Свойства производной. Задание № 12 ЕГЭ по математике профильного уровня

Кутузова Оксана Владимировна,
учитель математики
МАОУ СОШ № 66 г. Краснодара

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

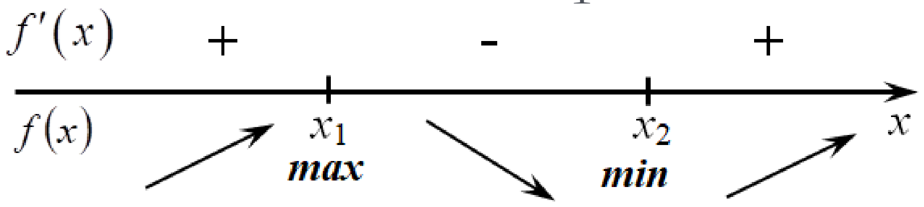
Если функция f(x) определена и непрерывна на промежутке *X* и во всех внутренних точках этого промежутка имеет положительную производную ($f'(x)>0$), то функция возрастает на *X*.
Если функция f(x) определена и непрерывна на промежутке *X* и во всех внутренних точках этого промежутка имеет отрицательную производную ($f'(x)<0$), то функция убывает на *X*.
Говорят, что функция $y=f(x)$ имеет *максимум* (*минимум*) *в точке* $x=a$, если у этой точки существует окрестность, в которой

$f(x)<f(a)$ $(f(x)>f(a))$ для $x\neq a$.

Точки максимума и минимума объединяются общим термином – **точки экстремума**.

Правило исследования функции $y=f(x)$ на экстремум:

1. найти область определения функции;
2. найти $f'(x)$;
3. найти точки, в которых выполняется равенство $f'(x)=0$;
4. найти точки, в которых $f'(x)$ не существует;
5. отметить на координатной прямой все точки в которых производная равна 0 или не существует и область определения функции $y=f(x)$; получатся промежутки области определения функции, на каждом из которых производная функции $y=f(x)$ сохраняет постоянный знак;
6. определить знак $f'(x)$ на каждом из промежутков;
7. если при переходе через точку производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», то эта точка является точкой максимума функции, а если с «-» на «+», то точкой минимума. На приведенном рисунке точка x_1 является точкой максимума, а x_2 точкой минимума



Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции $y=f(x)$ на отрезке :

1. найти $f'(x)$;

2. найти точки, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует, и отобрать из них те, что лежат внутри отрезка ;

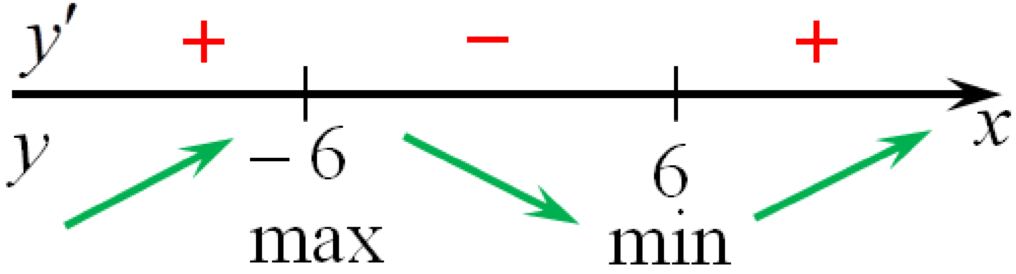
3. вычислить значение функции $y=f(x)$ в точках, полученных в пункте 2,и на концах отрезка (в точках a и b) и далее выбрать из них наибольшее и наименьшее, которые будут соответственно наибольшим и наименьшим значениями функции $y=f(x)$ на отрезке .

Эти значения обозначаются $y_{\text{наим}}$, $y_{\text{наиб}}$.

Основные виды заданий на производную в ЕГЭ

Задача 1. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 108x + 5$

Область определения функции: $x \in R$.
Найдём производную заданной функции: $y' = 3x^2 — 108$.
Найдём нули производной: $3x^2 — 108 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x_1 = -6, x_2 = 6$.
Определим знаки производной и её поведение:



Следовательно, точка максимума $x = —6$.
Ответ: – 6.

Задача 2

Найдите точку максимума функции: $y = \frac{49}{x} + x + 11$

- Чтобы найти точки экстремума необходимо найти производную функции:

- $y` = (\frac{49}{x} + x + 11)` = (49 * x^{-1} + x + 11)` = (49 * x^{-1})` + x` + 11` = -49 * x^{-2} + 1$

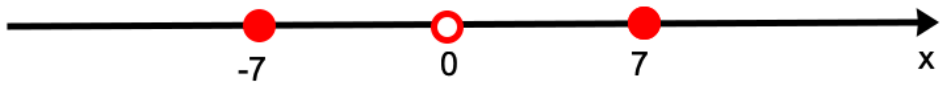
И найдем корни получившегося уравнения, они же и будут точками экстремума. Для этого избавимся от отрицательной степени и приведем к общему знаменателю

$$\frac{-49 + x^2}{x^2} = 0$$

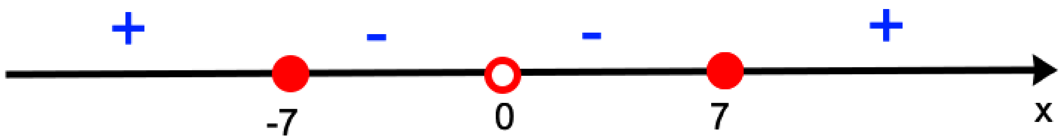
Разложим разность квадратов: $\frac{(x-7)(x+7)}{x^2} = 0$

Корнями этого уравнения будут: x=±7 эти значения x и будут точками минимума и максимума.

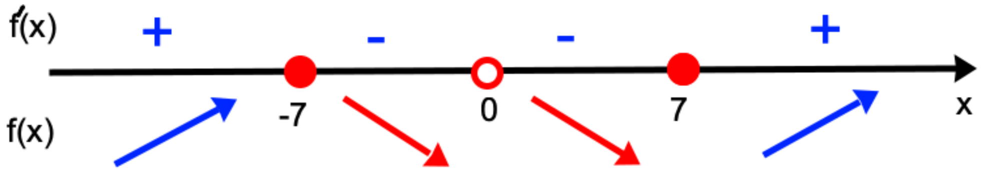
Только вот какая именно точка будет минимумом, а какая максимумом? Чтобы в этом разобраться, расставим полученные корни на числовой прямой (отметим ноль из знаменателя, как выколотый):



И прямо как в методе интервалов в неравенствах расставим знаки производной на числовой прямой.



Там, где стоят плюсы, производная положительна, а значит функция на этих промежутках возрастает. Там, где стоят минусы, производная отрицательна, а значит функция убывает. Покажем это при помощи наклонных стрелочек вверх (возрастающая функция) и вниз (убывающая функция) под числовой прямой.



Задача 3

Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2+441}$

•

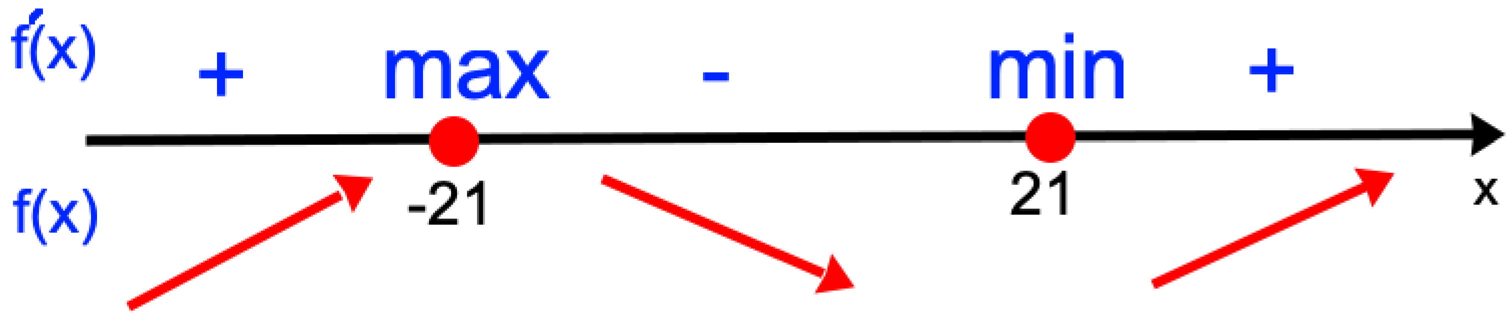
- Первым делом находим производную от функции. Здесь нам понадобится формула производной от частного двух функций

- $y` = (\frac{x}{x^2+441})` = -\frac{x`*(x^2+441)-x*(x^2+441)`}{(x^2+441)^2} = -\frac{1*(x^2+441)-x*2x}{(x^2+441)^2} = -\frac{x^2+441-x*2x}{(x^2+441)^2} =$

$-\frac{-x^2+441}{(x^2+441)^2} = \frac{x^2-441}{(x^2+441)^2} = \frac{(x-21)(x+21)}{(x^2+441)^2}$

- Приравниваем к нулю: $\frac{(x-21)(x+21)}{(x^2+441)^2} = 0$

- Корнями получившегося уравнения будут x=±21. Знаменатель будет всегда положительный. Отметим корни на числовой прямой, определим знаки производной и стрелочками покажем промежутки возрастания и убывания самой функции:



Точка x=−21 будет точкой максимума, а точка x=21 - точкой минимума. В задании требовалось найти только точку максимума, можем записать ответ.
Ответ: Точка максимума x=−21.

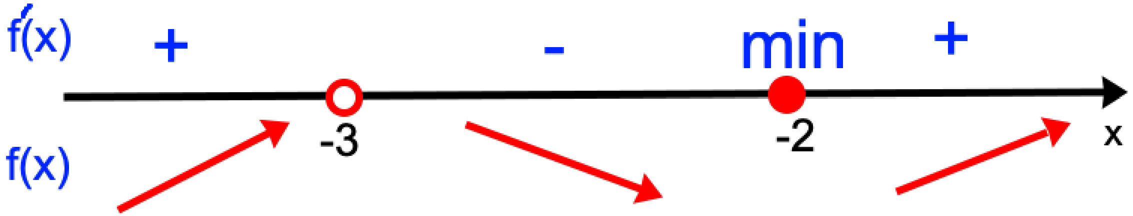
Задача 4

Найдите наименьшее значение функции $y = 3x - \ln(x+3)^3$ *на интервале* $[-2{,}5;0]$.

- Ищем производную $y` = \frac{3x+6}{x+3}$
- Приравниваем производную к нулю и находим корни на заданном отрезке:

$$\frac{3x+6}{x+3} = 0,\ x = -2.$$

- На числовой прямой определяем знаки производной и промежутки возрастания и убывания функции:



Чтобы определить наименьшее значение, подставим в исходную функцию найденную точку минимума и концы отрезка $x \in [-2{,}5;0]$:
Обратите внимание, что значение функции в точках $(-2{,}5)$ и (0)получились "плохие": мы не можем посчитать значения таких логарифмов без калькулятора. Поэтому, если возникает такая ситуация, то мы просто отбрасываем эти значения, ведь в заданиях ЕГЭ в первой части не может быть иррациональных значений. Такая маленькая хитрость. Но будьте внимательны, может быть, иррациональные значения у вас получаются, потому что где-то ошибка.
Кстати, подставлять в этом примере границы отрезка необязательно еще и по другой причине: на промежутке $[-2{,}5;-2)$ функция убывает, а на промежутке \((-2;0]] возрастает. Минимальное значение на указанном промежутке может быть только в точке минимума.
Ответ: -6.

Задача 5

Найдите наименьшее значение функции $y = x * \sqrt{x} - 9x + 25$ *на интервале* [1;50].

Производную от данной функции можно посчитать, воспользовавшись формулой производной от произведения

$$(f(x) * g(x))^` = (f(x))^` * g(x) + f(x) * (g(x))^`$$

Есть другой вариант взятия производной, на мой взгляд, он легче. Для это мы представим квадратный корень в виде степени $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$y^` = (x * \sqrt{x} - 9x + 25)^` = (x * x^{\frac{1}{2}} - 9x + 25)^` = (x^{\frac{3}{2}} - 9x + 25)^` = \frac{3}{2} * x^{\frac{1}{2}} - 9 = \frac{3}{2} * \sqrt{x} - 9$$

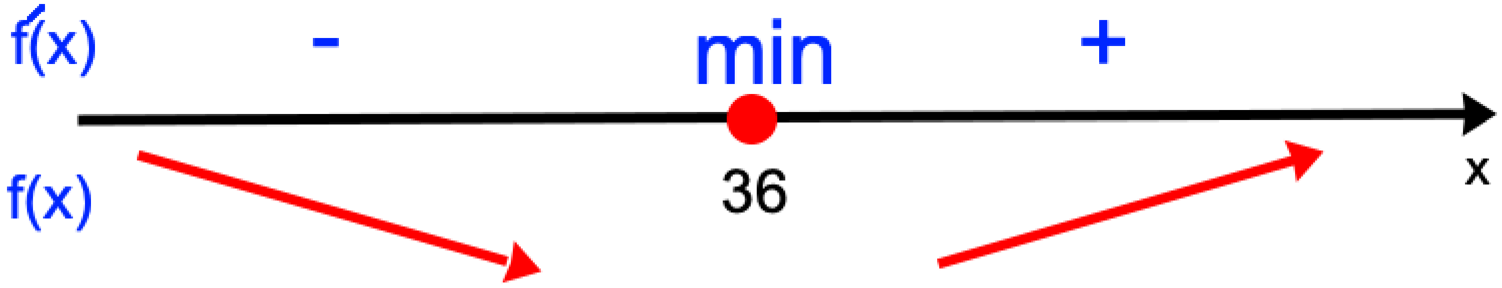
Приравниваем производную к нулю и находим корни уравнения на указанном интервале:

$$\frac{3}{2} * \sqrt{x} - 9 = 0$$

На числовой прямой определяем знаки производной и промежутки возрастания и убывания функции:

Приравниваем производную к нулю и находим корни уравнения на указанном интервале: $\frac{3}{2} * \sqrt{x} - 9 = 0$

На числовой прямой определяем знаки производной и промежутки возрастания и убывания функции:



Точка x=36 будет точкой минимума. Подставляем в исходную функцию и находим наименьшее значение:

Ответ: −83.

Задача 6

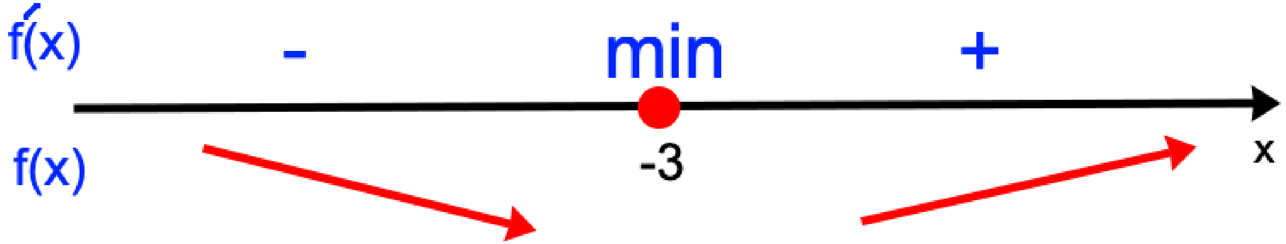
Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 + 6x + 12}$

Квадратный корень - это возрастающая функция, чем меньше подкоренное выражение, тем меньше сам корень. То есть, в точке, где минимум у подкоренного выражения $x^2 + 6x + 12$, будет и минимум у всей функции . Возьмем производную от функции $y = x^2 + 6x + 12$.

$$y' = 2x + 6$$

Приравниваем к нулю и находим точку минимума: 2x+6=0; x=−3.

Ответ: x=−3.



Задача 7

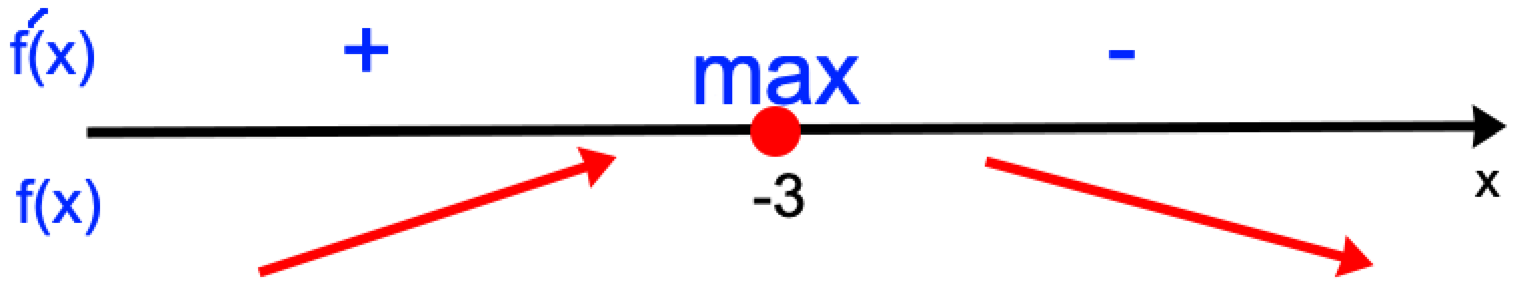
Найдите наибольшее значение функции $y = 3^{-7-6x-x^2}$

Показательная функция - это возрастающая функция, чем больше степень, тем больше будет вся функция. Найдем наибольшее значение степени $(-7 - 6x - x^2)$.

Найдем производную $(-7 - 6x - x^2)` = -6 - 2x$

Приравниваем производную к нулю: −6−2x=0; x=−3

В точке x=−3 функция будет принимать наибольшее значение, найдем его:



Ответ: 9.