Системная работа учителя математики по теме :

«Углы и отрезки, связанные с окружностью»

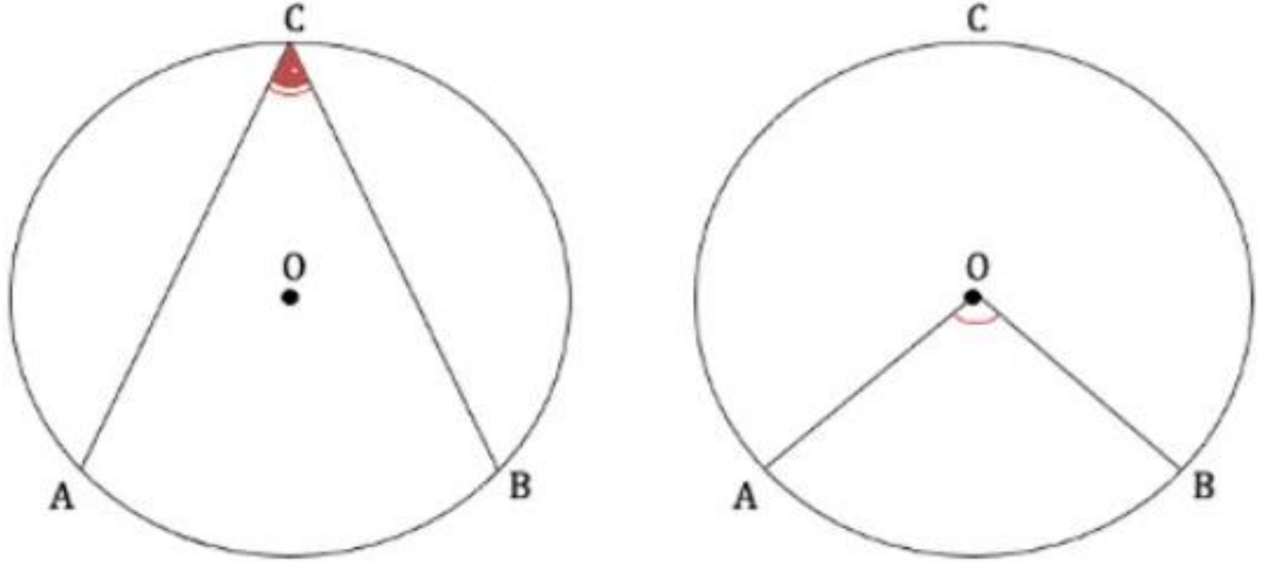
при подготовке к ОГЭ.

Учитель математики
МАОУ СОШ №66
г.Краснодара
Лазарева Т.Ю.

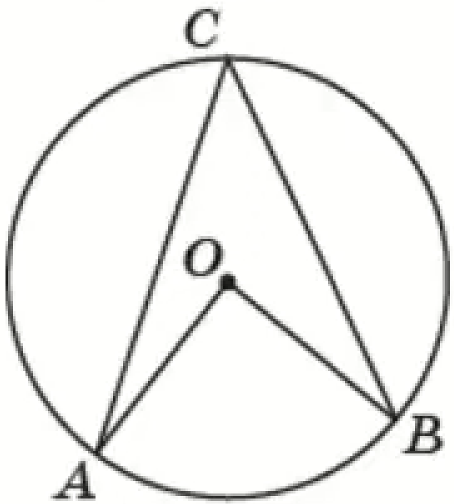
Углы, связанные с окружностью

Углы в окружности

Вписанные | Центральные



Теорема 1. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности.

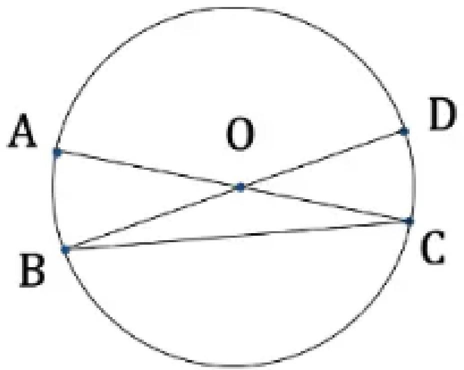


Если величину дуги окружности измерять величиной соответствующего центрального угла, то эту теорему можно переформулировать в виде

Теорема 1'. Вписанный угол измеряется половиной дуги окружности, на которую он опирается.

Задача 1.

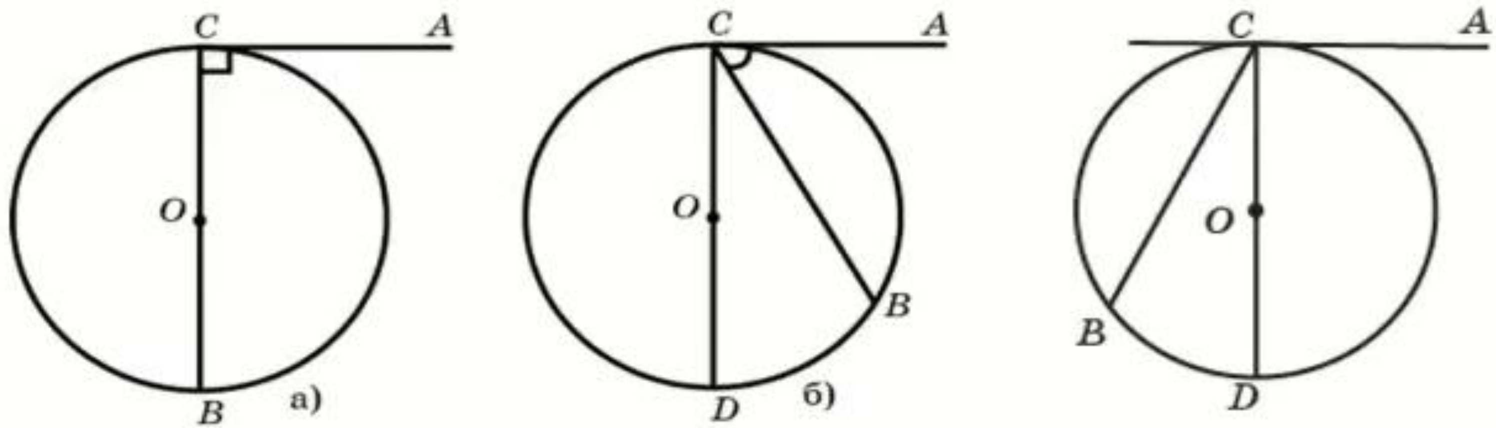
AC и BD – диаметры окружности с центром O. Угол ACB равен 35°. Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.



Решение: угол АСВ равен 35 ˚ ,тогда дуга АВ равна 70 ˚ .ВД – диаметр, значит дуга ВАД=180 ˚ , значит дуга АД = 110 ˚ и угол АОД=110 ˚

Теорема 2. Угол между касательной к окружности и хордой, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги окружности, заключенной внутри этого угла.

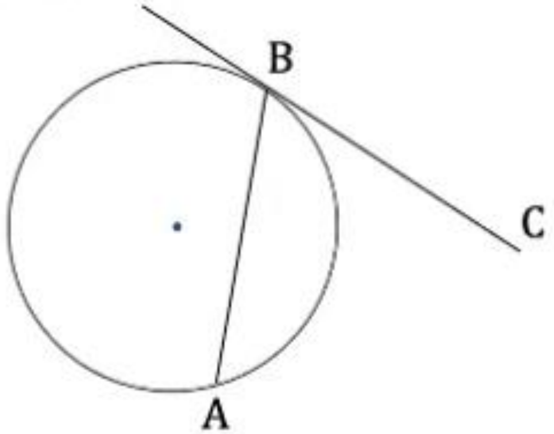
Доказательство. Пусть угол ACB образован касательной AC и хордой BC окружности. Если этот угол – прямой, то BC – диаметр окружности и, следовательно, угол ACB измеряется половиной дуги полуокружности, заключенной внутри этого угла.



Если угол ACB – острый, то проведем диаметр CD. Имеем $\angle ACB = \angle ACD - \angle BCD$. Угол ACD измеряется половиной дуги CBD окружности. Угол BCD измеряется половиной дуги BD окружности. Следовательно, их разность (угол ACB) измеряется половиной дуги CB окружности, заключенной внутри этого угла.

Аналогично рассматривается случай тупого угла.

Хорда AB стягивает дугу окружности в 37°. Найдите острый угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку B. Ответ дайте в градусах.



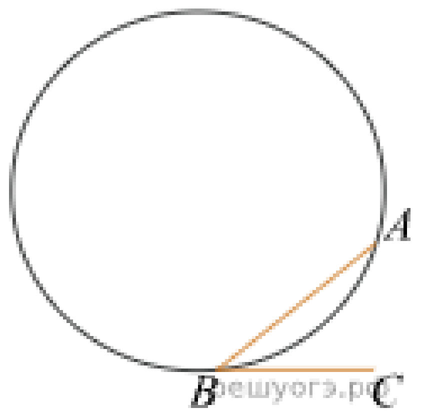
Решение:

Используем теорему, которую мы только что узнали. Искомый угол ABC как раз лежит между касательной BC и хордой AB, значит он будет равен половине дуги, которую стягивает хорда AB, следовательно:

$$\angle ABC = \frac{37^\circ}{2} = 18{,}5^\circ.$$

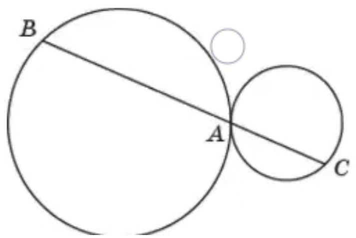
Ответ: 18,5.

На окружности отмечены точки *A* и *B* так, что меньшая дуга *AB* равна 72°. Прямая *BC* касается окружности в точке *B* так, что угол *ABC* острый. Найдите угол *ABC*. Ответ дайте в градусах.

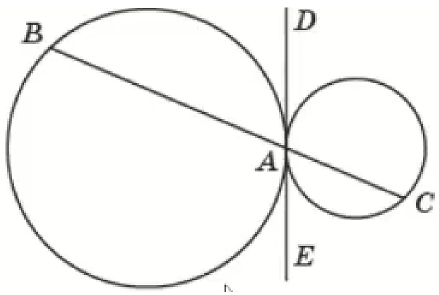


Решение: угол ABC = 72:2=36 °

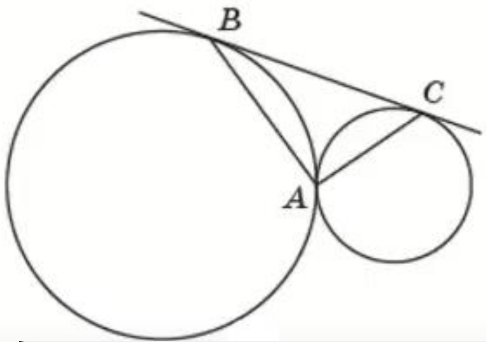
6. Две окружности касаются внешним образом. Через точку касания проведена секущая, которая делит эти окружности на четыре дуги. Докажите, что пары дуг, расположенные по разные стороны секущей и принадлежащие разным окружностям, имеют одинаковые градусные величины.



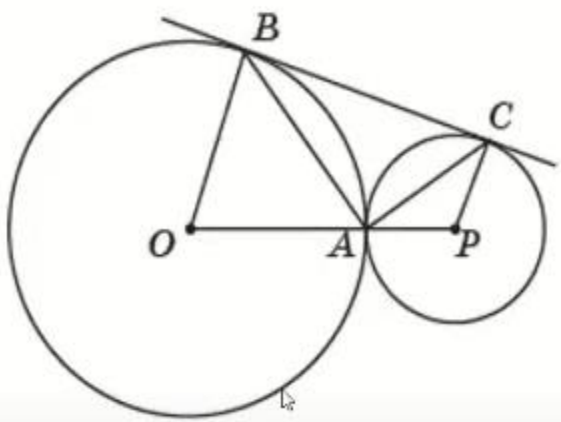
Решение. Пусть BC – секущая, проходящая через точку касания A. Проведём общую касательную DE. Углы BAD и CAE измеряются половинами соответствующих дуг окружностей. Так как эти углы равны, то эти дуги имеют одинаковые градусные величины.



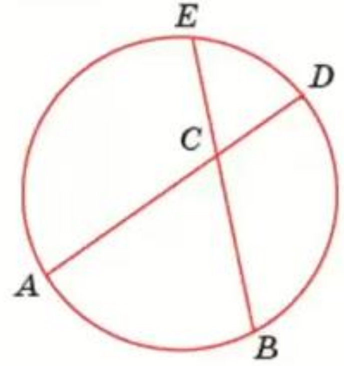
К двум окружностям, касающимся внешним образом в точке A проведена общая касательная BC (B и C - точки касания). Докажите, что угол BAC прямой.



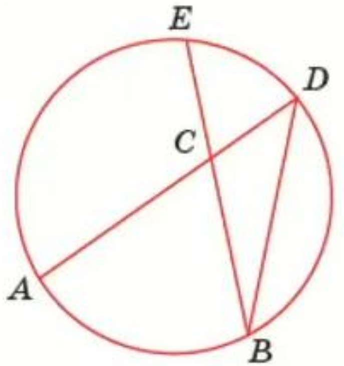
Решение. Пусть O и P центры данных окружностей. $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOB$, $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle APC$, $\angle AOB + \angle APC = 180°$. Следовательно, $\angle ABC + \angle ACB = 90°$. Значит, угол BAC прямой.



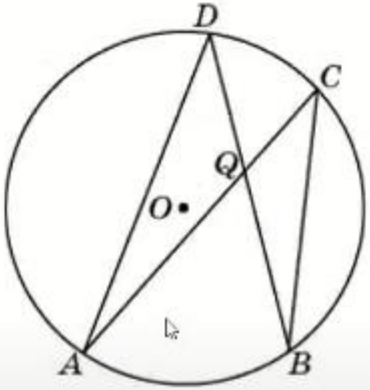
Теорема 3. Угол с вершиной внутри окружности измеряется полусуммой дуг, на которые опираются данный угол и вертикальный с ним угол.



Доказательство. Проведём хорду BD. Угол ACB является внешним углом треугольника BCD. Следовательно, $\angle ACB = \angle CDB + \angle CBD$. Вписанные углы с вершинами D и B измеряются половинами дуг соответственно $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{DE}$. Следовательно, $\angle ACB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DE})$.

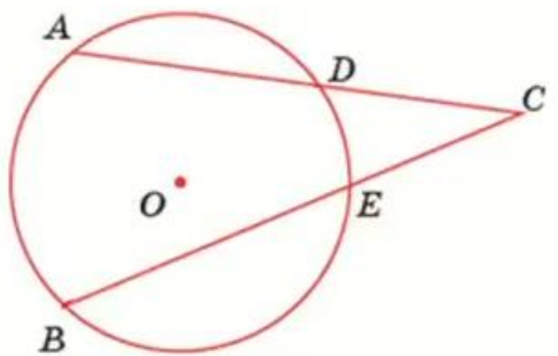


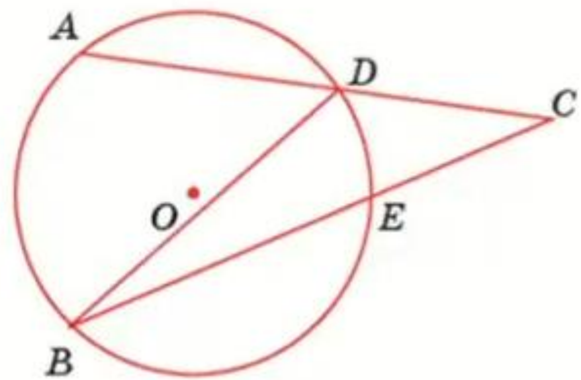
Дуги AB и CD окружности составляют соответственно 72° и 38°. Найдите угол AQB, образованный пересекающимися хордами AC и BD.



Ответ. 55°.

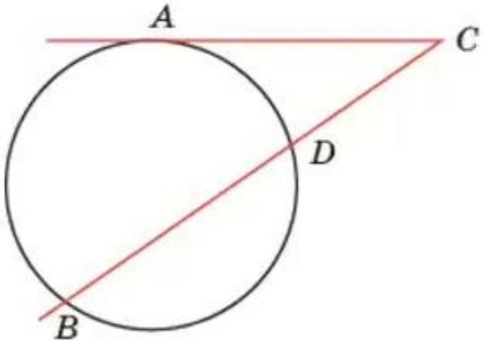
Теорема 4. **Угол с вершиной вне круга , стороны которого пересекают окружность ,измеряется полуразностью дуг окружности ,заключенных внутри этого угла.**

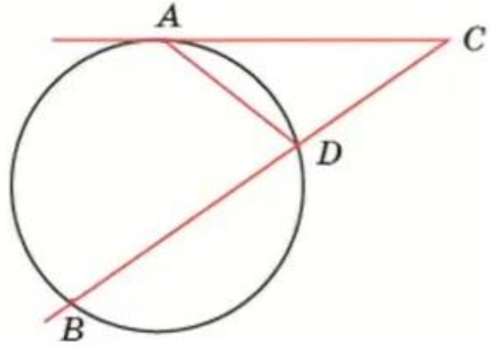




Доказательство. Проведём хорду BD. Угол ACB является внешним углом треугольника BCD. Следовательно, $\angle ACB = \angle CDB + \angle CBD$. Вписанные углы с вершинами D и B измеряются половинами дуг соответственно $\breve{AB}$ и $\breve{DE}$. Следовательно, $\angle ACB = \frac{1}{2}(\breve{AB} + \breve{DE})$.

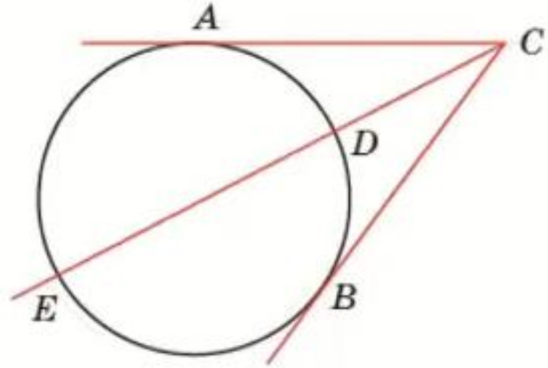
Теорема 5. Угол с вершиной вне круга, одна сторона которого касается окружности, а другая пересекают окружность, измеряется полуразностью дуг окружности, заключенных внутри этого угла.





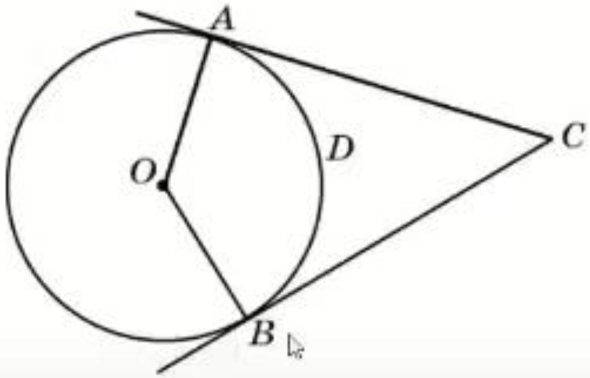
Доказательство. Проведём хорду AD. Угол ADB является внешним углом треугольника ACD. Следовательно, $\angle ACB = \angle ADB - \angle CAD$. Углы ADB и CAD измеряются половинами дуг соответственно $\breve{AB}$ и $\breve{AD}$. Следовательно, $\angle ACB = \frac{1}{2}(\breve{AB} - \breve{AD})$.

Теорема 6. Угол с вершиной вне круга, стороны которого касаются окружности, измеряется полуразностью дуг окружности, заключенных внутри этого угла.



Доказательство. Из точки C проведём луч, пересекающий окружность в точках D и E. Углы ACE и BCE измеряются полуразностями соответствующих дуг. Складывая эти углы, получаем требуемое равенство для угла ACB.

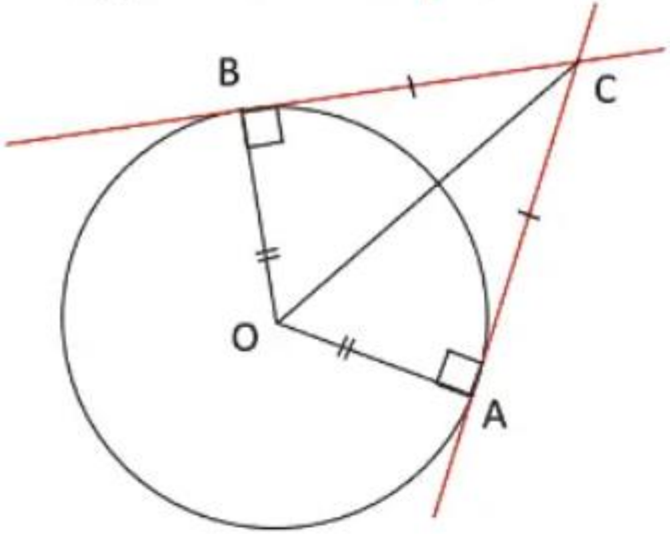
Найдите угол ACB, если его стороны CA и CB касаются окружности, а дуга ADB окружности, заключенная внутри этого угла, равна 132°.



Ответ. 48°.

Отрезки, связанные с окружностью

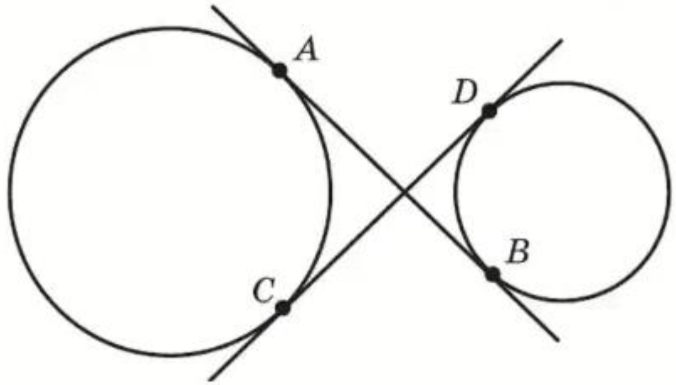
Прямая имеет одну общую точку с окружностью – **касательная**
Прямая имеет две общие точки с окружностью – **секущая**

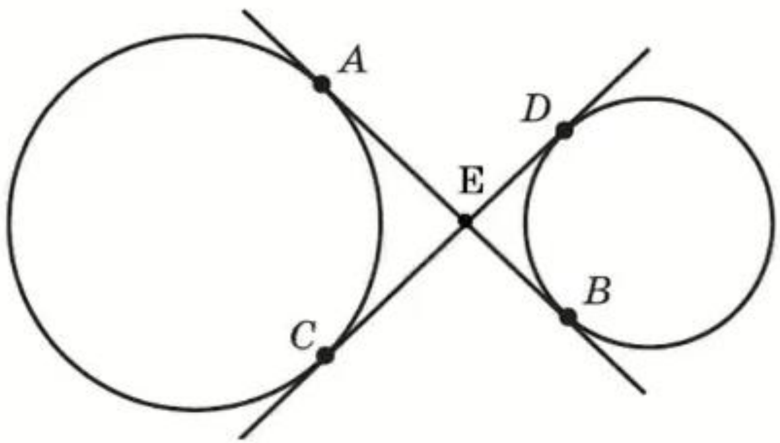


Касательная к окружности перпендикулярна радиусу в точке касания.

Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Задача 1. Докажите, что отрезки AB и CD общих внутренних касательных к двум окружностям равны.

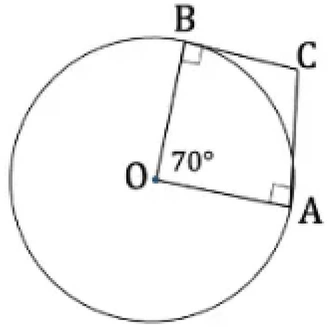




Решение. Обозначим E точку пересечения касательных. Тогда $AE = CE$, $BE = DE$. Следовательно, $AB = CD$.

Задача 2.

К окружности с центром O проведены касательные CA и CB. Найдите $\angle ACB$, если $\angle AOB = 70°$. Ответ дайте в градусах.



Решение:

CA и CB – касательные

Построим радиусы OA и OB к касательным, тогда $\angle OBC = \angle OAC = 90°$

Рассмотрим четырёхугольник $OACB$:

$\angle AOB = 70°, \angle OBC = \angle OAC = 90°$, тогда

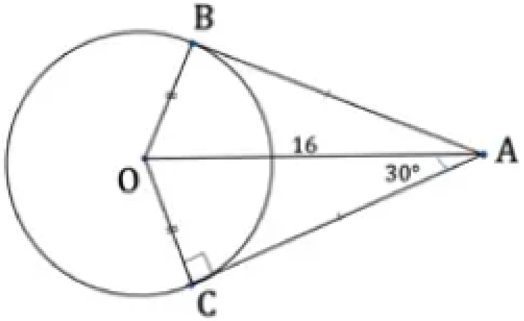
$\angle ACB = 360° - 70° - 90° - 90° = 110°$

Ответ: 110.

Задача 3

Из точки А проведены две касательные к окружности с центром в точке О. Найдите радиус окружности, если угол между касательными равен 60°, а расстояние от точки А до точки О равно 16.

Решение:



AB и AC – касательные, OB и OC – радиусы к касательным, следовательно $\angle ACO = \angle ABO = 90°$, значит ΔAOB и ΔAOC – прямоугольные.

По свойству касательных $\angle OAC = \angle OAB = \frac{60°}{2} = 30°$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник AOC:

катет OC лежит напротив угла 30°, значит он равен половине гипотенузы, то есть $OC = \frac{AO}{2} = \frac{16}{2} = 8$.

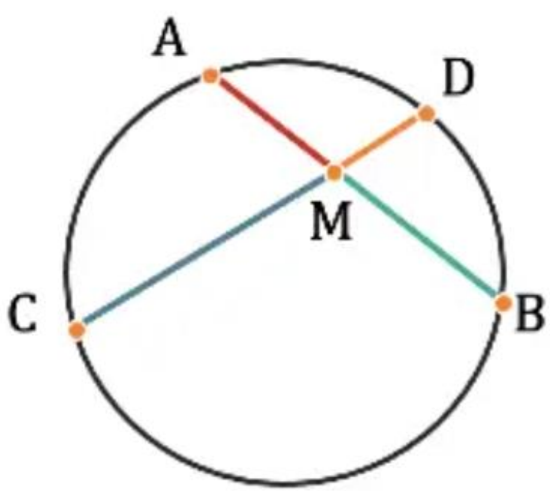
Так как OC является радиусом окружности, то ответ 8.

Ответ: 8

Теорема

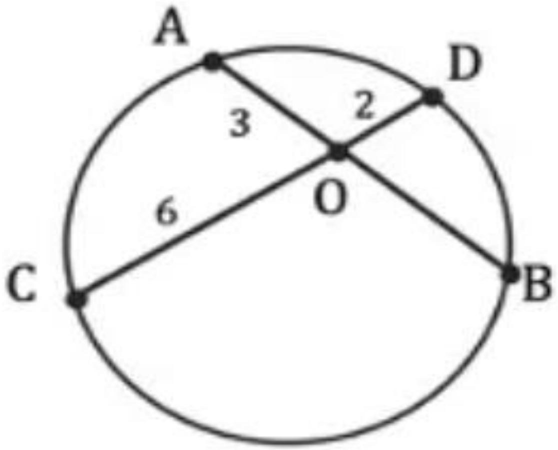
Если две хорды окружности пересекаются ,то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды, т.е. выполняется равенство

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD$$



Задача.

Хорды AB и CD в окружности пересекаются в точке O. Известно, что AO = 3, OD = 2, OC = 6. Найдите OB.



Решение:

Воспользуемся свойством пересекающихся хорд:

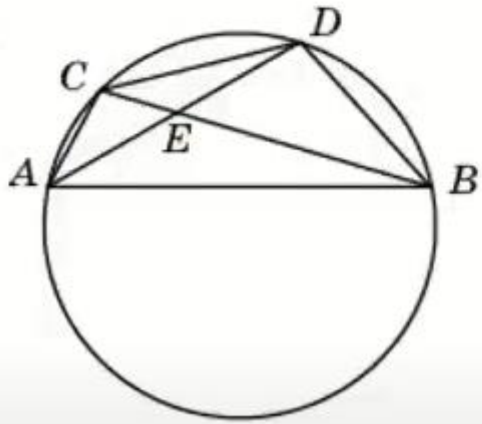
$AO \cdot OB = OC \cdot OD$

$OB = \frac{OC \cdot OD}{AO} = \frac{6 \cdot 2}{3} = \frac{12}{3} = 4.$

Ответ: 4.

Задача.

На рисунке $CE = 2$, $DE = 5$, $AE = 4$. Найдите BE.

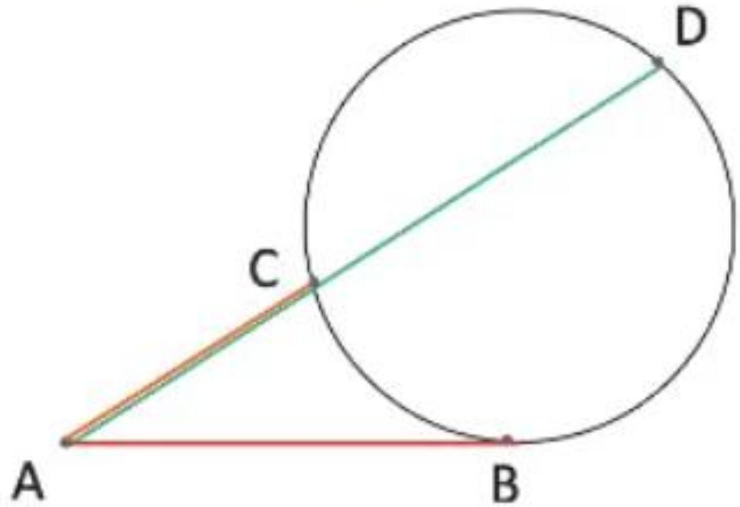


Ответ: 10.

Теорема.

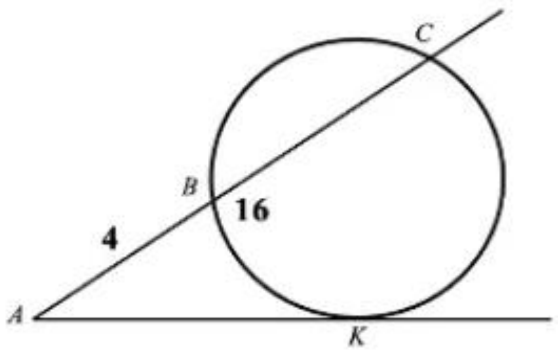
Квадрат касательной равен произведению секущей на её внешнюю часть.

$$AB^2 = AC \cdot AD$$



Задача

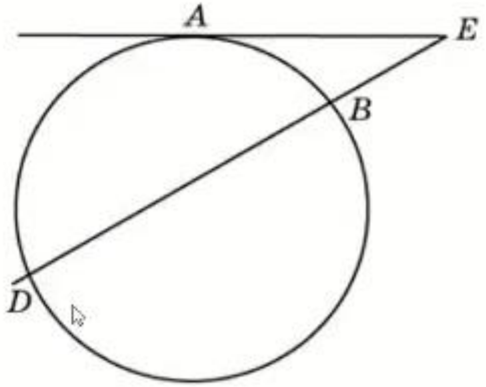
Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две прямые. Одна прямая касается окружности в точке K.
Другая прямая пересекает окружность в точках B и C, причём AB = 4, AC = 16. Найдите AK.



Ответ:8

Задача

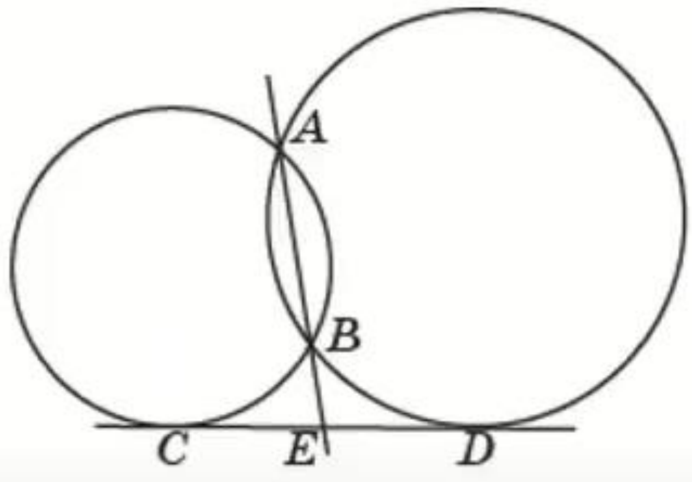
На рисунке $AE = 6$, $DE = 24$. Найдите BE.



Ответ: 1,5.

Задача

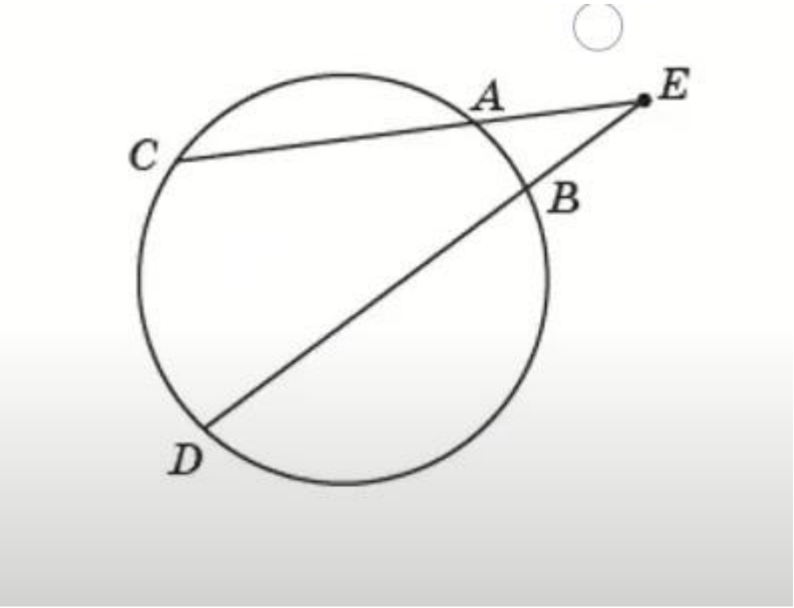
Докажите, что прямая, проходящая через точки A, B пересечения двух окружностей, делит пополам отрезок CD их общей касательной.



Решение. $CE^2 = AE \cdot BE = DE^2$. Следовательно, $CE = DE$.

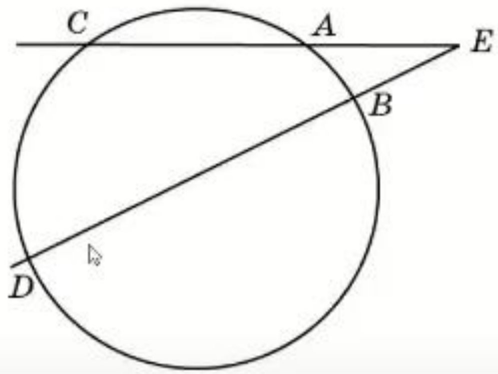
Теорема

Если из точки , лежащей вне окружности , проведены две секущие , то произведение одной секущей на ее внешнюю часть равно произведению другой секущей на ее внешнюю часть ,т . е. выполняется равенство ЕА· ЕС= ЕВ · ЕД



Задача

На рисунке $AE = 9$, $BE = 8$, $CE = 24$. Найдите DE.



Ответ: 27.

Литература:

- Геометрия,7-9-е классы . Атанасян Л.С.,Бутузов В.Ф. и др.
- Геометрия,7-9-е классы. Сморнов В.А.,Смирнова И.М.
- Сайт Решу ОГЭ
- Сайт :vasmirnov.ru