Элементы теории чисел Задание № 19.1 профильного ЕГЭ по математике

Артемова Ольга Леонидовна,

учитель математики,

МБОУ СОШ № 3 ст. Фастовецкой

Тихорецкого района

Разложение на простые множители

- **Простым** называется натуральное число, которое больше единицы имеет два делителя: себя и единицу

- Чтобы **разложить число на простые множители**, нужно разделить его на наименьшее простое число, которое возможно, а полученный остаток снова разделить на наименьшее простое число, которое возможно, и так далее, пока остаток не станет равен 1
- Наименьшее простое число - 2

Задача 1

Разложите число 2016 на простые множители

Решение: будем делить число 2016 на 2 до тех пор, пока не получится нечетное число.

$$2016 \to 1008 \to 504 \to 252 \to 126 \to 63$$

Затем будем делить на 3

$$63 \to 21 \to 7$$

7 делится на 7

$$7 \to 1$$

Степени мы определили, посчитав то, сколько раз мы делили на то или иное число (по количеству стрелок)

Ответ: $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$

Задача 2

Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 10 000. Найдите сумму этих чисел

Решение: Разложим 10 000 на простые множители. Делим на 2

10 000 → 5 000 → 2 500 → 1 250 → 625

Далее делим на 5

625 → 125 → 25 → 5 → 1

10 000=$2^4 \cdot 5^4$, разбиваем 10 000 на произведение двух чисел, каждое из которых не делится на 10, каждое из них не должно содержать 2 и 5 одновременно, тогда это вариант такой

Первое $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ и второе $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

Итак, одно число содержит только двойки, оно равно 2^4=16, а второе содержит только пятерки, равно 5^4=625. Тогда сумма этих чисел 16+625=641

Ответ: 641

Задача 3

Может ли у натурального числа быть ровно 3 натуральных делителя

Решение: У любого числа всегда есть два различных натуральных делителя – это 1 и само число.

Например, 11, у него 2 делителя – 1 и 11.

Возьмем число, не являющиеся простым, например, 12. Делители 1, 12. Еще 12 делится на 2, 12:2=6, значит, 12 делится на 6, еще 12 делится на 3, 12:3=4, то есть 12 делится еще и на 4. всего делителей:

1, 12, 2, 6, 3, 4, то есть 6 делителей

Этот пример показывает, что как только мы находим делитель, так появляется и второй и количество делителей становится четным.

Берем число 9. Его делители 1 и 9, еще 9 делится на 3, 9:3=3 количество делителей нечетное. 1, 3, 9

Правило: Чтобы количество делителей было нечетно, нужно потребовать, чтобы число $N=a^2$. Число являлось квадратом другого числа

Например, 16. $16=4^2$. делители: 1, 2, 4, 8, 16 делителей 5, то есть нечетное число

Ответ: может, например, 9, три делителя: 1, 3, 9

Делимость чисел

- **Делитель** –это натуральное число, на которое другое натуральное число делится без остатка
- Признаки делимости:
- **на 2** - последняя цифра числа четная (20**0**,30**2**,50**4**,61**6**, 32**8**)
- **на 3** - сумма цифр числа делится на 3 (111, сумма 1+1+1=3)
- **на 4** - последние две цифры числа составляют число, которое делится на 4 (763**24,** 24 делится на 4)
- **на 5** - последняя цифра числа 5 или 0 (12**5**, 30**0**)
- **на 6** - число делится и на 2 и на 3
- **на 7** - результат вычитания удвоенной последней цифры из числа без последней цифры, делится на 7 (например, 34**3**, 34-**3**·2=28)

Делимость чисел

- **на 8** - последние три цифры числа составляют число, которое делится на 8
- **на 9** - сумма цифр числа делится на 9
- **на 10** - последняя цифра числа 0
- **на 11** - сумма цифр числа, стоящих на четных местах равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах или отличается на 11
- **на 13** - число десятков сложенное с учетверенным числом единиц этого числа делится на 13 (например, 533: $53+3\cdot4=65$)
- **на 17** - если разность этого числа без его последней цифры и его последней цифры, умноженной на 5, делится на 17 (например, 1564: $156-4\cdot5=136$,
- $13-6\cdot5=-17$
- **на 19** - сумма этого числа без его последней цифры его последней цифры, умноженной на 2, делится на 19 (например, 1653: $165+3\cdot2=171$, $17+1\cdot2=19$)

Задача 1

Верно ли, что если число делится на 6 и на 8, то оно делится на 48

Решение: Например, 24 Делится на 6 и на 8, а на 48 не делится

Ответ : нет

Задача 2

Докажите, что произведение любых четырех последовательных целых чисел делится на 8

Решение: рассмотрим ряд последовательных чисел

1, **2**, 3, **4,**

5, 6, 7, **8**,

9, 10, 11, **12** …

Среди любых четырех последовательных целых чисел есть два последовательных четных числа, Так как есть два числа, одно из которых делится на 2, а другое на 4, то все произведение делится на 8

Задача 3

Докажите, что число $n^3 – n$ делится на 6 при любом целом n

Решение:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1) = (n - 1)n(n + 1)$$

Три последовательных числа, есть число число, которое делится на 2 и число, которое делится на 3, тогда оно делится на 6

1, **2**, <u>3,</u> **4**, 5, <u>**6**,</u> 7, **8**, <u>9,</u> **10**, 11, …

Четность и нечетность чисел

Число называется четным, если оно делится на 2

Число называется нечетным, если оно не делится на 2

Формула четного числа 2n

Формула нечетного числа 2n - 1

Теоремы:

- сумма любого числа четных слагаемых четна (4+6+10=20)
- сумма четного числа нечетных слагаемых четна (7+3=10)
- сумма нечетного числа нечетных слагаемых нечетна (1+3+5=9)
- если в произведении все множители нечетны, то произведение нечетно ($3\cdot5=15$)
- если в произведении хотя бы один множитель четный, то произведение четно ($3\cdot5\cdot2\cdot7=210$)

Задача 1

В ряд выписаны числа от 1 до 22. Можно ли между ними расставить знаки «+» и «–» так, чтобы в результате получился 0

Решение:

1,**2**,3,**4**,5,**6**,7,**8**,9,**10**,11,**12**,13,**14**,15,**16**,17,**18**,19,**20**,21,**22**

Среди чисел 1, 2, 3, …22 всего **11 четных** и 11 нечетных чисел, то есть

сумма 11 четных слагаемых = четное число,

сумма 11 нечетных слагаемых = нечетное число,

Сумма четного и нечетного=нечетное число,

а 0 четное число, поэтому нельзя

Ответ: нет

Задача 2

Можно ли разменять 1000 рублей купюрами по 5, 25, 125 рублей так, чтобы всего оказалось 101 купюра. (предположить, что купюры 5 , 25 и 125 рублей существуют)

Решение: Предположим, что можно, тогда

1000=5+…+5+25+…+25+125+…+125, всего 101 слагаемое

Каждое слагаемое нечетное число и количество слагаемых нечетное (101), а сумма четна (1000), то невозможно

Ответ: нет

Задача 3

Сумму двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли в результате получиться число 123456789?

Решение: Предположим, что такое может быть. Пусть a , b целые числа, тогда $(a+b) \cdot a \cdot b = 123456789$

Произведение трех чисел нечетное число, значит все три множителя нечетны

числа a , b нечетные и (a+b) нечетное число

но тогда (a+b) сумма двух нечетных чисел, она четна,

тогда произведение должно быть четным – противоречие!

Ответ: нет

Среднее арифметическое чисел

- **Среднее арифметическое** множества чисел – число, равное сумме всех чисел множества, деленной на их количество
- Например, 2, 6, 3, 8, 9, количество чисел 5,
- среднее арифметическое равно (2+6+5+8+9) : 5 = **6**

Задача

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое шести наибольших из них равно 15. Может ли наименьшее из этих чисел равняться 3?

Решение: Допустим, что наименьшее из чисел может быть 3, эти числа различны, расставим ряд чисел во возрастанию

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

набор первых шести чисел такой – 3, 4, 5, 6, 7, 8

Сумма всех чисел 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33, наименьшая из возможных

Так как среднее арифметическое первых шести чисел =5, то сумма этих чисел $5 \cdot 6 = 30$, а наименьшая возможная сумма первых шести чисел 33, поэтому не может

Ответ: нет

Представление числа в виде суммы разрядных слагаемых

Любое натуральное число можно представить в виде суммы разрядных слагаемых

Например:

$$654 = 6 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 4$$

Число $\overline{abcd} = 1000a+100b+10c+d$

Решение задач ЕГЭ. Задача 1

У Миши в копилке есть 2-рублевые, 5-рублевые и 10-рублевые монеты. Если взять 10 монет, то среди них обязательно найдется хотя бы одна 2-рублевая. Если взять 15 монет, то среди них обязательно найдется хотя бы одна 5-рублевая. Если взять 20 монет, то среди них обязательно найдется хотя бы одна 10-рублевая. Может ли у Миши быть 30 монет?

Решение: Если среди 10 монет имеется хотя бы одна 2-рублевая, то 5- рублевых и 10-рублевых вместе 9 монет. Если среди 15 монет хотя бы одна 5-рублевая, то 2-рублевых и 10-рублевых монет вместе 14. Если среди 20 монет хотя бы одна 10-рублевая, то 2-рублевых и 5-рублевых вместе 19. Пусть x 2-рублевых, y 5-рублевых, z 10-рублевых, тогда:

$$x + y = 19 \qquad x + z = 14 \qquad y + z = 9$$

складываем левые и правые части всех трех уравнений:

$$2x + 2y + 2z = 42,$$

делим на 2

$$x + y + z = 21$$

всего монет 21

Ответ: не может

Решение задач ЕГЭ. Задача 2

Петя участвовал в викторине по истории. За каждый правильный ответ участнику начисляется 8 баллов, за каждый неверный – списывается 8 баллов, за отсутствие ответа списывается 3 балла. По результатам викторины Петя набрал 35 баллов. На сколько вопросов Петя не дал ответа, если в викторине было 30 вопросов?

Решение: Пусть было x верных ответов, y неверных и z вопросов, на которые не дали ответа.

Тогда: Получено баллов

$$\begin{cases} x + y + z = 30\ (1) \\ 8x - 8y - 3z = 35\ (2) \end{cases}$$

Из (1) выразим x и подставим в (2).

x = 30 - y - z

8 (30 - y - z) - 8y - 3z = 35

240 - 8y - 8z - 8y - 3z = 35

16y + 11z = 205

$$z = \frac{205 - 16y}{11}$$

Решение задач ЕГЭ. Задача 2 продолжение

если y = 1, то	если y = 2, то	если y = 3, то	если y = 4, то
$Z = \frac{205\ - 16}{11} = \frac{189}{11}$	$Z = \frac{205\ - 32}{11} = \frac{173}{11}$	$Z = \frac{205\ - 48}{11} = \frac{157}{11}$	$Z = \frac{205\ - 64}{11} = \frac{141}{11}$

если y = 5, то	если y = 6, то	если y = 7, то	если y = 8, то
$Z = \frac{205\ - 80}{11} = \frac{125}{11}$	$Z = \frac{205\ - 96}{11} = \frac{109}{11}$	$Z = \frac{205\ - 112}{11} = \frac{83}{11}$	$Z = \frac{205\ - 128}{11} = \frac{77}{11} = 7$

Итак, верных ответов $x=30-7-8=15$, неверных $y=8$, вопросов без ответов $z=7$,

Проверим баллы: $15\cdot8=120$, $8\cdot(-8) = -64$, $7\cdot(-3) = -21$

всего $120 - 64 - 21 = 35$, что соответствует условию задачи

Ответ: 7

Решение задач ЕГЭ. Задача 3

На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 3, к каждому числу из второй группы – цифру 7, а числа из третьей группы оставили без изменений. Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 8 раз?

Решение:

Пусть было три однозначных числа a, b, c, сумма (a+b+c)

Когда приписали справа число, то первые два числа стали двузначными

a3 = 10a+3, b7 = 10b+7, c=c

Сумма (10a+3+10b+7+c) в 8 раз больше предыдущей

Составим решим уравнение

$$(10a+3+10b+7+c)=8(a+b+c)$$

$$10a+10b+c-8a-8b-8c=-10$$

$$2a+2b=7c-10$$

$$2(a+b)=7c-10$$

Слева четное число, справа должно быть тоже четное число

Из полученного равенства ясно, что c-четное число

Решение задач ЕГЭ. Задача 3 продолжение

Выполняем перебор элементов c, подставляя в равенство $2(a+b)=7c-10$

если $c = 2$, то

$2(a + b) = 14-10=4$

$(a + b) = 2$

Тогда $a = b = 1$,

противоречит условию,
что числа различны

если $c = 4$, то

$2(a + b) = 28-10=18$

$(a + b) = 9$

Тогда пусть $a = 3$, $b = 6$,

Тогда, сумма $3 + 6 + 4 = 13$

После изменений

33, 67, 4, а сумма $33 + 67 + 4 = 104$

$13 \cdot 8 = 104$, все условия задачи выполнены

Ответ: может, например это числа 3,6,4

Решение задач ЕГЭ. Задача 4

На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 14. Может ли наибольшее из этих 11 чисел равняться 16?

Решение: Пусть числа расставлены по возрастанию

Возьмем ряд натуральных чисел с самыми наименьшими возможным значениями

1, 2, 3, 4, <u>5, 6, 7, 8, 9, 10, 16</u>

тогда если среднее арифметическое (с.а.) семи последних 14, то сумма этих семи последних $14 \cdot 7 = 98$

А у нас сумма семи последних

5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 16 = 61

Возьмем ряд натуральных чисел с наибольшими значениями

6, 7, 8, 9, **10, 11, 12, 13, 14, 15, 16**

Сумма последних семи

16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 = 91, а нужно 98, поэтому невозможно

Ответ: не может

Решение задач ЕГЭ. Задача 5

Отношение трехзначного натурального числа к сумме его цифр-целое число. Может ли это отношение быть равным 11?

Решение: Пусть а-число сотен, b-число десятков, c-число единиц

Составим отношение

$$\frac{100a + 10b + c}{a + b + c} = 11$$

$$100a + 10b + c = 11(a + b + c)$$

$$100a + 10b + c - 11a - 11b = 11c$$

$$89a = b + 10c$$

Пусть $c = 8,\ b = 9,\ a = 1$

Ответ: может, например, число 198, сумма цифр = 18, 198:18 =11

Советы для подготовки к решению задачи 19.1

- Лучшая подготовка к задаче 19-это практика
- Теорию не нужно заучивать, во время практики вы все запомните
- Пытайтесь решать задачи сами, если не получается, то смотрите не все решение, а только первые шаги
- На задачу 19 может уходить много времени (примерно 40 минут), поэтому не расстраивайтесь, если не получается решить быстро