Рабочий лист к занятию

«Векторы, задание № 2 профильного ЕГЭ по математике»

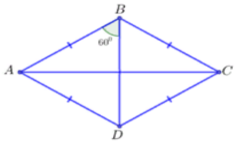
04.04.2024

Задача 1.

В треугольнике ABC известно, что стороны AB и BC равны по 7, а ∠ABC=120º. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$

Решение:

Достроим равнобедренный треугольник ABC до ромба $ABCD$. Так как $\angle ABC = 120°$, то $\angle ABD = 60°$ и треугольник ABD равносторонний.
По правилу параллелограмма: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.
Тогда: $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = 7$.

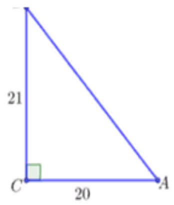


Ответ: $\boxed{7}$

Задача 2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известно, что $BC = 21$, $AC = 20$. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$

Решение:

По теореме Пифагора:
$AB^2 = CA^2 + CB^2 \Leftrightarrow AB = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29$.
Тогда: $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BA}| = 29$.

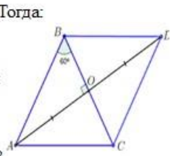


Ответ: 29

Задача 3. Сторона равностороннего треугольника ABC равна $6\sqrt{3}$. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{BA}$

Решение:

Достроим треугольник ABC до ромба $ABDC$. Тогда:
$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$.
По правилу параллелограмма $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$.
По определению синуса из треугольника ABO:
$\sin 60° = \frac{AO}{AB} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AO}{6\sqrt{3}} \Leftrightarrow AO = 9$.
Тогда: $AD = 2AO = 2 \cdot 9 = 18$.
Следовательно: $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}| = |-\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AD}| = 18$.



Ответ: $\boxed{1}\boxed{8}$

Задача 4.

По данным на рисунке найдите $|\overrightarrow{KP} - \overrightarrow{KT} + \overrightarrow{PS}|$, если $SP = 4\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{KP} - \overrightarrow{KT} + \overrightarrow{PS}| = |\overrightarrow{KP} + \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{KT}| = |\overrightarrow{KS} - \overrightarrow{KT}| = |\overrightarrow{TS}|$.
Прямоугольный треугольник PSK равнобедренный ($PS = KS$), поэтому $\angle SPK = 45°$. По определению синуса из треугольника PST:
$\sin 45° = \frac{TS}{SP} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{TS}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow TS = 4$.
Следовательно: $|\overrightarrow{KP} - \overrightarrow{KT} + \overrightarrow{PS}| = |\overrightarrow{TS}| = 4$.

Ответ: $\boxed{4}$

Задача 5.

Вычислите $|\vec{a}-\vec{b}|^2$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°.

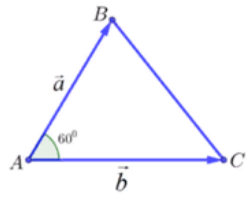
Решение:

$\vec{a}-\vec{b} = \overrightarrow{CB}$. Найдём CB по теореме косинусов:

$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos 60°$.

$CB = \sqrt{3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{13}$.

Тогда: $|a - b|^2 = |CB|^2 = (\sqrt{13})^2 = 13$.



Ответ: 1 3

Задача 6.

Найдите координаты вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, если $\vec{a}(-1; 2)$, $\vec{b}(2; -5)$. В ответ запишите сумму координат вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$.

Решение:

Воспользуемся тем, что при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число, а при вычитании векторов вычитаются их одноимённые координаты:

$\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b} = (-3; 6) - (8; -20) = (-11; 26)$

Следовательно, сумма координат вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ равна:

$-11 + 26 = 15$.

Ответ: 1 5

Задача 7.

Даны векторы $\vec{a}(1; 0)$, $\vec{b}(3; -2)$ и $\vec{c}(1; 2)$. Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

Решение:

Воспользуемся тем, что при сложении двух векторов складываются их одноимённые координаты, а при вычитании вычитаются:

$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (1 + 3 - 1;\ 0 - 2 - 2) = (3; -4)$.

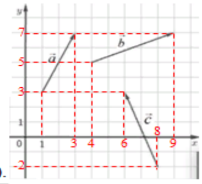
Длина вектора $\vec{d}(x; y)$ равна: $|\vec{d}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Следовательно: $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = \sqrt{3^3 + (-4)^2} = 5$.

Ответ: 5

Задача 8.

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите длину вектора $\vec{a} + 4\vec{b} - \vec{c}$.



Решение:

Запишем координаты векторов:

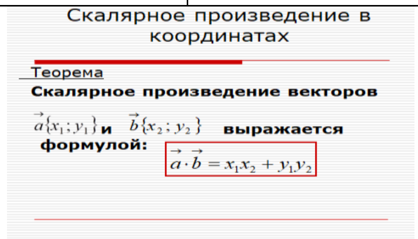
$\vec{a}(2; 4)$; $\vec{b}(5; 2)$; $\vec{c}(-2; 5)$.

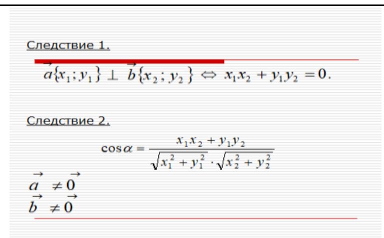
Тогда: $\vec{a} + 4\vec{b} - \vec{c} = (2+20+2;\ 4+8-5) = (24;7)$.

Длина вектора $\vec{d}(x; y)$ равна: $|\vec{d}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Следовательно: $|\vec{a} + 4\vec{b} - \vec{c}| = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$.

Ответ: 2 5





Задача 9.

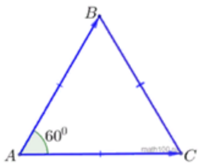
Дан правильный треугольник ABC со сторонами 8. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Решение:

Так как треугольник правильный, то угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ равен 60°.

По определению скалярного произведения:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos 60° = 8\cdot 8\cdot 12 = 32$.

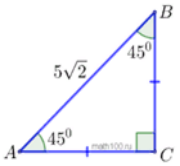


Ответ: 3 2

Задача 10.

В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известно, что $AB = 5\sqrt{2}$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$.

Решение:



Так как треугольник равнобедренный, то $\angle A = \angle B = 45^\circ$. Тогда угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$ равен: $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

По определению синуса:

$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BC}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow BC = 5 = AC$.

По определению скалярного произведения:

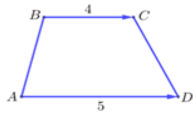
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cdot\cos 135^\circ = 5\sqrt{2}\cdot 5\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -25$.

Ответ: -25

Задача 11.

В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 5$ и $BC = 4$ найдите скалярное произведение $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Решение:



Так как вектора $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ сонаправленные, то угол между ними равен 0°.

По определению скалярного произведения:

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos 0^\circ = 5\cdot 4 = 20$.

Ответ: 20

Задача 12.

Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}(3; -2)$ и $\vec{b}(-2; 4)$.

Решение:

Решение:

Если даны векторы $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$, то скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$.

Следовательно:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot(-2) + (-2)\cdot 4 = -6 - 8 = -14$.

Ответ: -14

Задача 13.

При каком значении x векторы $\vec{a}(x; -3)$ и $\vec{b}(4; 8)$ перпендикулярны?

Решение:

Если даны векторы $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$, то скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$.

Так как $a \perp b$, то их скалярное произведение равно нулю.

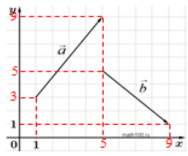
Следовательно:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot x - 3\cdot 8 = 0 \Leftrightarrow x = 6$.

Ответ: 6

Задача 14.

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.



решение:

Запишем координаты векторов:

$\vec{a}(4; 6)$; $\vec{b}(4; -4)$.

Если даны векторы $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$, то скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$.

Следовательно:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot 4 + 6\cdot(-4) = -8$.

Ответ: -8

Задача 15.

Даны векторы $\vec{m}(4; -3)$, $\vec{n}(2; -5)$, $\vec{k}(-3; 3)$ и $\vec{p}(3; -5)$. Найдите скалярное произведение $(\vec{m} + \vec{n})\cdot(\vec{k} - \vec{p})$.

Решение:

Найдём координаты векторов $\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{k} - \vec{p}$, воспользовавшись тем, что при сложении векторов складываются их одноимённые координаты, а при вычитании вычитаются:

$\vec{m} + \vec{n} = (4 + 2; -3 - 5) = (6; -8)$; $\vec{k} - \vec{p} = (-3 - 3; 3 + 5) = (-6; 8)$.

Если даны векторы $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$, то скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$.

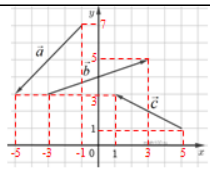
Следовательно:

$(\vec{m} + \vec{n})\cdot(\vec{k} - \vec{p}) = 6\cdot(-6) - 8\cdot 8 = -100$.

Ответ: -100

Задача 16.

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $(\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{b}$.



Решение:

Запишем координаты векторов:
$\vec{a}(-4;\ -4)$; $\vec{b}(6;\ 2)$; $\vec{c}(-4;\ 2)$.
Найдём координаты вектора $\vec{c}-\vec{a}$:
$\vec{c}-\vec{a} = (-4+4;\ 2+4) = (0;\ 6)$.
Если даны векторы $\vec{a}(x_1;\ y_1)$ и $\vec{b}(x_2;\ y_2)$, то скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно:
$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$.
Следовательно:
$(\vec{c}-\vec{a})\cdot b = 0\cdot 6 + 6\cdot 2 = 12$.

Ответ: 12

Задача 17.

Найдите косинус угла между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что $\vec{p}(-9;\ -12)$ и $\vec{q}(-3;\ 4)$.

Решение:

По определению скалярного произведения:
$\vec{p}\cdot\vec{q} = |\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\cos\widehat{(\vec{p}\,\vec{q})} \Leftrightarrow \cos\widehat{(\vec{p}\,\vec{q})} = \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}$.
Если даны векторы $\vec{p}(x_1;\ y_1)$ и $\vec{q}(x_2;\ y_2)$, то скалярное произведение векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равно:
$\vec{p}\vec{q} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$.
Длина вектора $\vec{a}(x;\ y)$ равна: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2}$.
Следовательно:
$\cos\widehat{(\vec{p}\,\vec{q})} = \dfrac{-9\cdot(-3)-12\cdot 4}{\sqrt{(-9)^2+(-12)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+4^2}} = \dfrac{-21}{15\cdot 5} = -0{,}28$.

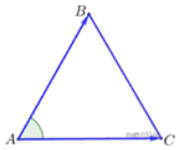
Ответ: -0,28

Задача 18.

В треугольнике с вершинами в точках A (2; 4), B (2; 8) и C (6; 4) найдите угол A. Ответ дайте в градусах.

Решение:

Угол A равен углу между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.
найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:
$\overrightarrow{AB} = (2-2;\ 8-4) = (0;\ 4)$;
$\overrightarrow{AC} = (6-2;\ 4-4) = (4;\ 0)$.
$\cos\widehat{(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC})} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{0\cdot 4+4\cdot 0}{\sqrt{0^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+0^2}} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}} = 90°$.



Ответ: 90

Задача 19.

Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 5\vec{p}+3\vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p}-4\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные вектора угол между которыми равен 60°.

Решение:

Так как $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные вектора, то $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$. Найдём скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:
$\vec{a}\cdot\vec{b} = (5\vec{p}+3\vec{q})\cdot(2\vec{p}-4\vec{q}) = 10\vec{p}\cdot\vec{p} - 20\vec{p}\cdot\vec{q} + 6\vec{p}\cdot\vec{q} - 12\vec{q}\cdot\vec{q} =$
$10\cdot|\vec{p}|\cdot|\vec{p}|\cdot\cos 0° - 14\cdot|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\cos 60° - 12\cdot|\vec{q}|\cdot|\vec{q}|\cdot\cos 0° = 10 - 14\cdot\frac{1}{2} - 12 =$
$= -9$.

Ответ: -9

Задача 20.

Даны координаты точек A $(2x;\ -2)$ и B $(6;\ 4x)$. Найдите x, если $AB = 14$ и $x < 0$.

Решение:

Найдём координаты вектора $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (6-2x;\ 4x+2)$.
Длина вектора $\vec{a}(x;\ y)$ равна: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2}$.
Тогда: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(6-2x)^2+(4x+2)^2}$.
Следовательно: $\sqrt{(6-2x)^2+(4x+2)^2} = 14 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 36 - 24x + 4x^2 + 16x^2 + 16x + 4 = 196 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5x^2 - 2x - 39 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 3, \\ x_2 = -2{,}6. \end{array}\right.$
Так как $x < 0$, то $x = -2{,}6$.

Ответ: -2,6

Задача 21.

Даны векторы $\vec{a}(4;\ -1)$ и $\vec{b}(x;\ 8)$. Найдите x, если $|\vec{b}| = 2{,}5|\vec{a}|$. Если таких значений несколько, в ответ запишите меньшее из них.

Решение:

Длина вектора $\vec{a}(x;\ y)$ равна: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2}$. Тогда:
$|\vec{a}| = \sqrt{4^2+(-1)^2} = \sqrt{17}$; $|\vec{b}| = \sqrt{x^2+8^2} = \sqrt{x^2+64}$.
Следовательно: $\sqrt{x^2+64} = \frac{5}{2}\sqrt{17} \Leftrightarrow x^2+64 = \frac{25\cdot 17}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{169}{4} \Leftrightarrow$
$x = \pm 6{,}5$.
Наименьшее значение равно $-6{,}5$.

Ответ: -6,5