На графике точки(4;1) и (3;-3)

$\begin{cases} 4a + b = 1 \\ 3a + b = -3 \end{cases}$ вычитая

получим

$a = 4$, находим $b = -15$

$g(x) = 4x - 15$



Находим точки пересечения, составим систему:

$$\begin{cases} y = \dfrac{4}{x}, \\ y = 4x - 15; \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\frac{4}{x} = 4x - 15 / \cdot x \neq 0$$

$$4 = 4x^2 - 15x$$

$$4x^2 - 15x - 4 = 0$$

$x_1 = 4$ - абсцисса точки A

$x_2 = -0{,}25$ - абсцисса точки B

Найдем ординату точки B:

$$g(-0{,}25) = 4 \cdot (-0{,}25) - 15 = -16$$

Ответ: -16.

Спасибо за внимание.
Желаю удачи!

Помозова Инна Григорьевна,
учитель математики МБОУ СОШ №2
г. Темрюк МО Темрюкский район.