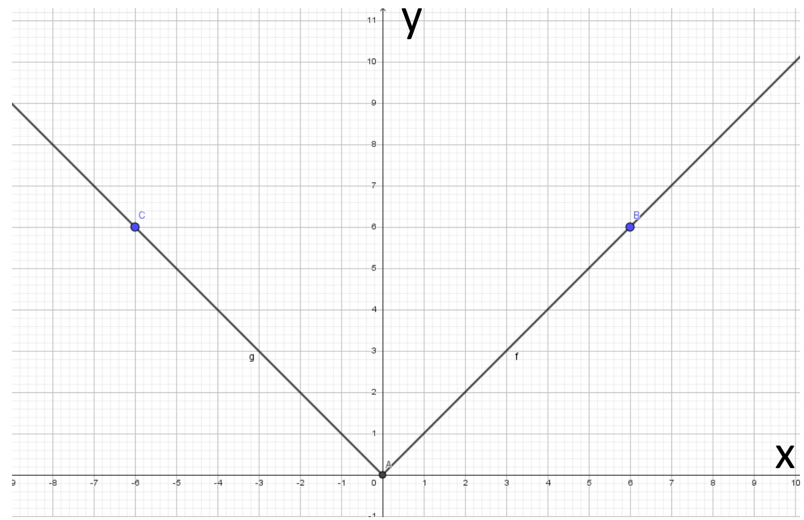
Графики функции. Задание №11 профильного ЕГЭ по математике

Автор:
Борщакова Елена Николаевна,
учитель математики МОАУСОШ №4
им. А.И. Миргородского
г. Новокубанска

Элементарные функции

1. у= $|x|$ модуль числа
2. у = $\sqrt{x}$ функция корень n-ой степени, n=2
3. у = $\log_a x$ логарифмическая функция
4. у = a^x показательная функция

Функция y= $|x|$



Функция y= $|x|$

D(y) =$(-\infty; +\infty)$;

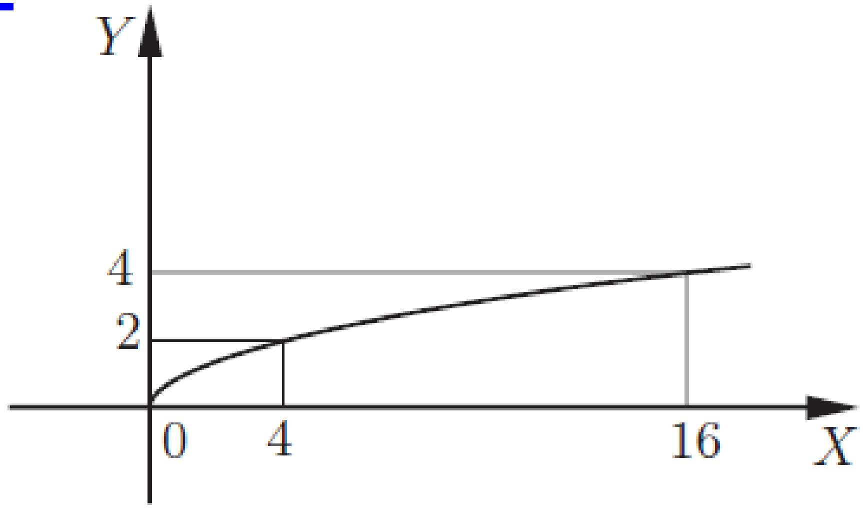
E(y) = $[0; +\infty)$;

график симметричен относительно оси Оу;

состоит из двух прямых, исходящих из точки (0;0) – биссектрисы 1 и 2 координатных четвертей.

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 203-53-01, кафедра математики, информатики и технологического образования тел.: +7 (861) 203-50-52

Функция $y = \sqrt{x}$



$D(y) = [0; +\infty)$;

$E(y) = [0; +\infty)$;

График – ветвь параболы;

Монотонно возрастает на своей области определения.

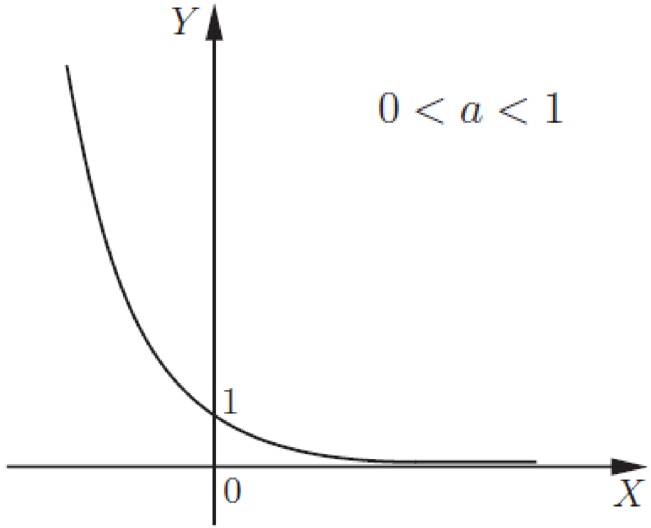
Показательная функция $y = a^x$

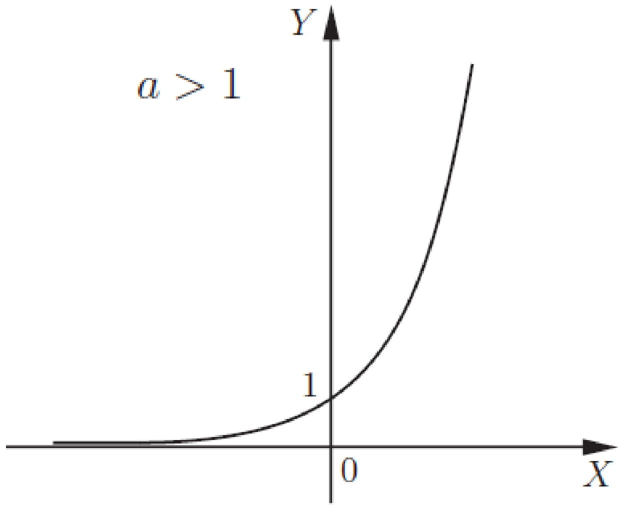
D(y) $=(-\infty; +\infty)$;

E(**y**) = $(0; +\infty)$;

Монотонно возрастает при $a > 1$**;**

Монотонно убывает при $0 < a < 1$





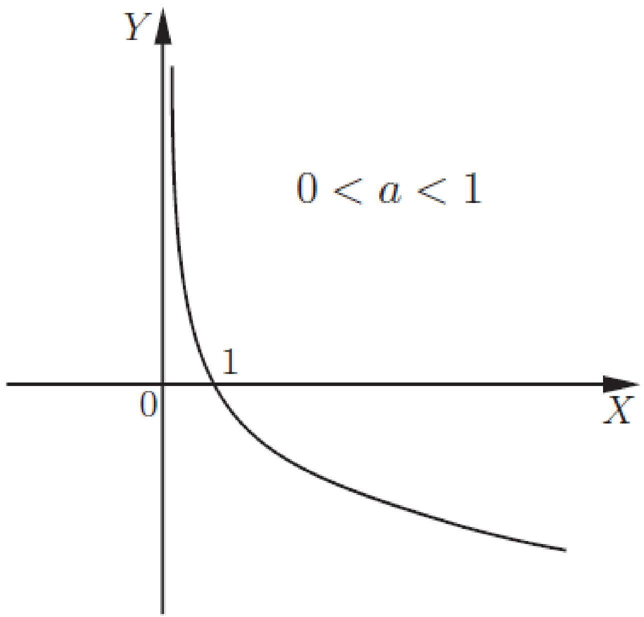
Логарифмическая функция $y = \log_a x$

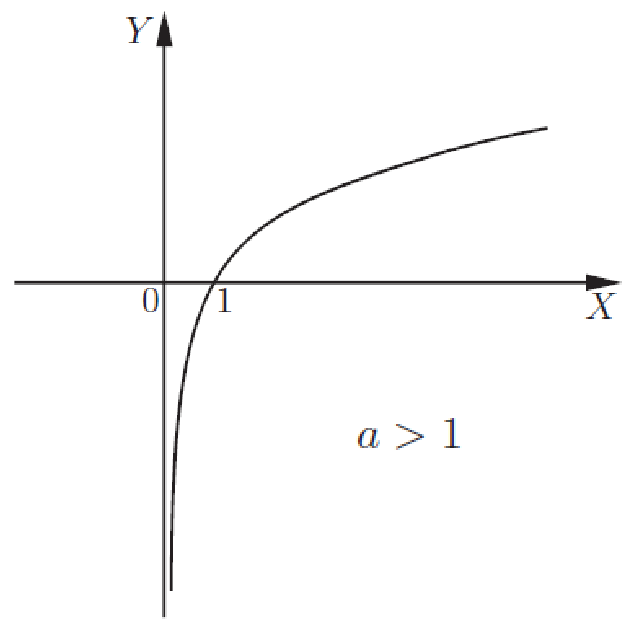
$D(y) = (0; +\infty)$;

$E(y) = (-\infty; +\infty)$;

Монотонно возрастает при $a > 1$;

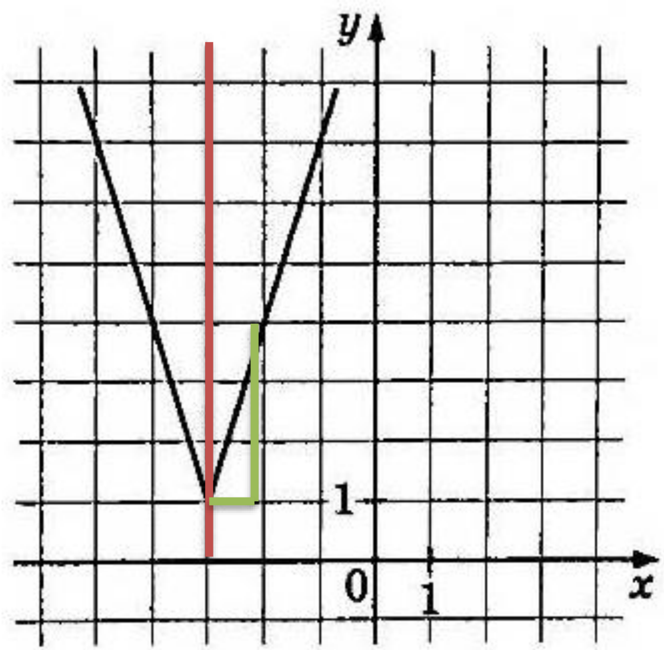
Монотонно убывает при $0 < a < 1$





Задание 1.

На рисунке изображён график функции $f(x) = |kx + b| + c$, где числа k, b и c — целые, $k > 0$. Найдите значение $f(-6{,}4)$.



В силу того, что график «птичка» симметричен относительно прямой x= - 3, то график y = |x| претерпел преобразование. Вершина находиться в точке (-3;1), значит формула функции

$y = 3|\,x + 3\,| + 1.$

Запишем формулу немного по другому:

$y = |\,3x + 9\,| + 1$, $k = 3$, $b = 9$, $c = 1$.

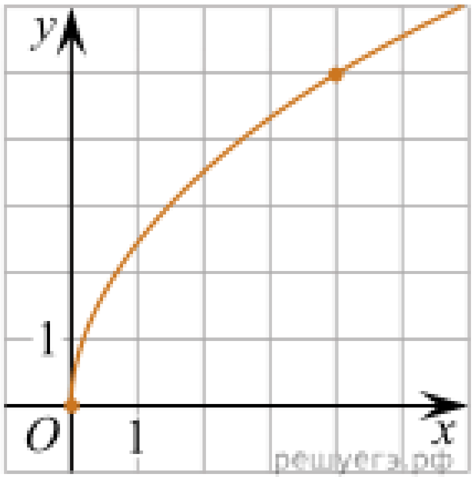
$f(-\,6{,}4) = \mathbf{11{,}2}$

| 1 | 1 | , | 2 |

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 203-53-01, кафедра математики, информатики и технологического образования тел.: +7 (861) 203-50-52

Задание 2.

На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(6,76)$.



Решение:

Ветвь параболы выходит из начала координат, поэтому нужно найти только коэффициент растяжения. Координаты выделенной точки (4;5).

$$k\sqrt{4} = 5, k = 2{,}5.$$

$$f(x) = 2{,}5\sqrt{x}.$$

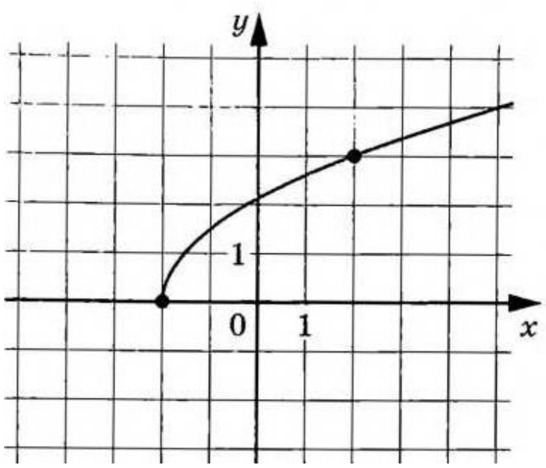
$$f(6{,}76) = 2{,}5\sqrt{6{,}76} = 2{,}5 \cdot 2{,}6 = 6{,}5.$$

Ответ: **6,5**

6 , 5

Задание 3.

На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x+p}$. Найдите $f(0{,}25)$



Решение:

График функции получен из графика $f(x) = \sqrt{x}$, путем параллельного переноса вдоль оси x влево на 2 ед.отрезка (p=2) и растяжением вдоль оси у (k). Коэффициенты p, k найдём из равенств. График функции проходит через точки (-2;0), (2;3). Подставим в формулу функции координаты этих точек:

$k\sqrt{2+p} = 3, k\sqrt{4} = 3, k = 1{,}5.$

$k\sqrt{-2+p} = 0; p = 2$

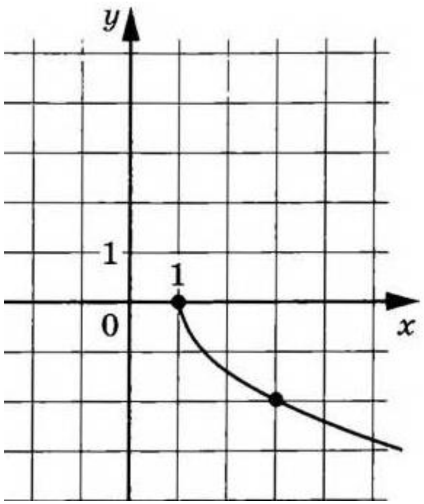
$f(x) = 1{,}5\sqrt{x+2}$ – формула функции,

$$f(0{,}25) = 1{,}5\sqrt{0{,}25+2} = 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25.$$

Ответ: **2,25**

Задание 4.

На рисунке изображён график функции $f(x) = p\sqrt{x+d}$.
Найти значение x, при котором $f(x) = -6$.



Решение:

Используя координаты точек, выделенные на рисунке (1;0), (3;-2) (*<u>считывая координаты с чертежа, следим за единичными отрезками на осях)</u>*, найдём коэффициенты p,d.

$$\begin{cases} p\sqrt{1+d} = 0, \\ p\sqrt{3+d} = -2; \end{cases} \begin{cases} 1+d = 0, \\ p\sqrt{3-1} = -2; \end{cases} \begin{cases} d = -1, \\ p = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

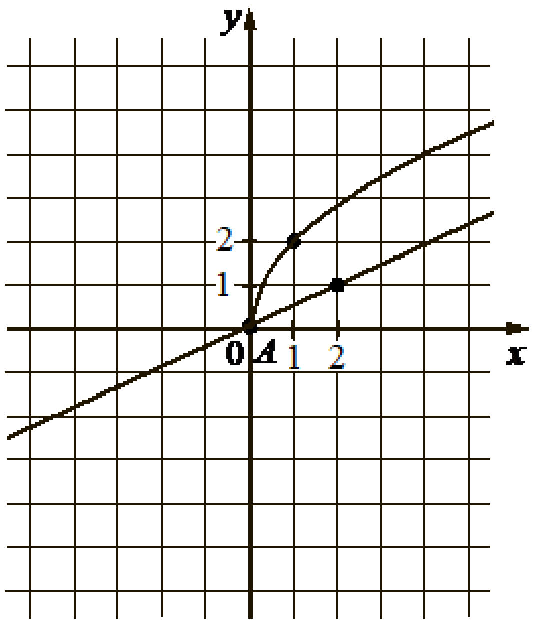
$f(x) = -\sqrt{2}\sqrt{x-1}$,

$$-\sqrt{2}\sqrt{x-1} = -6,$$
$$2(x-1) = 36,$$
$$x - 1 = 18, x = 19.$$

Ответ: **19**

Задание 5.

На рисунке изображены графики функций видов f(x)=$a\sqrt{x}$ и g(x)=kx, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Решение:

На чертеже представлены графики линейной функции – прямая, проходящая через (0;0) и ветвь параболы, исходящая из той же точки - точка A. Точка B на чертеже не показана, но она расположена в 1 четверти, значит её координаты положительны и из абсциссы точки B можно извлечь корень.

1.Линейная функция –прямая проходит через точку (2;1) – ***k*=0,5**.

$$g(x) = 0{,}5x.$$

2. Считываем координату точки - (1;2), вычисляем коэффициент:

$$a\sqrt{1} = 2, a = 2, \text{значит } f(x) = 2\sqrt{x}.$$

3.Решаем уравнение:

$$2\sqrt{x} = 0{,}5x, \qquad 4\sqrt{x} = x, \qquad 16x = x^2,$$

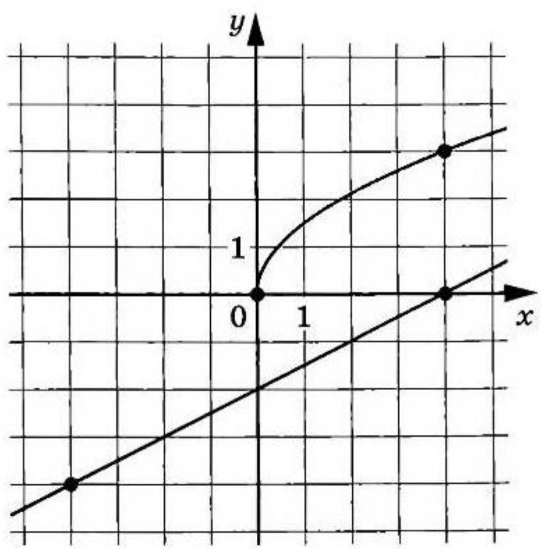
$$x = 0 \text{ или } x = 16.$$

Таким образом абсцисса точки B равна 16.

Ответ: **16**

Задание 6.

На рисунке изображены графики функций $f(x)=a\sqrt{x}$ и $g(x)=kx+b$, которые пересекаются в точке $A(x_0;\ y_0)$. Найдите y_0.



Решение:

На графиках даны контрольные точки, которые позволят найти формулу функции.

$f(x)=a\sqrt{x}$, (4;3), $a\sqrt{4}=3, a=1{,}5$,

$\underline{f(x)=1{,}5\sqrt{x}.}$

$g(x)=kx+b$, (4;0), (-4;-4),

$\begin{cases} 4k+b=0, \\ -4k+b=-4, \end{cases}$ сложим уравнения 2b = -4, b = -2; 4k – 2 = 0,

4k = 2, k = 0,5 $\underline{\qquad g(x)=0{,}5x-2,}$

Чтобы найти координаты точки пересечения графиков – решим уравнение:

$$1{,}5\sqrt{x}=0{,}5x-2, \qquad 3\sqrt{x}=x-4,$$

$$x^2-17x+16=0,$$

$$x_1=1,\ x_2=16$$

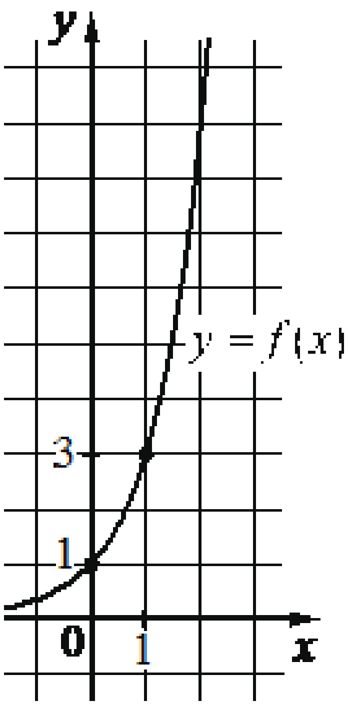
условию задачи удовлетворяет корень 16;

Подставим x в любую из формул функции и найдем искомую ординату точку А: y_0 = 0,5*16 – 2 = 8 – 2 = 6.

Ответ: **6**

Задание 7.

На рисунке изображен график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(3)$.



Решение:

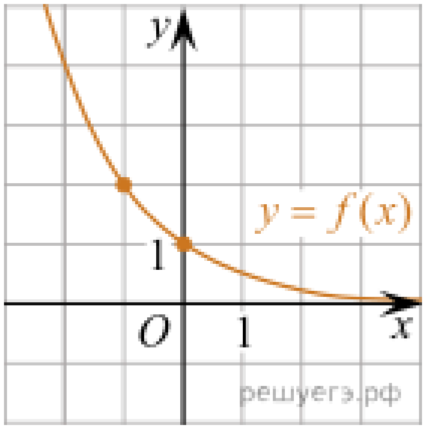
Функция возрастает, значит $a>1$. Подставив координаты точки (1;3) в формулу функции, получим $a = 3$.

$$f(x) = 3^x, f(3) = 3^3 = 27.$$

Ответ: **27**

Задание 8.

На рисунке изображен график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(4)$.



Решение:

Функция убывающая, значит $0<a<1$, подставив координаты точки (-1;2) в формулу функции, получим $a = 0,5$.

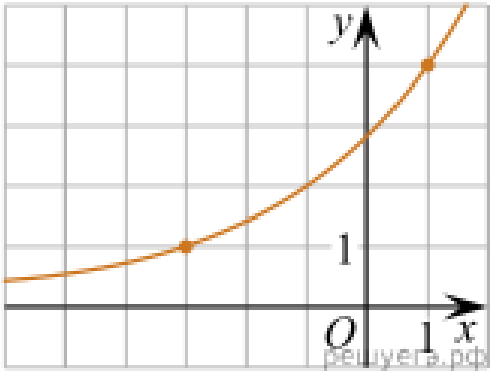
$$f(x) = 0{,}5^x, f(4) = 0{,}5^4 = 0{,}0625.$$

Ответ: **0,0625**

0 , 0 6 2 5

Задание 9.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a^{x+b}$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 16$.



Решение:

Функция возрастает, значит $a>1$. Считываем координаты (-3;1), (1,4), подставляем в формулу функции и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a^{-3+b} = 1, \\ a^{1+b} = 4; \end{cases} \begin{cases} -3 + b = 0, \\ a^4 = 4; \end{cases} \begin{cases} b = 3, \\ a = \sqrt{2}; \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{2}^{x+3}.$$

Решим уравнение:

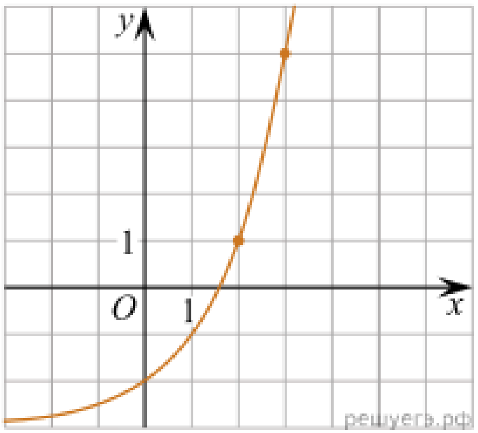
$$\sqrt{2}^{x+3} = 16, \qquad \sqrt{2}^{x+3} = \sqrt{2}^{8}, \qquad x + 3 = 8,$$

$$x = 5.$$

Ответ: **5**

Задание 10.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 29$.



Решение:

функция возрастает, значит $a>1$. График функции сдвинут параллельным переносом вдоль оси оу на 3 ед. отрезка вниз, значит $b = - 3$. Можно вычислить b через координаты точки (0;-2)

$a^0 + b = -2$, $b = -2-1 = -3$.

Подставляя координаты (2;1) в формулу функции, найдём a:

$a^2 - 3 = 1$, $a^2 = 4$, $a = 2$, т.к. $a>1$

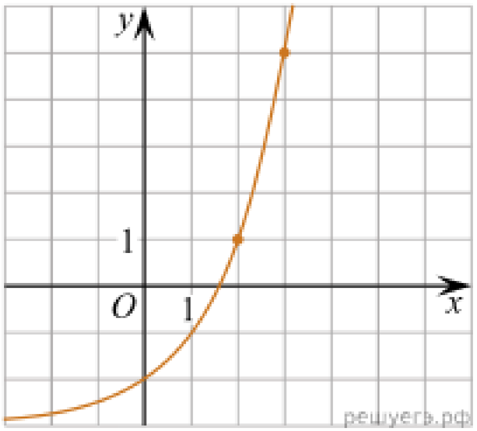
$$f(x) = 2^x - 3.$$

Решим уравнение: $2^x - 3 = 29$, $2^x = 32$, $x = 5$.

Ответ: **5**

Задание 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите $f(6)$.



Решение:

1 способ: функция возрастает, значит $a>1$. График функции сдвинут параллельным переносом вдоль оси Оу на 3 ед.отрезка вниз, значит $b=-3$. Можно вычислить b через координаты точки (0;-2)

$a^0 + b = -2$, $b = -2-1 = -3$.

Подставляя координаты (2;1) в формулу функции, найдём a:

$a^2 - 3 = 1$, $a^2 = 4$, $a = 2$, т.к. $a>1$

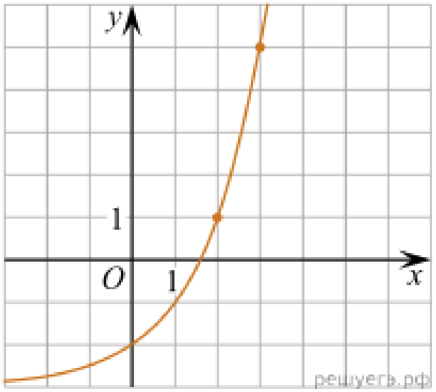
$$f(x) = 2^x - 3,$$

$$f(6) = 2^6 - 3 = 64 - 3 = 61.$$

Ответ: **61**

Задание 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите $f(6)$.



2 способ: Считываем координаты выделенных точек (2;1), (3;5), подставляем их в формулу функции и решаем систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 + b = 1, \\ a^3 + b = 5; \end{cases}$$

Из второго уравнения вычтем первое, получим

$$a^3 - a^2 - 4 = 0,$$

$$a^3 - 2a^2 + a^2 - 4 = 0,$$

$$(a-2)(a^2 + a + 2) = 0,$$

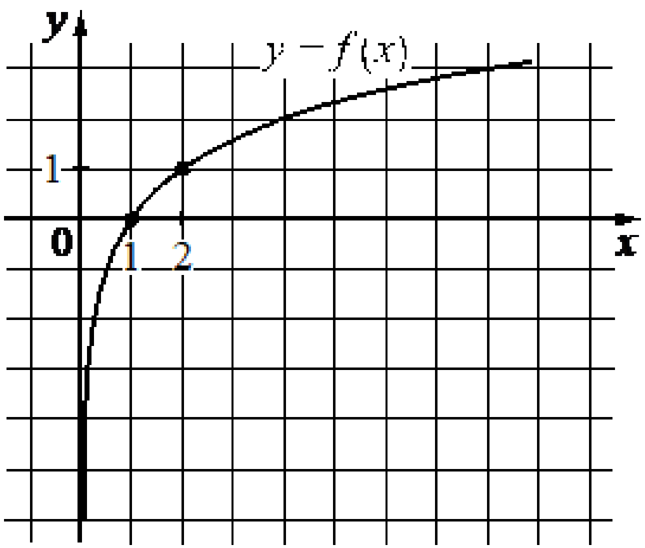
$a = 2$, квадратный трёхчлен корней не имеет.

Находим b, подставив 2 или в (1), или во (2) уравнение и далее выполнить действия как в способе 1.

Ответ: **61**

Задание 12.

На рисунке изображён график функции вида f(x)=log$_a$x. Найдите значение f(8).



Решение:

Функция возрастает, значит *a*>1. Подставим координаты точки (2;1) в формулу функции:

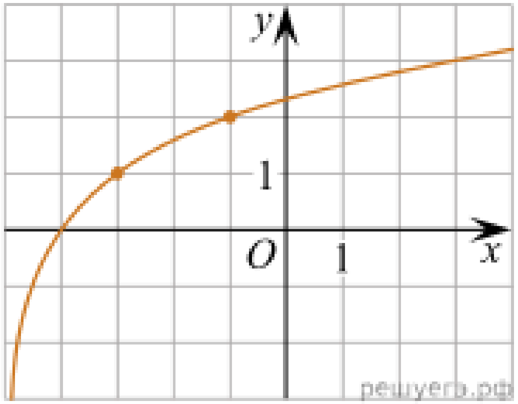
$$\log_a 2 = 1, \quad a^1 = 2, \quad a = 2,$$

$$f(x) = \log_2 x, \quad f(8) = \log_2 8 = 3.$$

Ответ: **3**

Задание 13.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x+b)$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 4$.



Решение:

Функция возрастает, значит a>1. График функции $f(x) = \log_a x$ сдвинут влево вдоль оси x на 5 ед.отрезков.

Подставив координаты точки (-4;0) в формулу функции получим b=5:

$$\log_a(-4+b) = 0, -4+b = 1, b = 5.$$

Используя координаты точки (-1;2), найдем основание функции:

$$\log_a(-1+5) = 2, a^2 = 4, a = 2, \text{т.к. } a > 1.$$

$$f(x) = \log_2(x+5).$$

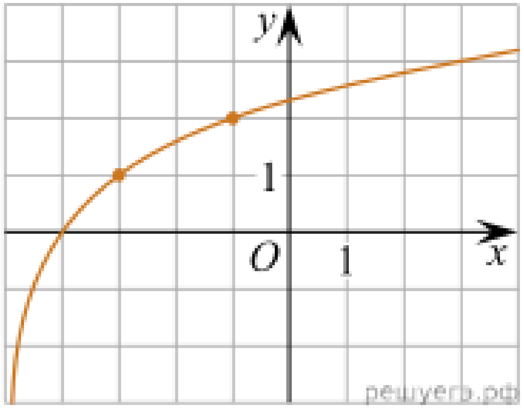
Решим уравнение:

$$\log_2(x+5) = 4, \qquad x+5 = 16, \qquad x = 11.$$

Ответ:**11**

Задание 13.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x+b)$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 4$.



2 способ

Найдём неизвестные коэффициенты, подставив в формулу функции координаты точек (-3;1), (-1;2):

$\begin{cases} \log_a(-3+b) = 1 \\ \log_a(-1+b) = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} a = -3+b \\ a^2 = -1+b \end{cases}$, решим систему относительно b

$$(b-3)^2 = b-1, b^2 - 7b + 10 = 0,$$

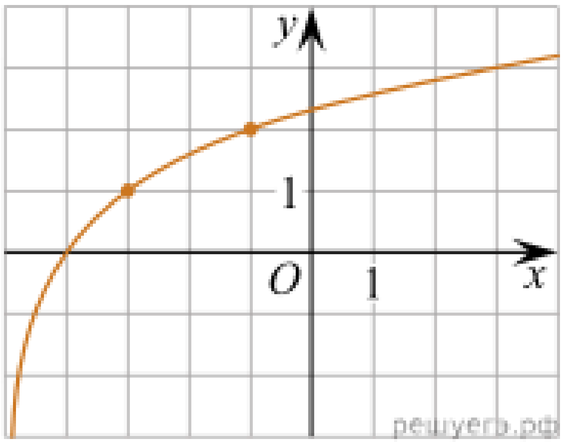
b=2 или ***b*=5**.

При *b*=2 не выполняется условие для *a* >1. Далее из системы находим значение основания и решаем уравнение.

Ответ:**11**

Задание 14.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x+b)$. Найдите $f(11)$.



Решение:

Функция возрастает, значит a>1. График функции $f(x) = \log_a x$ сдвинут влево вдоль оси x на 5 ед.отрезков. Подставив координаты точки (-4;0) в формулу функции получим b=5:

$$\log_a(-4+b) = 0, -4+b = 1, b = 5.$$

Используя координаты точки (-1;2), найдем основание функции:

$$\log_a(-1+5) = 2, a^2 = 4, a = 2, \text{т. к. } a > 1.$$

$$f(x) = \log_2(x+5).$$

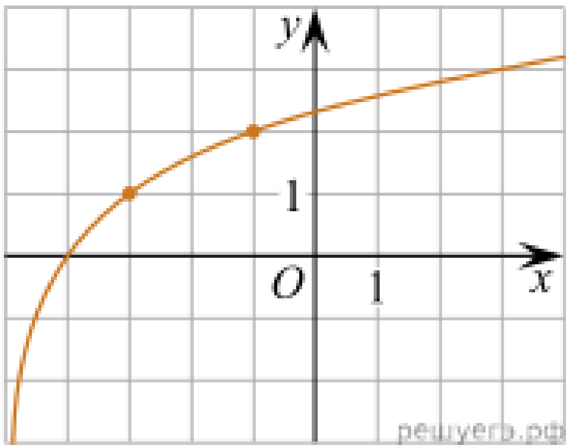
Найдём

$$f(11) = \log_2(11+5) = \log_2 16 = 4.$$

Ответ: **4**

Задание 14.

На рисунке изображён график функции $f(x)=\log_a(x+b)$. Найдите $f(11)$.



2 способ

Найдём неизвестные коэффициенты, подставив в формулу функции координаты точек (-3;1), (-1;2):

$\begin{cases}\log_a(-3+b)=1\\ \log_a(-1+b)=2\end{cases}$, $\begin{cases}a=-3+b\\ a^2=-1+b\end{cases}$, решим систему относительно b

$$(b-3)^2=b-1, b^2-7b+10=0,$$

b=*2* или ***b*=5**.

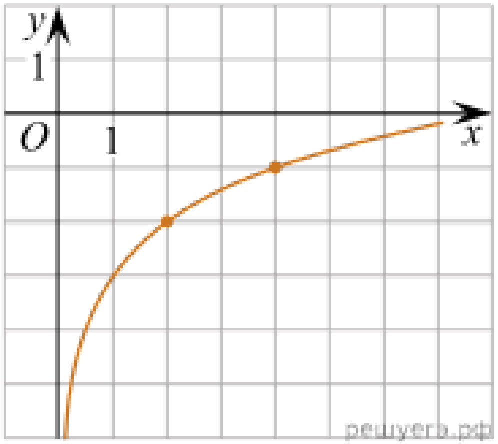
При *b*=*2* не выполняется условие для *a* >1. Далее из системы находим значение основания и отвечаем на главный вопрос задачи.

Ответ:**4**

ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

Задание 15.

На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите значение *x*, при котором $f(x) = 1$.



Решение:

Функция возрастает, значит *a*>1. График функции сдвинут вдоль оси y на 3 ед.отрезка вниз, значит b= -3.

Можно найти *b*,*a* решив систему уравнений.

Считываем координаты точек (4;-1), (2;-2).

$\begin{cases} \log_a 4 + b = -1, \\ \log_a 2 + b = -2, \end{cases}$ вычтем из (1) уравнение (2)

$$\log_a 4 - \log_a 2 = -1 + 2,$$

$$\log_a 2 = 1, a = 2.$$

$$\log_a 4 + b = -1, 2 + b = -1, b = -3.$$

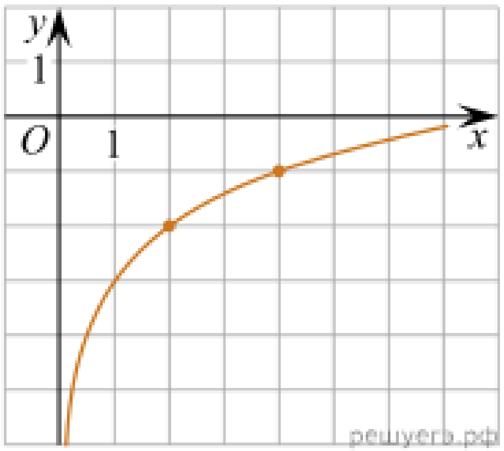
Найдем f(x) =1,

$$\log_2 x - 3 = 1, \log_2 x = 4, x = 16.$$

Ответ: **16**

Задание 16.

На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите $f(32)$.



Решение:

Функция возрастает, значит a>1. График функции сдвинут вдоль оси y на 3 ед.отрезка вниз, значит b= -3.

Можно найти b,a решив систему уравнений.

Считываем координаты точек (4;-1), (2;-2).

$\begin{cases} \log_a 4 + b = -1, \\ \log_a 2 + b = -2, \end{cases}$ вычтем из (1) уравнение (2)

$$\log_a 4 - \log_a 2 = -1 + 2,$$

$$\log_a 2 = 1, a = 2.$$

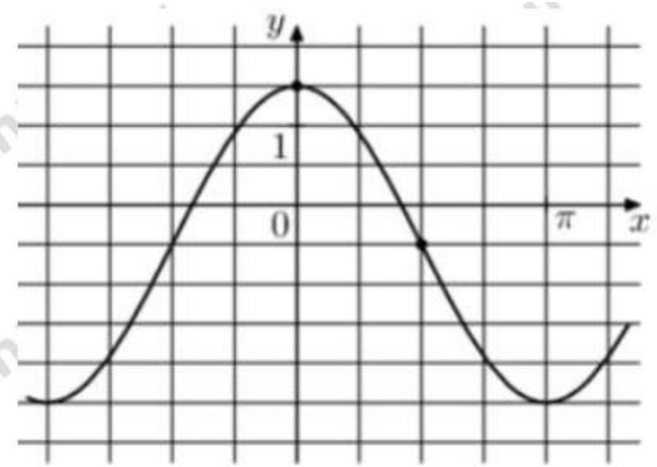
$$\log_a 4 + b = -1, 2 + b = -1, b = -3.$$

f(x) = $\log_2 x - 3$, f(32) = $\log_2 32 - 3$ = 5-3=2

Ответ: **2.**

Задание 17.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a\cos x + b$. Найдите a.



Решение:

По графику, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0{,}5$, тогда $a\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + b = -0{,}5 \Leftrightarrow a \cdot 0 + b = -0{,}5, b = -0{,}5$

Далее, по графику, $f(0) = 1{,}5$, тогда

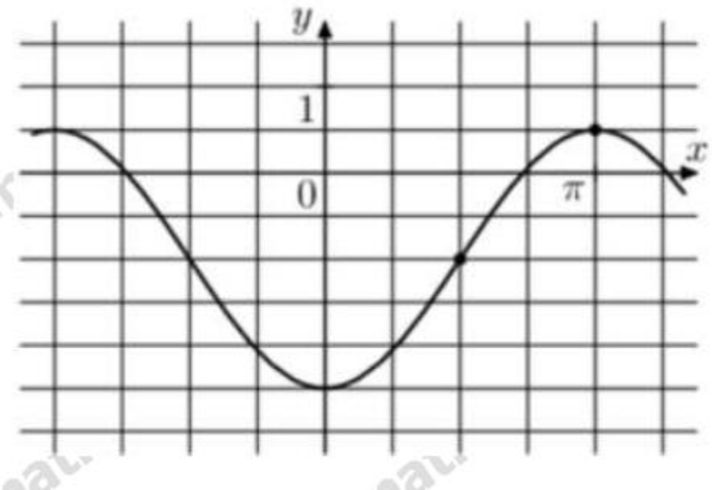
$$a\cos 0 - 0{,}5 = 1{,}5, a = 2.$$

2 способ: Амплитуда гармонического колебания – это расстояние от максимального значения до минимального. Считываем по графику амплитуду А=4, тогда а=2.

Ответ: **2.**

Задание 18.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a\cos x + b$. Найдите b.



Решение:

Следим за единичным отрезком. По оси y единичный отрезок 2 клетки, поэтому

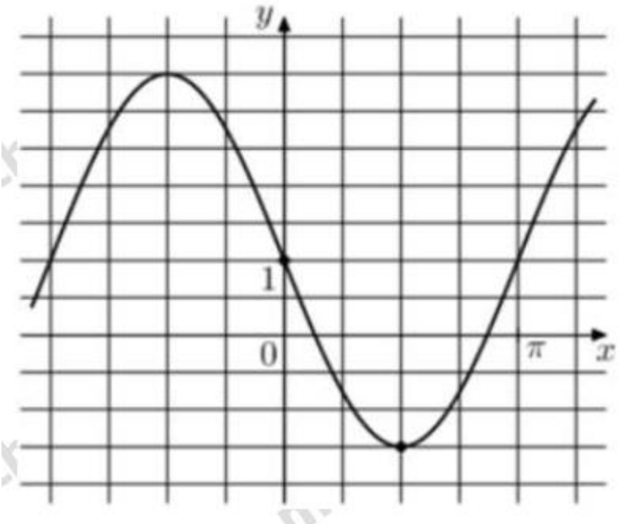
$f(\pi/2) = -1$.

$a\cos(\pi/2) + b = -1$, $b = -1$

Ответ: **-1.**

Задание 19.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a\sin x + b$. Найдите a.



Решение:

1 способ: амплитуда равна A=5, но необходимо учитывать свойства функции синус («горбы» перевернуты относительно оси x)- значит

a= - 2,5.

2 способ:

f(0) = 1, f(π/2) = - 1,5,

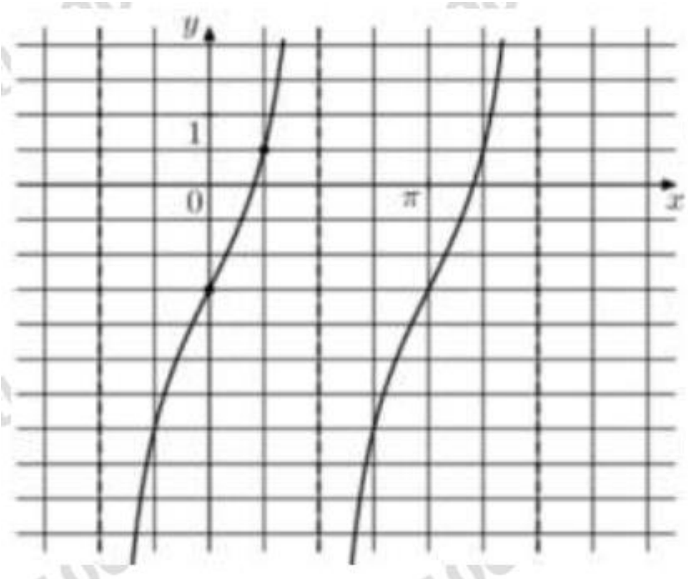
$a \sin 0 + b = 1$, $b = 1$;

$a \sin \pi/2 + 1 = -1{,}5$, $a = -2{,}5$

Ответ: **-2,5**

Задание 20.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a\,\mathrm{tg}\,x + b$. Найдите a.



Решение:

По графику, $f(0) = -1{,}5$, тогда

$$a\,\mathrm{tg}\,0 + b = -1{,}5 \Leftrightarrow a \cdot 0 + b = -1{,}5 \Leftrightarrow b = -1{,}5.$$

Далее, по графику, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}5$, тогда

$$a\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} - 1{,}5 = 0{,}5 \Leftrightarrow a = 2.$$

Ответ: **2**.