

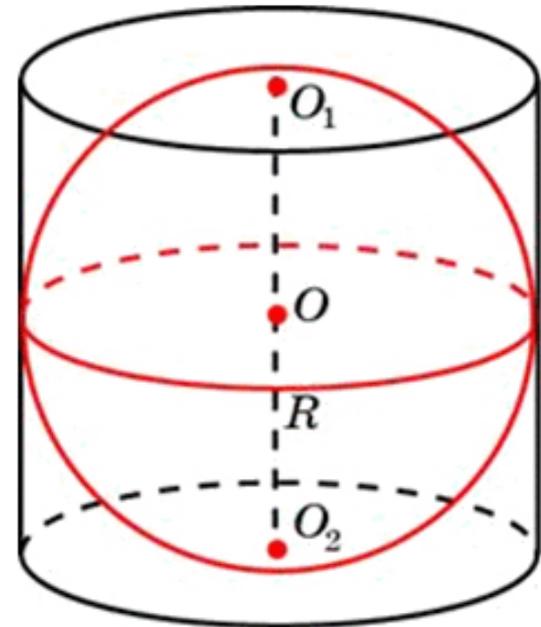
# МЕТОД КОЭФФИЦИЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ПО ГЕОМЕТРИИ НА ЕГЭ

Бурдюгова Светлана Ивановна,  
учитель математики  
МАОУ СОШ № 19  
им. Виктора Чаленко  
города-Героя Новороссийск

г.. Новороссийск  
2024 г.

## Задача 1

Цилиндр описан около шара. Объем цилиндра равен 33. Найдите объем шара.



## Задача 2

Шар объемом 28 вписан в цилиндр. Найти объем цилиндра.

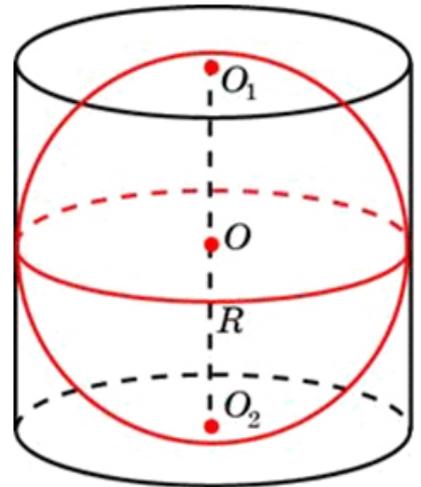
## Классическое решение задачи № 1

Формула объема цилиндра:

$$V_{\text{ц}} = \pi r^2 h = 33$$

Формула объема шара:  $V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi r^3$ .

Радиус шара равен радиусу цилиндра, а высота цилиндра в 2 раза больше радиуса шара.



$$V_{\text{ц}} = \pi r^2 h = 2\pi r^2 r = 2\pi r^3 = 33$$

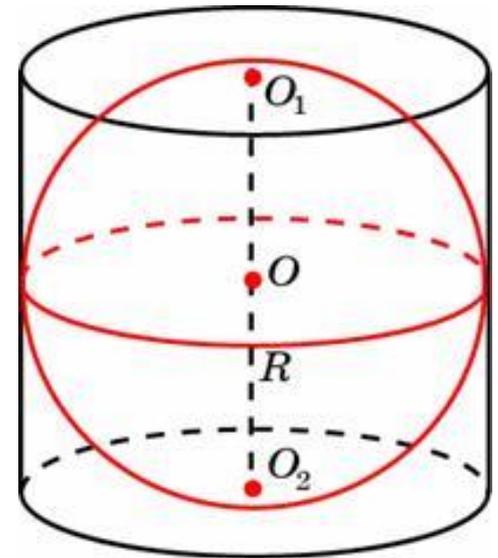
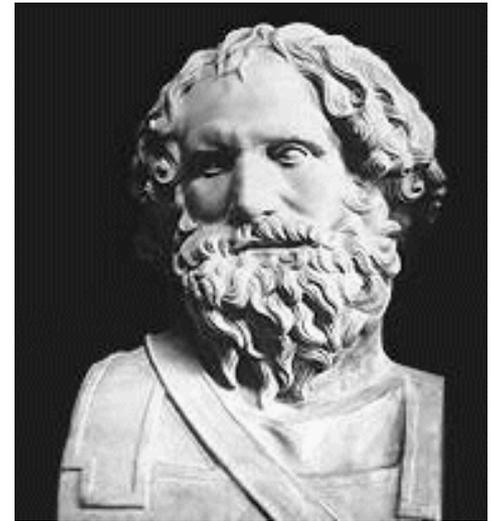
$$\pi r^3 = \frac{33}{2}$$

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4 \cdot 33}{3 \cdot 2} = 22$$

Ответ: 22

## *Полезно знать:*

Когда Цицерон реставрировал памятник на могиле Архимеда, в знак своего преклонения перед ученым, на МОГИЛЬНОЙ ПЛИТЕ Архимеда он велел изобразить сферу, вписанную в цилиндр, как символ великих открытий Архимеда. Эпитафия на могиле указывала, что объемы этих тел и их площади поверхностей относятся, как  $2 : 3$  – открытие Архимеда, которое он особенно ценил.



## Задача № 1

Цилиндр описан около шара.

Объем цилиндра равен 33.

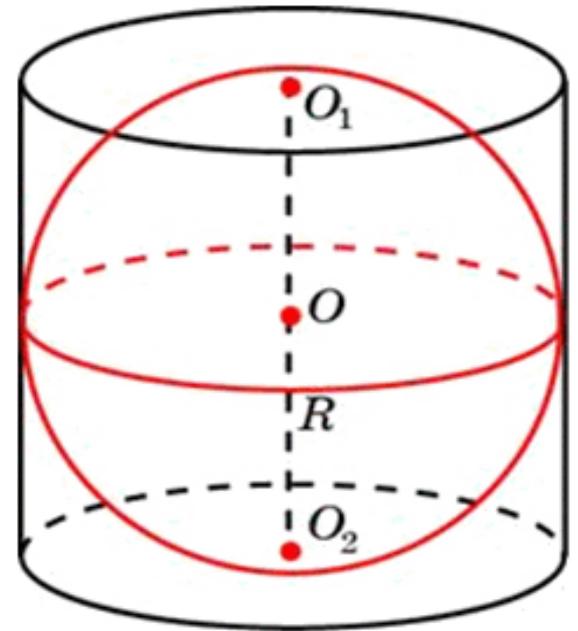
Найдите объем шара.

Ответ: 22. П.к.  $33 \cdot \frac{2}{3} = 22$

## Задача № 2

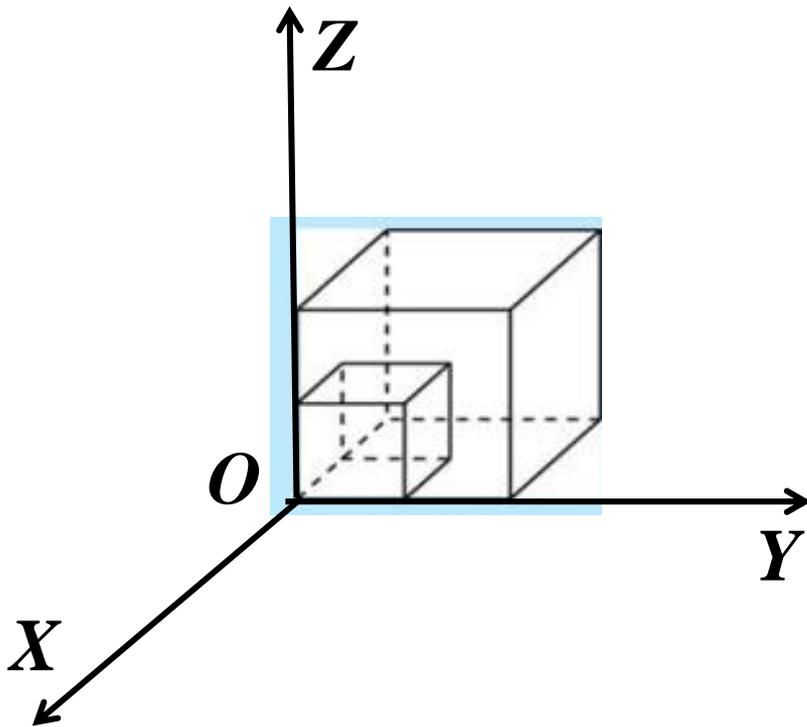
Шар объемом 28 вписан в цилиндр. Найти объем цилиндра.

Ответ: 42. П.к.  $28 \cdot \frac{3}{2} = 42$



# Метод коэффициентов

- Часто в задачах дается многогранник или цилиндр и его объем. Затем фигура растягивается или сжимается по разным направлениям. В результате получается новый многогранник, объем которого и требуется найти.



**Например:** Объем прямоугольного параллелепипеда равен 48. Чему будет равен объем параллелепипеда, если его каждое ребро уменьшить в 2 раза?

# ***Объем многогранника***

**Запомнить:** Многогранник рассматривается в трехмерном пространстве. И все изменения происходят по одной из трех осей.

Теперь, когда в задаче написано «высота цилиндра увеличена в 2 раза, а основание уменьшено в 3 раза», это следует понимать так:

- Растяжение в 2 раза по оси OZ;
- Сжатие в 3 раза по осям OX и OY.

## ***основная теорема:***

• Пусть дан объем исходного многогранника  $V_{\text{старый}}$ . Пусть также известны числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  — коэффициенты растяжения для осей  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  соответственно. Тогда объем нового многогранника  $V_{\text{новый}}$  рассчитывается по формуле:

$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot a \cdot b \cdot c$$

(Если по какой-то оси производится ***сжатие*** многогранника, а не растяжение, то вместо умножения просто пишется ***деление или умножение на обратное число***).

## Задача.

- Параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  имеет объем  $35 \text{ см}^3$ . Ребро  $AB$  увеличили в 2 раза, ребро  $AC$  — в 5 раз, а ребро  $AA_1$  уменьшили в 7 раз. Найдите объем полученного параллелепипеда.

$$V_{\text{старый}} = 35;$$

Ось  $Ox$ : растяжение в 2 раза  $\Rightarrow a = 2$ ;

Ось  $Oy$ : растяжение в 5 раз  $\Rightarrow b = 5$ ;

Ось  $Oz$ : сжатие в 7 раз  $\Rightarrow c = 7$ .

Рассчитываем объем нового параллелепипеда:

$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot a \cdot b \cdot c = 35 \cdot 2 \cdot 5 : 7 = 50.$$

*Ответ: 50*

## *Задача.*

- Высоту кругового цилиндра увеличили в 4 раза, а радиус основания уменьшили в 3 раза. Найдите объем полученного (нового) цилиндра, если объем исходного равен  $45 \text{ м}^3$ .

$$V_{\text{старый}} = 45;$$

По оси OZ идет растяжение в 4 раза, поэтому  $c = 4$ ;

По осям OX и OY идет сжатие в 3 раза, поэтому  $a = b = 3$ .

$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot a \cdot b \cdot c = 45 \cdot 4 : 3 : 3 = 20$$

*Ответ: 20*

## ***Задача.***

- Бетонный шар весит 0,75 т. Сколько будет весить шар, изготовленный из того же материала, если его радиус в 2 раза больше?

$$V_{\text{старый}} = 0,75;$$

Растяжение в 2 раза по всем осям  $\Rightarrow a = b = c = 2$ .

$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot a^3 = 0,75 \cdot 2^3 = 6$$

*Ответ: 6*

## Задача.

- Высоту прямого кругового конуса увеличили в 5 раз, а радиус основания уменьшили в 3 раза. В результате получился новый конус объемом 30. Найдите объем исходного конуса.

$$V_{\text{новый}} = 30;$$

Растяжение по оси  $OZ$  в 5 раз  $\Rightarrow c = 5$ ;

сжатие в 3 раза идет сразу по двум осям:  $OX$  и  $OY \Rightarrow a = b = 3$ ;

Записываем формулу объема:

$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot a \cdot b \cdot c$$

$$30 = V_{\text{старый}} \cdot 5 : 3 : 3$$

$$V_{\text{старый}} = 30 \cdot 3 \cdot 3 : 5 = 54$$

*Ответ: 54*

## Задача.

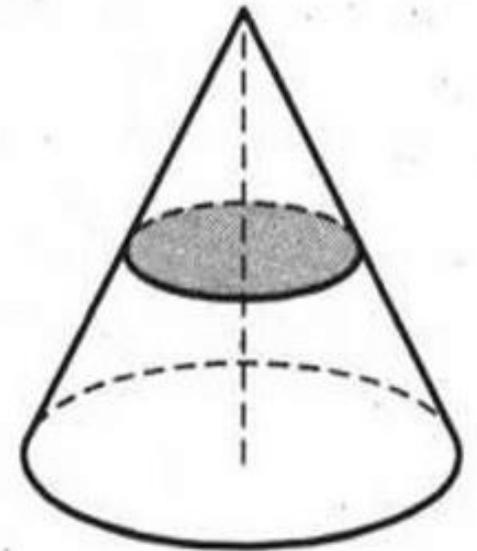
Объем прямого кругового конуса 16. Через середину высоты параллельно основанию проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса. (Объем оставшейся части).

$$V_{\text{старый}} = 16;$$

По осям  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  идет сжатие в 2 раза, поэтому  $a = b = c = 1/2$ .

$$\begin{aligned} V_{\text{новый}} &= V_{\text{старый}} \cdot a \cdot b \cdot c = \\ &= 16 \cdot (1/2)^3 = 2. \end{aligned}$$

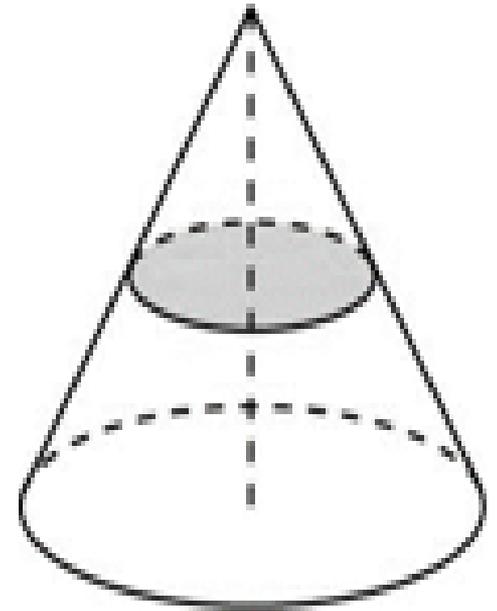
$$V_{\text{ост.}} = 16 - 2 = 14.$$



Ответ: 2 (14)

**Задача.** Для наглядности приведено классическое решение.

Объем конуса равен 10.  
Параллельно основанию конуса  
проведено сечение, делящее высоту  
пополам. Найдите объем  
отсеченного конуса.



$$\text{Объем конуса: } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 10.$$

$$\text{Объем маленького конуса: } V_1 = \frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi 4r_1^2 2h_1 = \frac{8}{3} \pi r_1^2 h_1 = 8 \cdot \frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1 \\ &= 8 \cdot V_1 = 10 \end{aligned}$$

$$\text{Объем отсеченного конуса равен } V_1 = \frac{10}{8} = 1,25$$

*Ответ: 1,25*

# Задача.

Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 48, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсечённой треугольной призмы.

$$V_{\text{старый}} = 48;$$

$$\text{Ось } OX: \text{ сжатие в 2 раза} \Rightarrow a = 1/2;$$

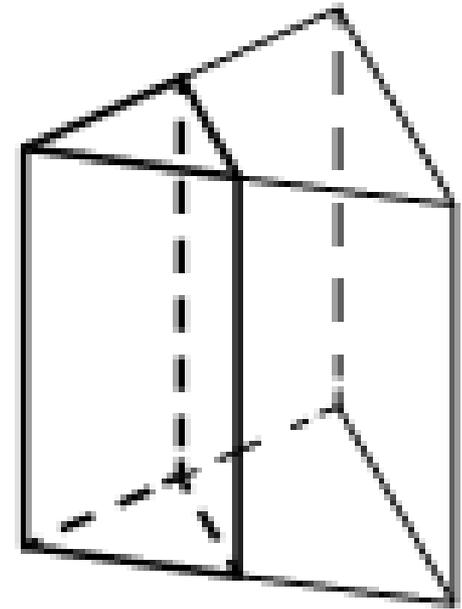
$$\text{Ось } OY: \text{ сжатие в 2 раза} \Rightarrow b = 1/2;$$

$$\text{Ось } OZ: \text{ изменений нет} \Rightarrow c = 1.$$

Рассчитываем объём новой призмы:

$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot a \cdot b \cdot c = 48 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1 = 48 : 4 = 12$$

$$\text{Получили, что } V_{\text{новый}} = 12$$



*Ответ: 12*

# Задачи

- Как изменится объем конуса если радиус основания уменьшить вдвое ?

Уменьшится в 4 раза

- Как измениться объем конуса если высоту увеличить в 9 раз ?

Увеличится в 9 раз

- Как измениться объем конуса если радиус основания увеличить в 3 раза а высоту уменьшить в 2 раза ?

Увеличится в 4.5 раза

- Как измениться объем конуса если радиус основания увеличить в 3 раза а высоту уменьшить в 9 раз ?

Не изменится

## ***Задачи.***

1. Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребро увеличилось в три раза?
2. Объем первого цилиндра равен  $36 \text{ м}^3$ . У второго цилиндра высота в пять раз больше, а радиус основания в три раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в  $\text{м}^3$ .
3. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 288 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр основания которого в 3 раза больше первого?