



# Различные виды уравнений

## Задание № 6 профильного ЕГЭ по математике.

Грязнова Галина Петровна  
учитель математики, МБОУСОШ № 20  
Апшеронского района



# Уравнение

Уравнением называется равенство двух выражений с одной или несколькими переменными.

Уравнение с одной переменной имеет вид:

$$f(x) = g(x),$$

где  $f(x)$ ,  $g(x)$  – некоторые функции переменной  $x$ .

Корнем (решением) уравнения с одной переменной называется число  $x_0$ , при подстановке которого вместо  $x$  в обе части уравнения получается верное числовое равенство.

Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Множество значений переменной  $x$ , при которых определены функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , называется областью определения уравнения или областью допустимых значений переменной (ОДЗ).

Уравнения, имеющие одни и те же корни, называются равносильными.

Уравнения, не имеющие корней, также считаются равносильными.



## Теоремы о равносильности уравнений

1.  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$ .
2.  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + a = g(x) + a$  для любого числа  $a$ .
3.  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow a \cdot f(x) = a \cdot g(x)$  для любого числа  $a \neq 0$ .
4.  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$ , если  $h(x)$  имеет смысл в области определения уравнения.
5.  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$ , если  $h(x)$  определена и не обращается в нуль в области определения уравнения.
6.  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^{2n+1}(x) = g^{2n+1}(x) = 0, n \in \mathbb{N}$ .
7.  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^{2n}(x) = g^{2n}(x) = 0, n \in \mathbb{N}, f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ .



# Линейное уравнение

Уравнение вида  $ax + b = 0$ , где  $a \in \mathbb{R}$  и  $b \in \mathbb{R}$ , называется линейным.

Число корней уравнения зависит от значений  $a$  и  $b$ .

Линейное уравнение при  $a \neq 0$  имеет единственное решение  $x = -\frac{b}{a}$ ;

при  $a = 0$ ,  $b \neq 0$  – не имеет решений;

при  $a = 0$ ,  $b = 0$  – принимает вид  $0 \cdot x = 0$  и имеет бесконечное множество решений.



1) Найдите корень уравнения:

$$-\frac{2}{9}x = 1\frac{1}{9}$$

Решение:

$$-\frac{2}{9}x = \frac{10}{9} \quad | \cdot 9$$

$$-2x = 10$$

$$x = 10 \div (-2)$$

$$x = -5$$

$$ax + b = 0, a \neq 0, b \neq 0$$

$$ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Ответ: -5



# Квадратное уравнение

Квадратным уравнением называется уравнение вида:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где  $x$  – переменная,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , причём  $a \neq 0$ .

Число корней квадратного уравнения зависит от значения дискриминанта, который вычисляется по формуле:  $D = b^2 - 4ac$ .

Если  $D > 0$ , то уравнение имеет два различных действительных корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Если  $D = 0$ , то уравнение имеет два равных действительных корня:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

Если  $D < 0$ , то уравнение не имеет корней.



## Квадратные уравнения

Уравнение вида  $ax^2 + px + q = 0$ , где  $a = 1$ , называется приведённым квадратным уравнением.

Уравнения вида  $ax^2 + bx = 0$ ,  $ax^2 + c = 0$ ,  $ax^2 = 0$  называются неполными квадратными уравнениями.

В уравнении  $ax^2 + bx = 0$ , ( $b \neq 0, c = 0$ ) левая часть раскладывается на множители:

$$x(ax + b) = 0, \text{ откуда } x_1 = 0, x_2 = \frac{-b}{a}.$$

Уравнение  $ax^2 + c = 0$ , ( $c \neq 0$ )

не имеет корней, если знаки  $a$  и  $c$  совпадают;

имеют два корня:  $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ ,  $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ , если знаки  $a$  и  $c$  различны.

Уравнение  $ax^2 = 0$  имеет два равных корня:  $x_1 = x_2 = 0$ .



# Теорема Виета

Теорема Виета (прямая):

если квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет корни, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Для корней приведённого квадратного уравнения

$x^2 + px + q = 0$  формулы Виета имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q. \end{cases}$$

Теорема Виета (обратная):

если сумма каких-нибудь чисел  $x_1$  и  $x_2$  равна  $-\frac{b}{a}$ , а их произведение равно  $\frac{c}{a}$ ,

то эти числа являются корнями квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ .





1) Найдите корень уравнения

$$x^2 - 17x + 72 = 0.$$

Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

$$D = b^2 - 4ac.$$

$$D > 0 \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

**Решение:**

По теореме, обратной теореме Виета, сумма корней этого уравнения равна 17, а их произведение равно 72. Значит корни равны 8 и 9.

$$x^2 - 17x + 72 = 0$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = 9$$

$$D = (-17)^2 - 4 \cdot 72 = 289 - 288 = 1$$

$$x_1 = \frac{17 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 8$$

$$x_2 = \frac{17 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 9$$

Ответ: 8.



2) Найдите корень уравнения

$$(2x + 7)^2 = (2x - 1)^2$$

Если уравнение имеет более одного корня,  
укажите меньший из них

Решение:

$$(2x + 7)^2 = (2x - 1)^2$$

$$4x^2 + 28x + 49 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$28x + 4x = 1 - 49$$

$$32x = -48$$

$$x = -48 \div 32$$

$$x = -1,5$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ответ :-1,5.



### 3) Решите уравнение

$$(x - 6)^2 = -24x$$

Решение:

$$(x - 6)^2 = -24x$$

$$x^2 - 12x + 36 = -24x$$

$$x^2 + 12x + 36 = 0$$

$$(x + 6)^2 = 0$$

$$x = -6$$

$$D = 12^2 - 4 \cdot 36 = 144 - 144 = 0$$

$$x = \frac{-12}{2} = -6$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ответ: -6



4) Найдите корень уравнения

$$\frac{1}{3}x^2 = 16\frac{1}{3}$$

Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них

Решение:

$$\frac{1}{3}x^2 = \frac{49}{3}$$

$$x^2 = 49$$

$$x = \pm\sqrt{49}$$

$$x_1 = -7$$

$$x_2 = 7$$

$$x^2 - 49 = 0$$

$$(x - 7)(x + 7) = 0$$

$$x - 7 = 0 \text{ или } x + 7 = 0$$

$$x = 7$$

$$x = -7$$

Ответ: -7



# Уравнения высшей степени

1) Найдите корень уравнения :

$$(x - 1)^3 = 8$$

**Решение :**

Извлекая кубический корень из обеих частей уравнения, получаем

$x - 1 = 2$  , откуда

$x = 2 + 1$

$x = 3$

Ответ: 3



2) Найдите корень уравнения :

$$(x - 1)^3 = -8$$

**Решение :**

Извлекая кубический корень из обеих частей уравнения, получаем

$x - 1 = -2$  , откуда

$x = -2 + 1$

$x = -1$

Ответ: -1



# Дробно-рациональные уравнения

Уравнение  $f(x)=g(x)$  называется рациональным, если  $f(x)$  и  $g(x)$  – рациональные выражения. При этом если хотя бы одно из выражений  $f(x)$  и  $g(x)$  является дробным, то рациональное уравнение  $f(x)=g(x)$  называется дробным.

Простейшее дробно-рациональное уравнение вида  $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , где  $f(x)$  и  $g(x)$  многочлены, равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$$

При решении дробно-рационального уравнения общего вида его либо приводят к простейшему виду  $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , либо освобождаясь от знаменателя, приводят к целому рациональному уравнению.



1) Найдите корень уравнения

$$\frac{1}{9x-7} = \frac{1}{2}$$

**Решение:**

$$\frac{1}{9x-7} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ОДЗ: } 9x-7 \neq 0; x \neq \frac{7}{9}$$

Числители равны, значит равны и знаменатели

$$9x-7 = 2$$

$$9x = 2 + 7$$

$$9x = 9$$

$$x = 1$$

**Ответ: 1.**





2) Решите уравнение

$$\frac{x - 119}{x + 7} = -5$$

*Решение:*

$$\frac{x - 119}{x + 7} = \frac{-5}{1}$$

ОДЗ:  $x \neq 7$

$$x - 119 = -5(x + 7)$$

$$6x = 84x + 5x = 119 - 35$$

$$x - 119 = -5x - 35$$

$$x = 84:6$$

$$x = 14$$

Ответ: 14



3) Решите уравнение:

$$x = \frac{6x - 15}{x - 2}$$

Если корней несколько, то в ответе укажите больший из них.

Решение:

$$x = \frac{6x - 15}{x - 2} \quad \text{ОДЗ: } x \neq 2$$

$$x(x - 2) = 6x - 15$$

$$x^2 - 2x - 6x + 15 = 0$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$x_1 = 3 \in \text{ОДЗ}$$

$$x_2 = 5 \in \text{ОДЗ}$$

Ответ: 5



4) Решите уравнение:

$$\frac{x+8}{5x+7} = \frac{x+8}{7x+5}$$

Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите больший из корней.

**Решение:**

Заметим, что числители дробей равны. Имеем:

$$\frac{x+8}{5x+7} = \frac{x+8}{7x+5} \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} 5x+7 \neq 0, \\ 7x+5 \neq 0 \end{cases} \begin{cases} x \neq -1,4 \\ x \neq -\frac{5}{7} \end{cases}$$

$$5x+7 = 7x+5$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Ответ: 1



5) Решите уравнение

$$\frac{1}{3x - 4} = \frac{1}{4x - 11}.$$

**Решение:**

Если две дроби с равным числителем равны, то равны их знаменатели. Имеем:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x - 4 \neq 0 \\ 4x - 11 \neq 0 \end{cases} \begin{cases} x \neq \frac{4}{3} \\ x \neq \frac{11}{4} \end{cases}$$

$$3x - 4 = 4x - 11$$

$$4x - 3x = 11 - 4$$

$$x = 7$$

Ответ: 7.



# Иррациональные уравнения

1) Найдите корень уравнения

$$\sqrt{\frac{2x+5}{3}} = 5$$

Решение:

$$\sqrt{\frac{2x+5}{3}} = 5$$

$$\text{ОДЗ: } 2x + 5 \geq 0; x \geq -2,5$$

$$\sqrt{f(x)} = a, a \geq 0$$
$$(\sqrt{f(x)})^2 = a^2$$

$$\left(\sqrt{\frac{2x+5}{3}}\right)^2 = 5^2$$

$$\frac{2x+5}{3} = 25$$

$$2x + 5 = 25 \cdot 3$$

$$2x = 75 - 5$$

$$2x = 70$$

$$x = 35$$

Ответ: 35



2) Найдите корень уравнения

$$\sqrt{\frac{1}{15-4x}} = 0,2$$

Решение:

$$\sqrt{\frac{1}{15-4x}} = 0,2 \quad \text{ОДЗ: } 15-4x > 0; x < 3,75$$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{15-4x}}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$\frac{1}{15-4x} = \frac{1}{25}$$

$$15-4x = 25$$

$$4x = 15-25$$

$$4x = -10$$

$$x = -2,5$$

$$\begin{aligned} \sqrt{f(x)} &= a, a \geq 0 \\ (\sqrt{f(x)})^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Ответ:  $-2,5$



3) Найдите корень уравнения:

$$\sqrt{-72 - 17x} = -x.$$

Если корней несколько, в ответе укажите меньший из них.

Решение:

$$\sqrt{-72 - 17x} = -x \text{ при условии: } \begin{cases} -72 - 17x \geq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \leq \frac{-72}{17} \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$(\sqrt{-72 - 17x})^2 = (-x)^2$$

$$-72 - 17x = x^2$$

$$x^2 + 17x + 72 = 0$$

$$x_1 = -9$$

$$x_2 = -8$$

$$\sqrt{f(x)} = a, a \geq 0$$
$$(\sqrt{f(x)})^2 = a^2$$

Ответ:  $-9$



4) Найдите корень уравнения

$$\sqrt[3]{x - 4} = 3$$

Решение:

$$\sqrt[3]{x - 4} = 3$$

$$(\sqrt[3]{x - 4})^3 = 3^3$$

$$x - 4 = 27$$

$$x = 27 + 4$$

$$x = 31$$

Ответ: 31





# Показательное уравнение

Показательным называется уравнение, содержащее переменные только в показателе степени.

Уравнение вида  $a^x = b$ , где  $a > 0$  и  $a \neq 1$ , называется простейшим показательным.

Если  $b > 0$ , то уравнение имеет единственное решение  $x = \log_a b$ .

Если  $b \leq 0$ , то уравнение не имеет корней.

Решение показательных уравнений основано на свойстве степеней две степени с одним и тем же положительным и отличным от единицы основанием равны тогда и только тогда, когда равны их показатели.



# Приведение обеих частей уравнения к одному основанию

Приведение обеих частей уравнения к одному основанию

$$a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}.$$

Полученное уравнение при  $a > 0$  и  $a \neq 1$  равносильно уравнению  $f(x) = \varphi(x)$ .

Уравнение вида  $a^{f(x)} = 1$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  равносильно уравнению  $f(x) = 0$ , так как  $a^0 = 1$ .



1) Найдите корень уравнения:

$$9^{-5+x} = 729$$

Решение:

$$9^{-5+x} = 729$$

$$9^{-5+x} = 9^3$$

$$-5 + x = 3$$

$$x = 3 + 5$$

$$x = 8$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1$$
$$f(x) = g(x)$$

Ответ: 8



2) Найдите корень уравнения

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8} = \frac{1}{9}$$

Решение:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8} = \frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$x - 8 = 2$$

$$x = 2 + 8$$

$$x = 10$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1$$
$$f(x) = g(x)$$

Ответ: 10



3) Найдите корень уравнения

$$7^{18,5x+0,7} = \frac{1}{343}.$$

Решение:

$$7^{18,5x+0,7} = \frac{1}{343}$$

$$7^{18,5x+0,7} = \left(\frac{1}{7}\right)^3$$

$$7^{18,5x+0,7} = 7^{-3}$$

$$18,5x + 0,7 = -3$$

$$18,5x = -3 - 0,7$$

$$18,5x = -3,7$$

$$x = -3,7 : 18,5$$

$$x = -0,2$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1$$
$$f(x) = g(x)$$

Ответ:  $-0,2$



4) Найдите корень уравнения

$$8^{9-x} = 64^x$$

Решение:

$$8^{9-x} = 64^x$$

$$8^{9-x} = 8^{2x}$$

$$9 - x = 2x$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1$$
$$f(x) = g(x)$$

Ответ: 3



5) Найдите корень уравнения:

$$2^{3+x} = 0,4 \cdot 5^{3+x}$$

Решение:

$$2^{3+x} = 0,4 \cdot 5^{3+x} \quad | : 5^{3+x}$$

$$\frac{2^{3+x}}{5^{3+x}} = \frac{0,4 \cdot 5^{3+x}}{5^{3+x}}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{3+x} = 0,4$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{3+x} = \frac{2}{5}$$

$$3 + x = 1$$

$$x = 1 - 3$$

$$x = -2$$

$$y = a^x$$
$$a > 0, a \neq 1$$

Ответ: -2



# Логарифмическое уравнение

Логарифмическим называется уравнение, содержащее переменные только под знаком логарифма.

## 1. Логарифмические уравнения, решаемые по определению логарифма

Уравнение вида  $\log_a f(x) = b$  при  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  и  $b > 0$  равносильно уравнению  $f(x) = a^b$ .





1) Найдите корень уравнения

$$\log_3(5 + x) = 3.$$

$$\log_a b = c$$
$$a^c = b$$
$$a > 0, a \neq 1, b > 0$$

Решение:

$$\log_3(5 + x) = 3$$

$$5 + x = 3^3$$

$$x = 27 - 5$$

$$x = 22$$

$$\text{ОДЗ : } 5 + x > 0 \Rightarrow x > -5$$

Ответ:22



2) Найдите корень уравнения

$$\log_{\frac{1}{2}}(9 - x) = -2$$

Решение:

$$\log_{\frac{1}{2}}(9 - x) = -2$$

$$\text{ОДЗ: } 9 - x > 0, x < 9$$

$$9 - x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$9 - x = 2^2$$

$$9 - x = 4$$

$$x = 9 - 4$$

$$x = 5$$

Ответ: 5



## 2. Уравнения первой степени относительно логарифма, решаемые потенцированием

Уравнения вида  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$  при  $a > 0$  и  $a \neq 1$  равносильны каждой из следующих систем:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \text{ или } \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

При решении таких уравнений переходят только к одной из указанных систем (более простой) либо к уравнению  $f(x) = g(x)$ , корни которого проверяют подстановкой в исходное уравнение, так как они могут быть посторонними для него.



3) Найдите корень уравнения

$$\log_8(x + 6) = \log_8(3x - 8)$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$f(x) = g(x)$$

$$a > 0, a \neq 1, g(x) > 0, f(x) > 0$$

Решение:

$$\log_8(x + 6) = \log_8(3x - 8)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x + 6 > 0 \\ 3x - 8 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -6 \\ x > \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{8}{3}$$

$$x + 6 = 3x - 8$$

$$2x = 14$$

$$x = 7$$

Ответ :7



4) Найдите корень уравнения

$$\log_5(x^2 + 2x) = \log_5(x^2 + 10)$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$f(x) = g(x)$$

$$a > 0, a \neq 1, g(x) > 0, f(x) > 0$$

Решение:

$$\log_5(x^2 + 2x) = \log_5(x^2 + 10)$$

$$\text{ОДЗ: } x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2)(0, +\infty)$$

$$x^2 + 2x = x^2 + 10$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

Ответ: 5



5) Найдите корень уравнения  
 $\log_3(12 - x) = 3 \log_3 4.$

Решение:

$$\log_3(12 - x) = 3 \log_3 4$$

$$\log_3(12 - x) = \log_3 4^3$$

$$12 - x = 64$$

$$x = 12 - 64$$

$$x = -52$$

$$\log_a b^r = r \log_a b, a > 0, a \neq 1, b > 0$$

$$\text{ОДЗ: } 12 - x > 0, x < 12$$

Ответ:  $-52$



***СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ,  
ЖЕЛАЮ УСПЕХОВ!***