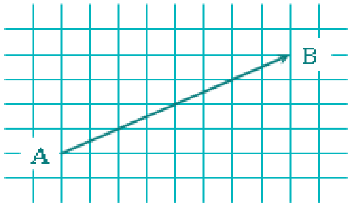
Векторы. Задание № 2 профильного ЕГЭ по математике

Автор:
Ковтун Ольга Георгиевна,
учитель математики МОАУ СОШ № 3 им. Пушкина Брюховецкого района

Векторы

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая - концом, называется направленным отрезком или **вектором**.



Координаты вектора.

Координаты вектора с концами в точках $A(x_A, y_A)$ *и* $B(x_B, y_B)$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

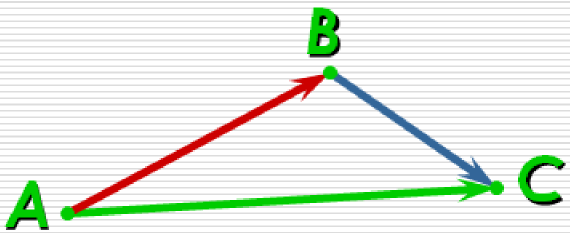
Длина вектора *a(x, y)*:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Действия над векторами

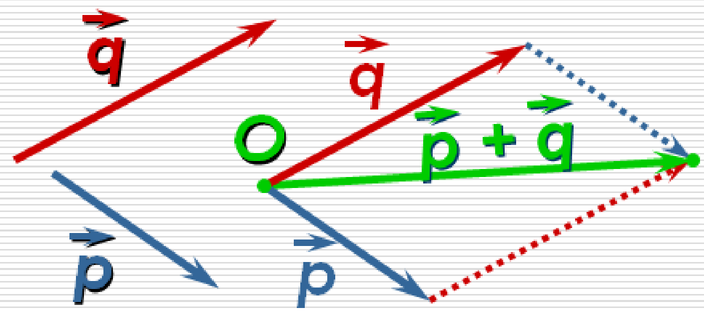
Сложение векторов

Правило треугольника



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Правило параллелограмма



Сложение векторов в координатной форме

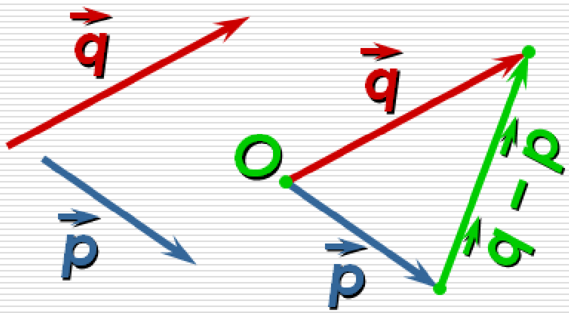
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

$$\vec{a}\,(x_1; y_1) \qquad \vec{b}\,(x_2; y_2)$$

$$\vec{c}\,(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2)$$

Вычитание векторов

Вычитание векторов



Правило треугольника

Вычитание векторов в координатной форме

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$$

$\vec{a}\,(x_1; y_1)$ $\vec{b}\,(x_2; y_2)$

$\vec{c}\,(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$

Умножение вектора на число

Определение:

$$\vec{b} = k \cdot \vec{a}$$

$$\left|\vec{b}\right| = |k| \cdot \left|\vec{a}\right|$$

$\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}, k \geq 0$ $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}, k \leq 0$

Умножение вектора на число (координатная форма)

Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты *(x;y)*, то вектор $k\vec{a}$ имеет координаты *(kx;ky)*.

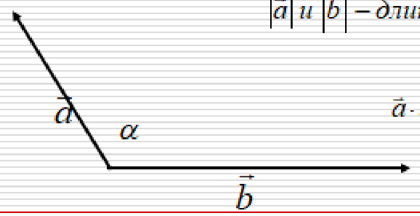
Например, $\vec{a}$ *(2;-3)*, $4\vec{a}$ *(8; -16)*, $-0{,}5\vec{a}$ *(-1; 1,5)*,

Скалярное произведение в координатах

Скалярным произведением векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ – *скалярное произведение_векторов*

$|\vec{a}|$ *и* $|\vec{b}|$ – *длины векторов*



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\alpha)$$

Скалярное произведение в координатах

Теорема

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ **и** $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ **выражается формулой:**

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2}$$

Следствие 1.

$$\vec{a}\{x_1; y_1\} \perp \vec{b}\{x_2; y_2\} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

Следствие 2.

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

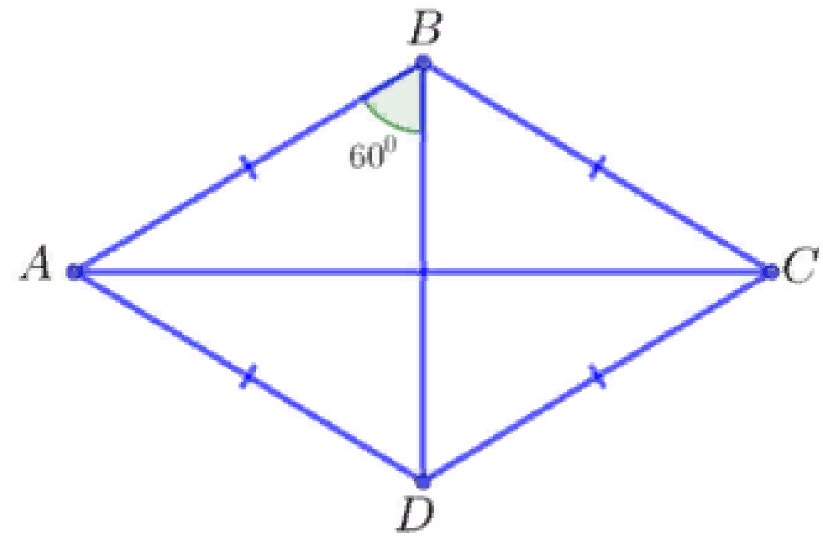
$$\vec{a} \neq \vec{0}$$

$$\vec{b} \neq \vec{0}$$

В треугольнике ABC известно, что стороны AB и BC равны по 7, а $\angle ABC=120^\circ$. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$

Решение:

Достроим равнобедренный треугольник ABC до ромба $ABCD$. Так как $\angle ABC = 120^\circ$, то $\angle ABD = 60^\circ$ и треугольник ABD равносторонний.



По правилу параллелограмма:

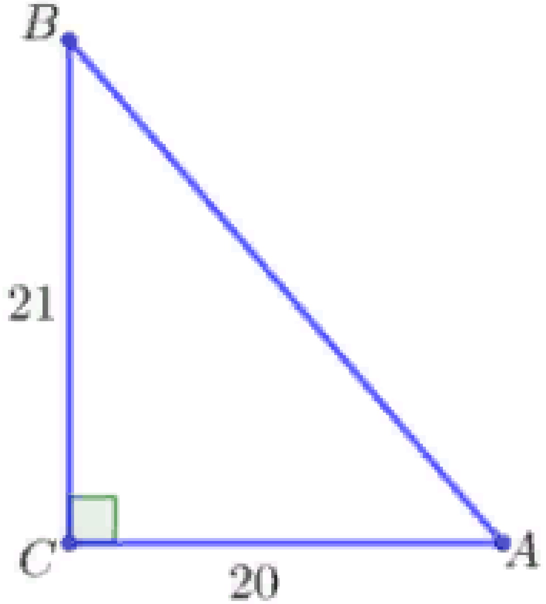
$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.

Тогда: $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = 7$.

Ответ: $\boxed{7}$

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известно, что $BC = 21$, $AC = 20$. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$

Решение:



По теореме Пифагора:

$AB^2 = CA^2 + CB^2 \Leftrightarrow AB = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29.$

Тогда: $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BA}| = 29.$

Ответ: 2 9

Сторона равностороннего треугольника ABC равна $6\sqrt{3}$. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{BA}$

Решение:

Достроим треугольник ABC до ромба $ABDC$. Тогда:

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}$ = - $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$.

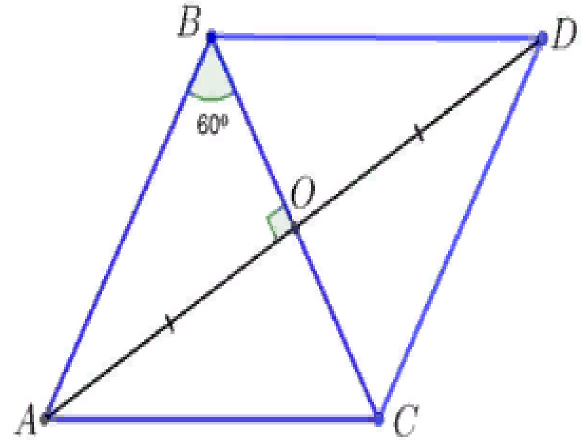
По правилу параллелограмма $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$.

По определению синуса из треугольника ABO:

$\sin 60^\circ = \frac{AO}{AB} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AO}{6\sqrt{3}} \Leftrightarrow AO = 9.$

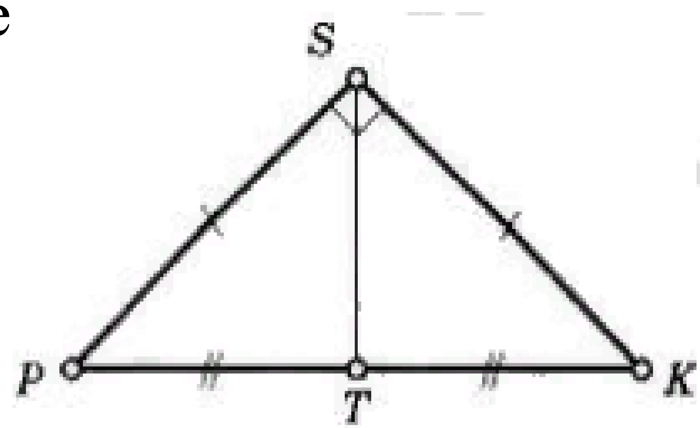
Тогда: $AD = 2AO = 2 \cdot 9 = 18.$

Следовательно: $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}| = |-\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AD}| = 18.$



Ответ: 1 8

По данным на рисунке найдите
$|\overrightarrow{KP} - \overrightarrow{KT} + \overrightarrow{PS}|$, если $SP = 4\sqrt{2}$



Решение:

$|\overrightarrow{KP} - \overrightarrow{KT} + \overrightarrow{PS}| = |\overrightarrow{KP} + \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{KT}| = |\overrightarrow{KS} - \overrightarrow{KT}| = |\overrightarrow{TS}|$.
Прямоугольный треугольник PSK равнобедренный ($PS = KS$), поэтому $\angle SPK = 45^\circ$. По определению синуса из треугольника PST:
$\sin 45^\circ = \frac{TS}{SP} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{TS}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow TS = 4$.
Следовательно: $|\overrightarrow{KP} - \overrightarrow{KT} + \overrightarrow{PS}| = |\overrightarrow{TS}| = 4$.

Ответ: 4

Вычислите $|\vec{a}-\vec{b}|^2$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°.

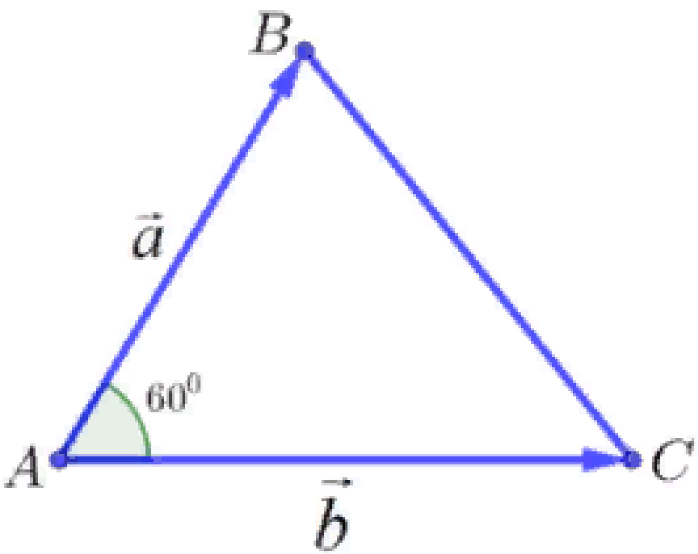
Решение:

$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{CB}$. Найдём CB по теореме косинусов:

$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 60°$.

$$CB = \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{13}.$$

Тогда: $|a - b|^2 = |CB|^2 = (\sqrt{13})^2 = 13$.



Ответ: 13

Найдите координаты вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, если $\vec{a}\,(-1;\ 2)$, $\vec{b}\,(2; -5)$. В ответ запишите сумму координат вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$.

Решение:

Воспользуемся тем, что при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число, а при вычитании векторов вычитаются их одноимённые координаты:

$\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b} = (-3;\ 6) - (8;\ -20) = (-11;\ 26)$

Следовательно, сумма координат вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ равна:

$-11 + 26 = 15.$

Ответ: 15

Даны векторы $\vec{a}\,(1; 0)$, $\vec{b}\,(3; -2)$ и $\vec{c}\,(1; 2)$. Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

Решение:

Воспользуемся тем, что при сложении двух векторов складываются их одноимённые координаты, а при вычитании вычитаются:

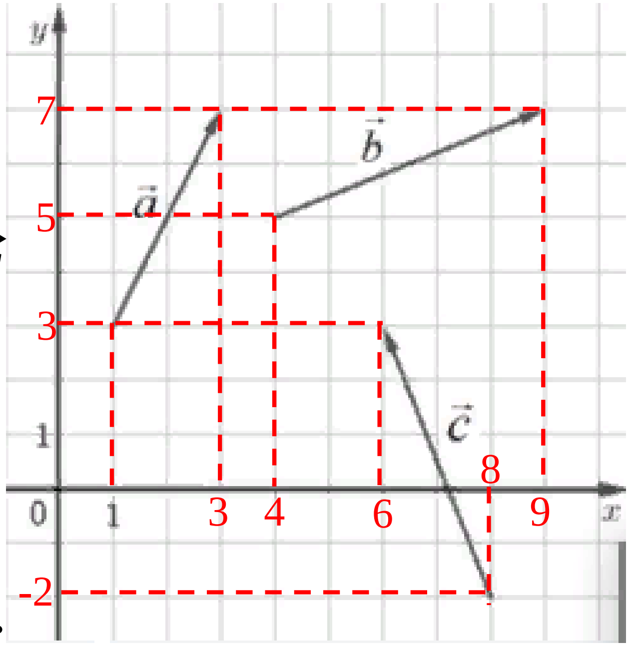
$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (1 + 3 - 1; 0 - 2 - 2) = (3; -4)$.

Длина вектора $\vec{d}\,(x; y)$ равна: $|\vec{d}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Следовательно: $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = \sqrt{3^3 + (-4)^2} = 5$.

Ответ: $\boxed{5}$

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите длину вектора $\vec{a} + 4\vec{b} - \vec{c}$



Решение:

Запишем координаты векторов:
$\vec{a}$ (2; 4); $\vec{b}$ (5; 2); $\vec{c}$ (−2; 5).

Тогда: $\vec{a} + 4\vec{b} - \vec{c} = (2+20+2;\ 4+8-5) = (24;7)$.

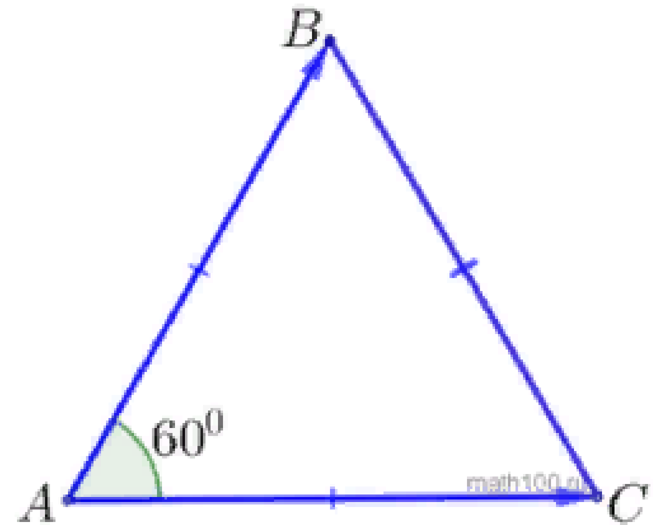
Длина вектора $\vec{d}$ (x; y) равна: $|\vec{d}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Следовательно: $|\vec{a} + 4\vec{b} - \vec{c}| = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$.

Ответ: 2 5

Дан правильный треугольник ABC со сторонами 8. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Решение:



Так как треугольник правильный, то угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ равен 60º.

По определению скалярного произведения:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos 60^{\circ} = 8\cdot 8\cdot 12 = 32.$

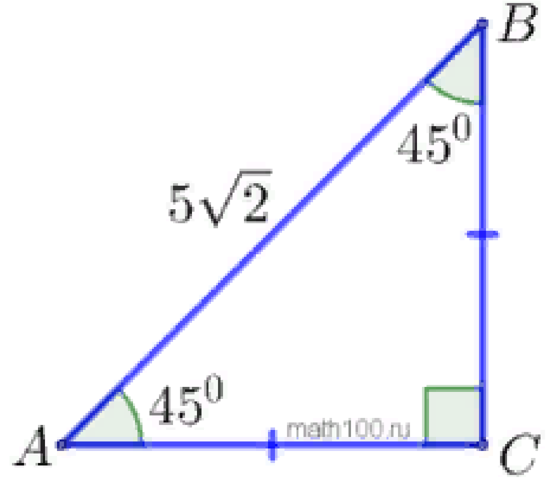
Ответ: 3 2

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 203-53-01, кафедра математики, информатики и технологического образования тел.: +7 (861) 203-50-52

В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известно, что $AB = 5\sqrt{2}$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$.

Решение:

Так как треугольник равнобедренный, то $\angle A = \angle B = 45^o$. Тогда угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$ равен: $180^o - 45^o = 135^o$.



По определению синуса:

$$\sin 45^o = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BC}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow BC = 5 = AC.$$

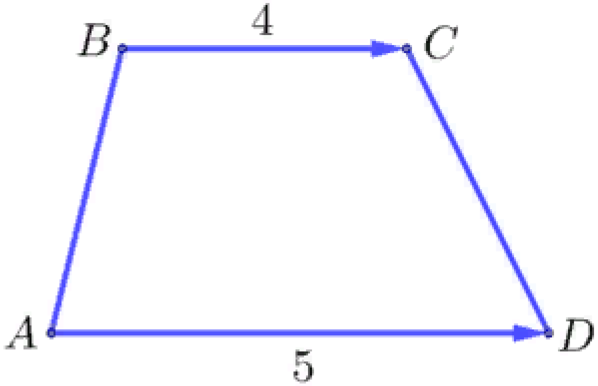
По определению скалярного произведения:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cdot \cos 135^o = 5\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -25.$$

Ответ: -25

В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 5$ и $BC = 4$ найдите скалярное произведение $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Решение:



Так как вектора $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ сонаправленные, то угол между ними равен 0º.

По определению скалярного произведения:

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos 0^\circ = 5\cdot 4 = 20.$

Ответ: 20

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 203-53-01, кафедра математики, информатики и технологического образования тел.: +7 (861) 203-50-52

Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ (3; −2) и $\vec{b}$ (−2; 4).

Решение:

Если даны векторы $\vec{a}\,(x_1; y_1)$ и $\vec{b}\,(x_2; y_2)$, то скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$.

Следовательно:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot(-2) + (-2)\cdot 4 = -6 - 8 = -14$.

Ответ: | - | 1 | 4 |

При каком значении x векторы $\overrightarrow{a}(x; -3)$ и $\overrightarrow{b}(4; 8)$ перпендикулярны?

Решение:

Если даны векторы $\overrightarrow{a}(x_1; y_1)$ и $\overrightarrow{b}(x_2; y_2)$, то скалярное произведение векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ равно:

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

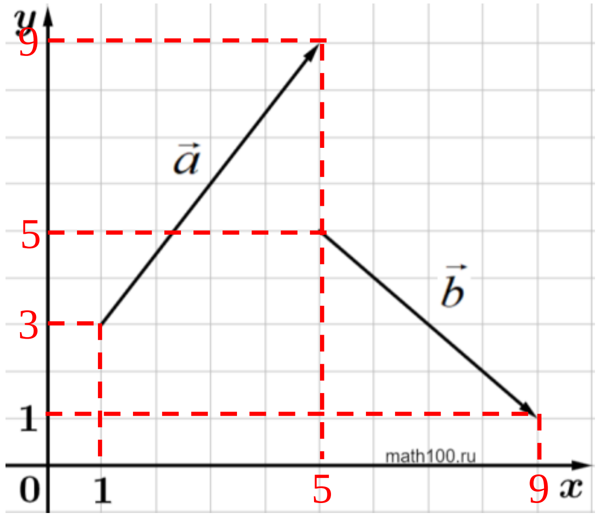
Так как $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, то их скалярное произведение равно нулю.

Следовательно:

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 4 \cdot x - 3 \cdot 8 = 0 \Leftrightarrow x = 6$.

Ответ: $\boxed{6}$

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



Решение:

Запишем координаты векторов:

$\vec{a}$ (4; 6); $\vec{b}$ (4; −4).

Если даны векторы $\vec{a}\,(x_1; y_1)$ и $\vec{b}\,(x_2; y_2)$, то скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

Следовательно:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 4 + 6 \cdot (-4) = -8$.

Ответ: -8

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 203-53-01, кафедра математики, информатики и технологического образования тел.: +7 (861) 203-50-52

Даны векторы $\overrightarrow{m}(4; -3)$, $\overrightarrow{n}(2; -5)$, $\overrightarrow{k}(-3; 3)$ и $\overrightarrow{p}(3; -5)$. Найдите скалярное произведение $(\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n})\cdot(\overrightarrow{k} - \overrightarrow{p})$.

Решение:

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}$ и $\overrightarrow{k} - \overrightarrow{p}$, воспользовавшись тем, что при сложении векторов складываются их одноимённые координаты, а при вычитании вычитаются:

$\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n} = (4 + 2; -3 - 5) = (6; -8)$; $\overrightarrow{k} - \overrightarrow{p} = (-3 - 3\ ; 3 + 5) = (-6; 8)$.

Если даны векторы $\overrightarrow{a}\,(x_1; y_1)$ и $\overrightarrow{b}\,(x_2; y_2)$, то скалярное произведение векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ равно:

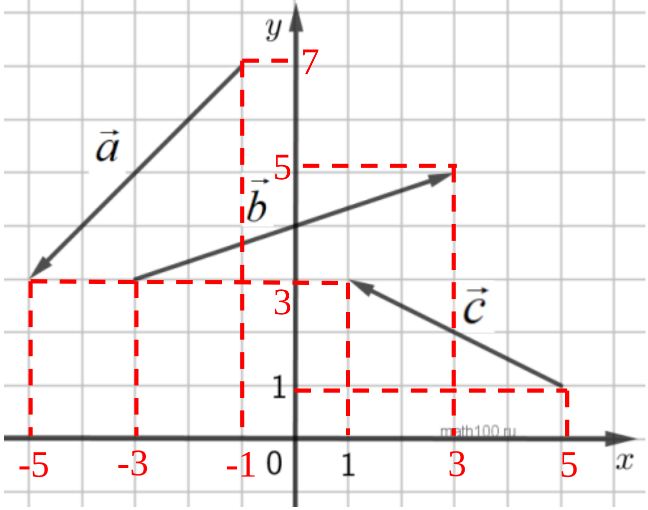
$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$.

Следовательно:

$(\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n})\cdot(\overrightarrow{k} - \overrightarrow{p}) = 6\cdot(-6) - 8\cdot 8 = -100$.

Ответ: - 1 0 0

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $(\vec{c} - \vec{a})\cdot\vec{b}$.



Решение:

Запишем координаты векторов:

$\vec{a}\,(-4; -4)$; $\vec{b}\,(6; 2)$; $\vec{c}\,(-4; 2)$.

Найдём координаты вектора $\vec{c} - \vec{a}$:

$\vec{c} - \vec{a} = (-4 + 4; 2 + 4) = (0; 6)$.

Если даны векторы $\vec{a}\,(x_1; y_1)$ и $\vec{b}\,(x_2; y_2)$, то скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$.

Следовательно:

$(\vec{c} - \vec{a})\cdot b = 0\cdot 6 + 6\cdot 2 = 12$.

Ответ: 12

Найдите косинус угла между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что $\vec{p}\,(-9;\,-12)$ и $\vec{q}\,(-3;\,4)$.

Решение:

По определению скалярного произведения:

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = |\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\cos\,(\widehat{\vec{p}\,\vec{q}}) \Leftrightarrow \cos\,(\widehat{\vec{p}\,\vec{q}}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}.$$

Если даны векторы $\vec{p}\,(x_1;\,y_1)$ и $\vec{q}\,(x_2;\,y_2)$, то скалярное произведение векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равно:

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2.$$

Длина вектора $\vec{d}\,(x;\,y)$ равна: $|\vec{d}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Следовательно:

$$\cos\,(\widehat{\vec{p}\,\vec{q}}) = \frac{-9\cdot(-3)-12\cdot4}{\sqrt{(-9)^2+(-12)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+4^2}} = \frac{-21}{15\cdot5} = -0{,}28.$$

Ответ: - 0 , 2 8

В треугольнике с вершинами в точках A (2; 4), B (2; 8) и C (6; 4) найдите угол A. Ответ дайте в градусах.

Решение:

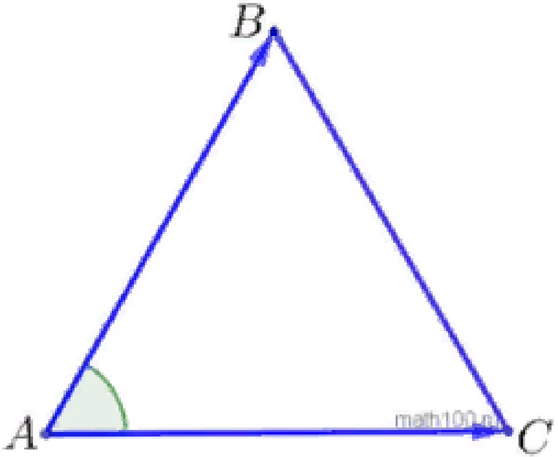
Угол A равен углу между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.
найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB} = (2 - 2; 8 - 4) = (0; 4)$;

$\overrightarrow{AC} = (6 - 2; 4 - 4) = (4; 0)$.

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{0\cdot 4+4\cdot 0}{\sqrt{0^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+0^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}} = 90^{\circ}$.



Ответ: 90

Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 5\vec{p} + 3\vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} - 4\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные вектора угол между которыми равен 60º.

Решение:

Так как $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные вектора, то $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$. Найдём скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (5\vec{p} + 3\vec{q})\cdot(2\vec{p} - 4\vec{q}) = 10\cdot\vec{p}\cdot\vec{p} - 20\cdot\vec{p}\cdot\vec{q} + 6\cdot\vec{p}\cdot\vec{q} - 12\cdot\vec{q}\cdot\vec{q} =$

$10\cdot|\vec{p}|\cdot|\vec{p}|\cdot\cos 0^\circ - 14\cdot|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\cos 60^\circ - 12\cdot|\vec{q}|\cdot|\vec{q}|\cdot\cos 0^\circ = 10 - 14\cdot\frac{1}{2} - 12 =$

$= -9.$

Ответ: | - | 9 |

Даны координаты точек *A* (2*x*; – 2) и *B* (6; 4*x*). Найдите *x*, если *AB* = 14 и x < 0.

Решение:

Найдём координаты вектора $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}$ = (6−2x; 4x+2).

Длина вектора $\vec{d}$ (x; y) равна: $|\vec{d}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Тогда: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(6-2x)^2 + (4x+2)^2}$.

Следовательно: $\sqrt{(6-2x)^2 + (4x+2)^2} = 14 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 36 - 24x + 4x^2 + 16x^2 + 16x + 4 = 196 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 2x - 39 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 3, \\ x_2 = -2{,}6. \end{array}\right.$

Так как x < 0, то x = −2,6.

Ответ: | - | 2 | , | 6 |

ГБОУ «Институт развития образования» Краснодарского края www.iro23.ru e-mail: post@iro23.ru
тел.: +7 (861) 203-53-01, кафедра математики, информатики и технологического образования тел.: +7 (861) 203-50-52

Даны векторы $\vec{a}\,(4; -1)$ и $\vec{b}\,(x; 8)$. Найдите x, если $|\vec{b}| = 2{,}5|\vec{a}|$. Если таких значений несколько, в ответ запишите меньшее из них.

Решение:

Длина вектора $\vec{d}$ (x; y) равна: $|\vec{d}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда:

$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$; $|\vec{b}| = \sqrt{x^2 + 8^2} = \sqrt{x^2 + 64}$.

Следовательно: $\sqrt{x^2 + 64} = \frac{5}{2}\sqrt{17} \Leftrightarrow x^2 + 64 = \frac{25 \cdot 17}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{169}{4} \Leftrightarrow$ $x = \pm 6{,}5$.

Наименьшее значение равно $-6{,}5$.

Ответ: | - | 6 | , | 5 |