РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ УЧАЩИХСЯ

Е. В. Чуб
МБОУ-СОШ №5
имени маршала Г.К. Жукова
ст. Старовеличковской,
Калининский район

Математическое понятие параметра

Параметром называются коэффициенты при неизвестных или свободные члены, заданные не конкретными числовыми значениями, а обозначенные буквами.

Решить задачу с параметром – это значит, для каждого значения *параметра* найти значения x, удовлетворяющие условию этой задачи.

Основные типы задач с параметрами:

Тип 1. Задачи, которые необходимо решить для всех значений параметра или для значений параметра из заданного промежутка.

Тип 2. Задачи, где требуется найти количество решений в зависимости от значения параметра.

Тип 3. Задачи, где необходимо найти значения параметра, при которых задача имеет заданное количество решений.

Тип 4. Задачи, в которых необходимо найти значения параметра, при которых множество решений удовлетворяет заданным условиям.

Основные способы решения задач с параметром

Аналитический. Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра.

Графический. В зависимости от задачи (с переменной x и параметром *a*) рассматриваются графики или в координатной плоскости (x; y), или в координатной плоскости (x; *a*).

Решение относительно параметра.

Переменные x и a принимаются равноправными и выбирается та, относительно которой аналитическое решение признается более простым.

ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
С ПАРАМЕТРОМ ГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

в координатной плоскости (xOy)

1. Строим график функции y=f(x;a), задающий семейство кривых, зависящих от параметра a.

2. Определяем преобразование, позволяющее перейти от одной кривой семейства к другой.

3. Читаем график и находим необходимый графический образ.

в координатной плоскости (xOa)

1.Записываем уравнение F(x;a) = 0 в виде a = f (x) и строим этой функции.

2. Находим точки пересечения графика функции a = f(x) с прямыми вида $a = a_0$, параллельными оси Ox.

3. Выбираем абсциссы точек пересечения, определяющие решения в соответствии с условием задачи.

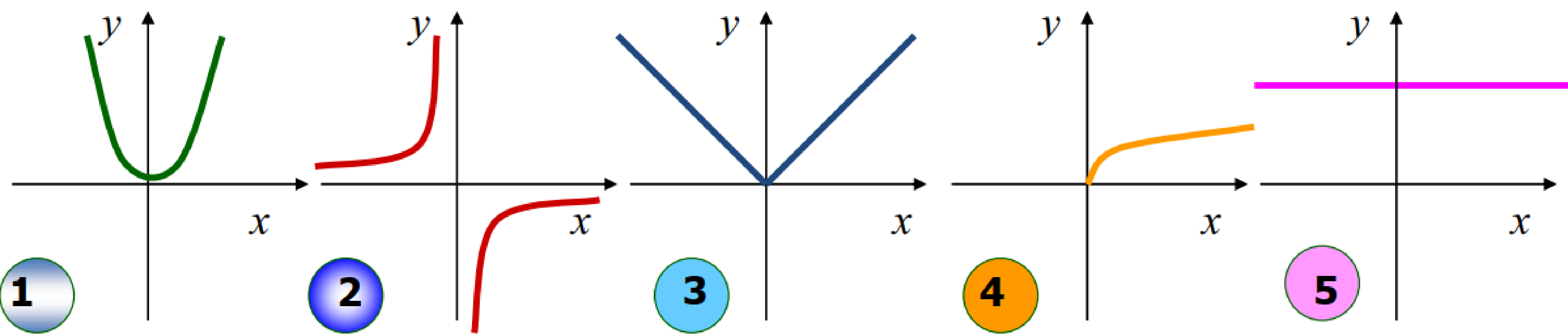
Преимущества графического метода решения задач с параметром.

экономия времени

отсутствие сложных и громоздких вычислений

подсказка на более рациональный аналитический метод решения

Графики элементарных функций



$y = ax^2$ $\quad$ $y = \frac{k}{x}$ $\quad$ $y = |x|$ $\quad$ $y = \sqrt{x}$ $\quad$ $y = a$

	Функция	Преобразование графика функции
1	$y = f(x) + d$	**Параллельный перенос вдоль оси OY** на d единиц вверх, если d>0, и на d единиц вниз, если d<0.
2	$y = f(x + b)$	**Параллельный перенос вдоль оси OX** на b единиц вправо, если b < 0, на b единиц влево, если b > 0.
3	$y = kf(x)$	**Растяжение вдоль оси OY** относительно оси OX в k раз, если k > 1, и сжатие в 1/k раз, если 0 < k < 1.
4	$y = f(ax)$	**Сжатие вдоль оси OX** относительно оси OY в a раз, если a > 1, и растяжение в 1/a раз, если 0 < a < 1.
5	$y = kf(ax + b) + d$	Все 4 преобразования

Задача №1. (ЕГЭ 2015)

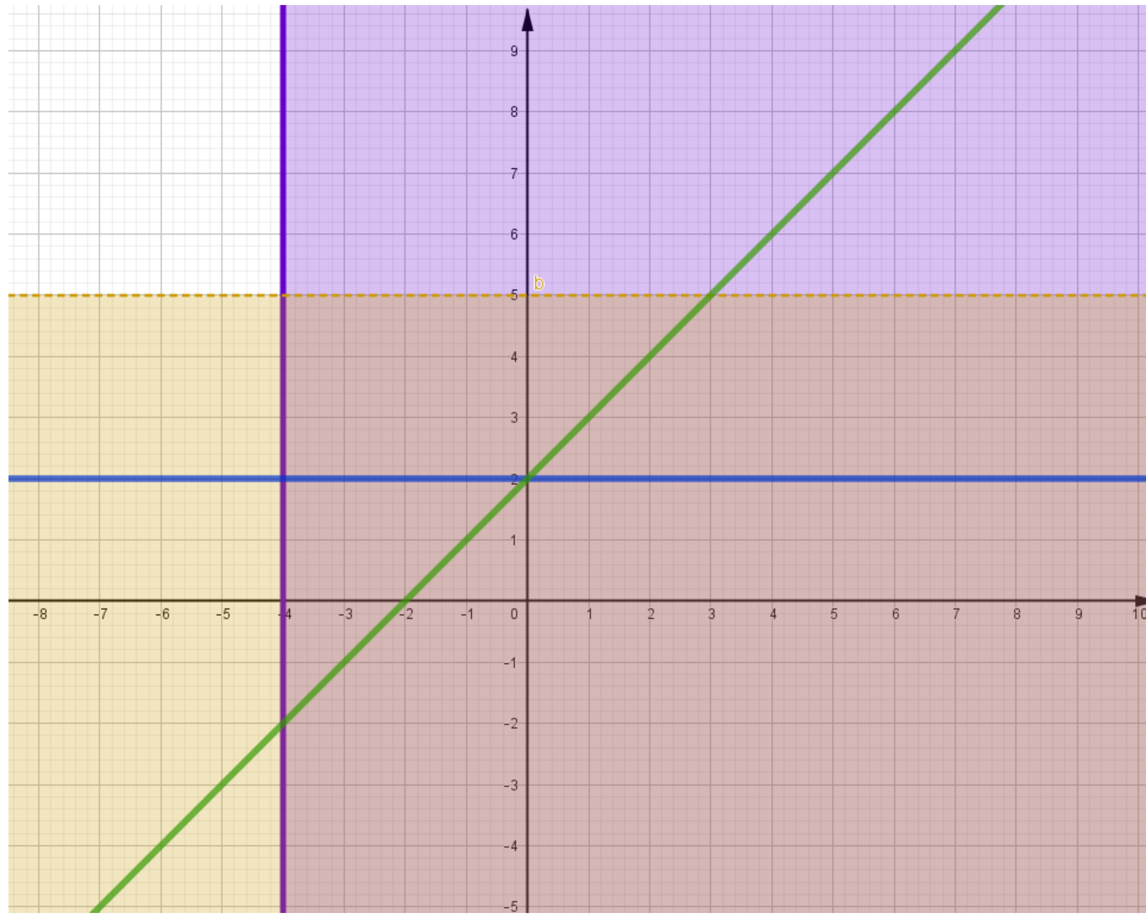
Найдите все п значения а, при каждом из которых система уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\left(y^2 - xy - 4y + 2x + 4\right)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}} = 0, \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\begin{cases} \dfrac{(y-2)(y-2-x)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}} = 0, \\ a = x + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = x + 2 \\ x \geq 4 \\ y < 5 \end{cases}$$



$$y = a - x$$

$$-2 = a - (-4)$$

$$a \leq -6$$

$$2 = a - (0)$$

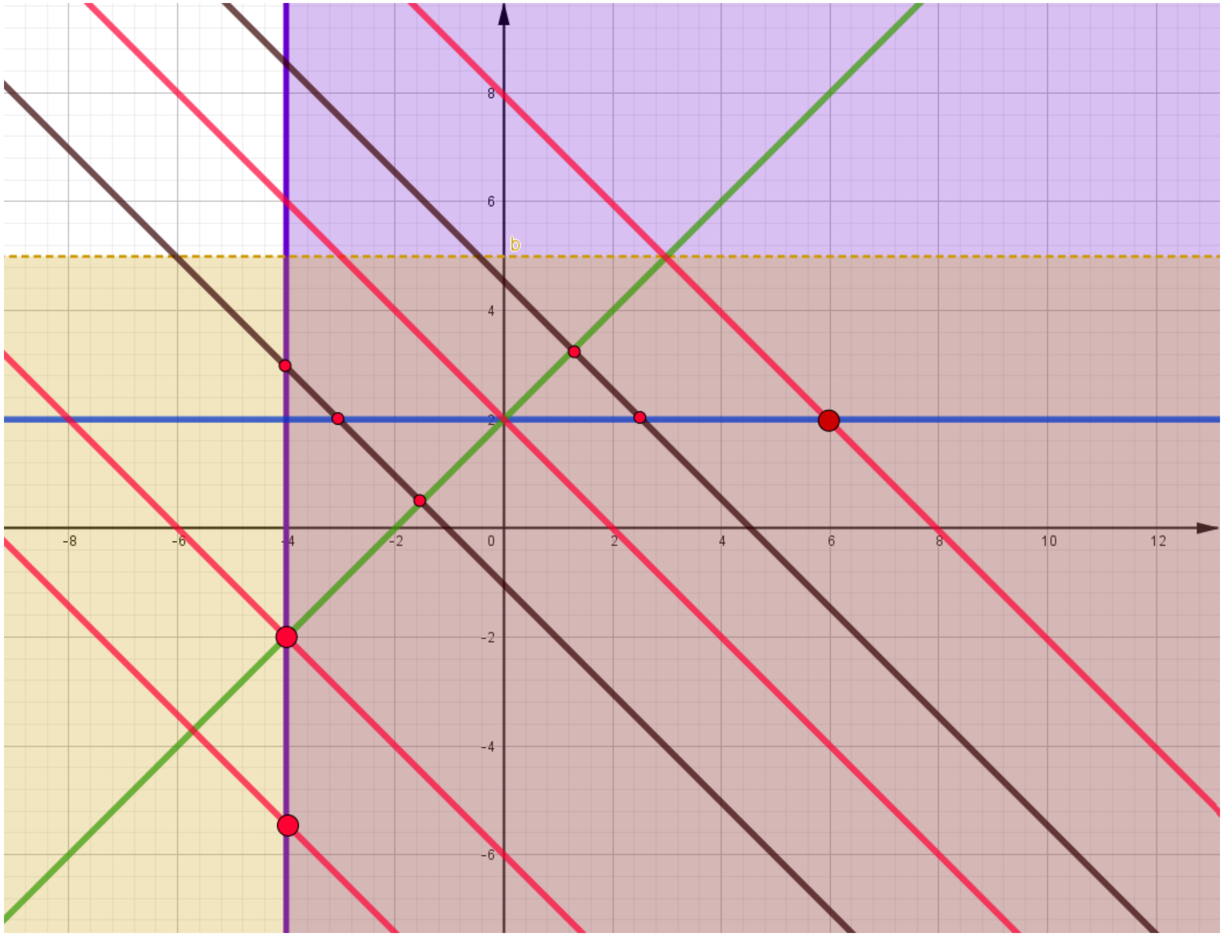
$$a = 2$$

$$6 = a - (2)$$

$$a \geq 8$$

Ответ

: $a \leq -6; a = 2; a \geq 8$



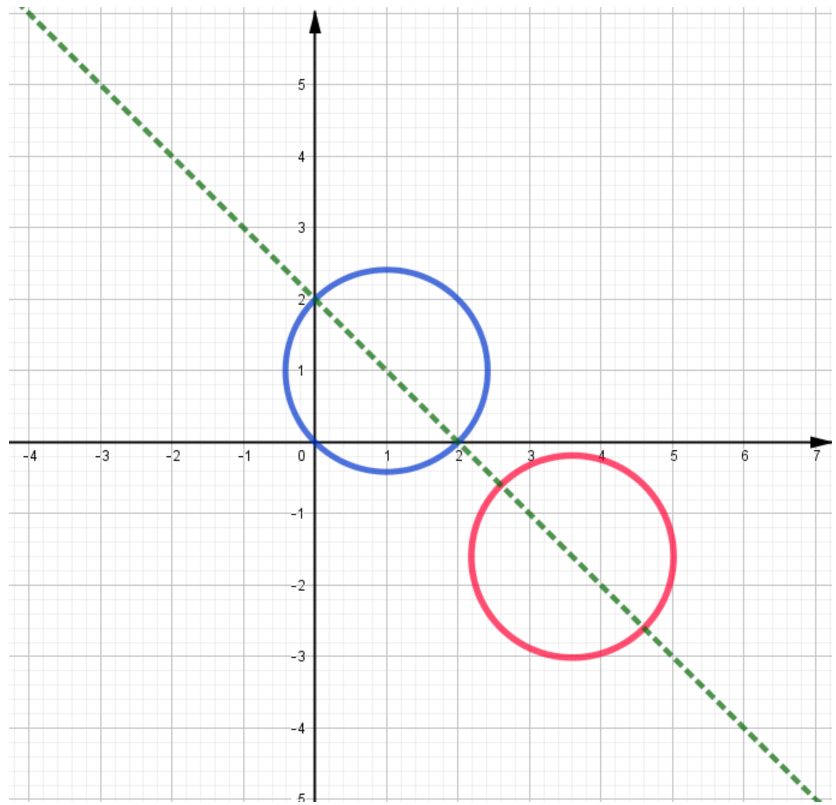
Задача №2. (ЕГЭ 2016)

Найдите все п значения а, при каждом из которых система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x + 2y, \\ x^2 + y^2 = 2(1+a)x + 2(1-a)y - 2a^2 \end{cases}$$

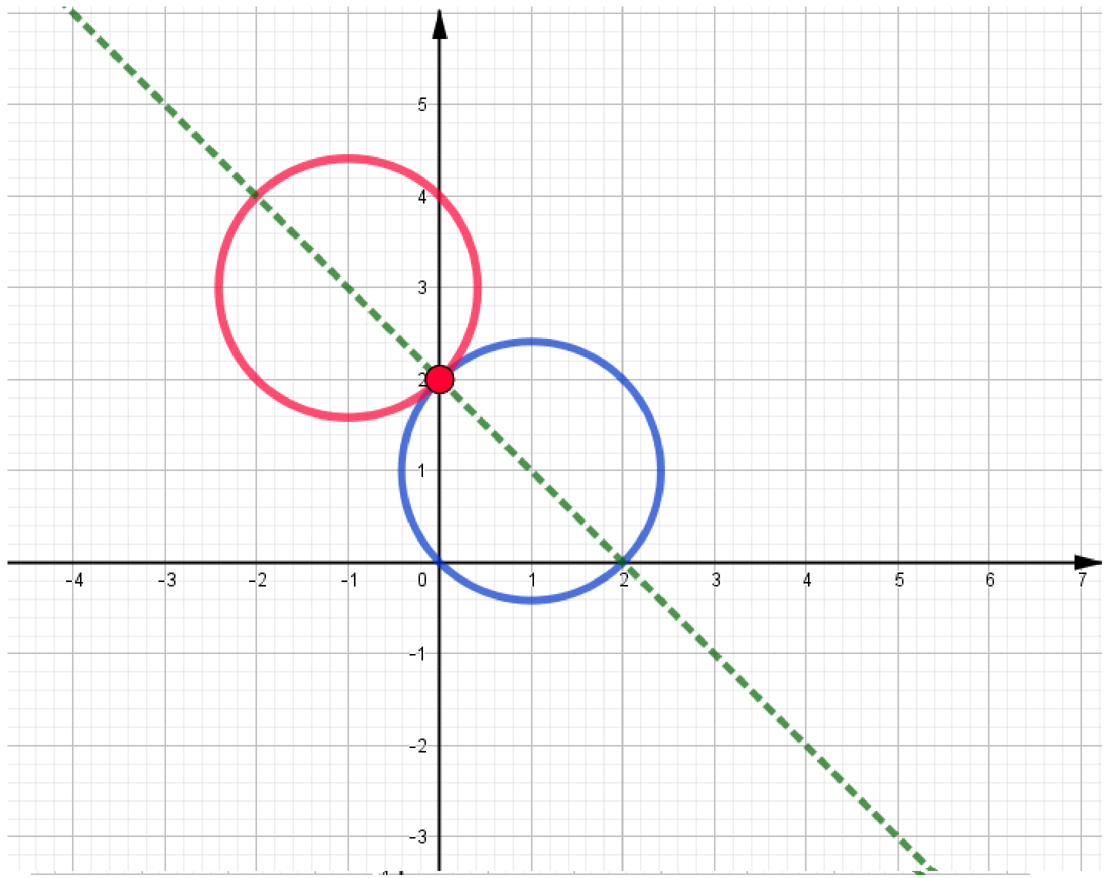
имеет имеет ровно два различных решения.

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=2,\\(x-a-1)^2+(y-1+a)^2=2\end{cases}$$



$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=2, \\ (x-a-1)^2+(y-1+a)^2=2 \end{cases}$$

$$-2<a<0;\quad 0<a<2$$



Задача №3.

Найдите все значения а, при каждом из которых система

$$\begin{cases} yx^2 + y^2 = 2y + 63 - 7x^2, \\ x \geq -3 \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение:

1. Начинаем всегда работать с уравнением, в котором нет параметра:

$$yx^2 + y^2 = 2y + 63 - 7x^2$$

$$yx^2 + y^2 - 2y - 63 + 7x^2 = 0$$

$$y^2 - 2y + yx^2 + 7x^2 - 63 = 0$$

$$y^2 - y(2 - x^2) + (7x^2 - 63) = 0$$

$$D = \left(2 - x^2\right)^2 - 4\left(7x^2 - 63\right) = 4 - 4x^2 + x^4 - 28x^2 + 252 =$$

$$= x^4 - 32x^2 + 256 = \left(x^2 - 16\right)^2$$

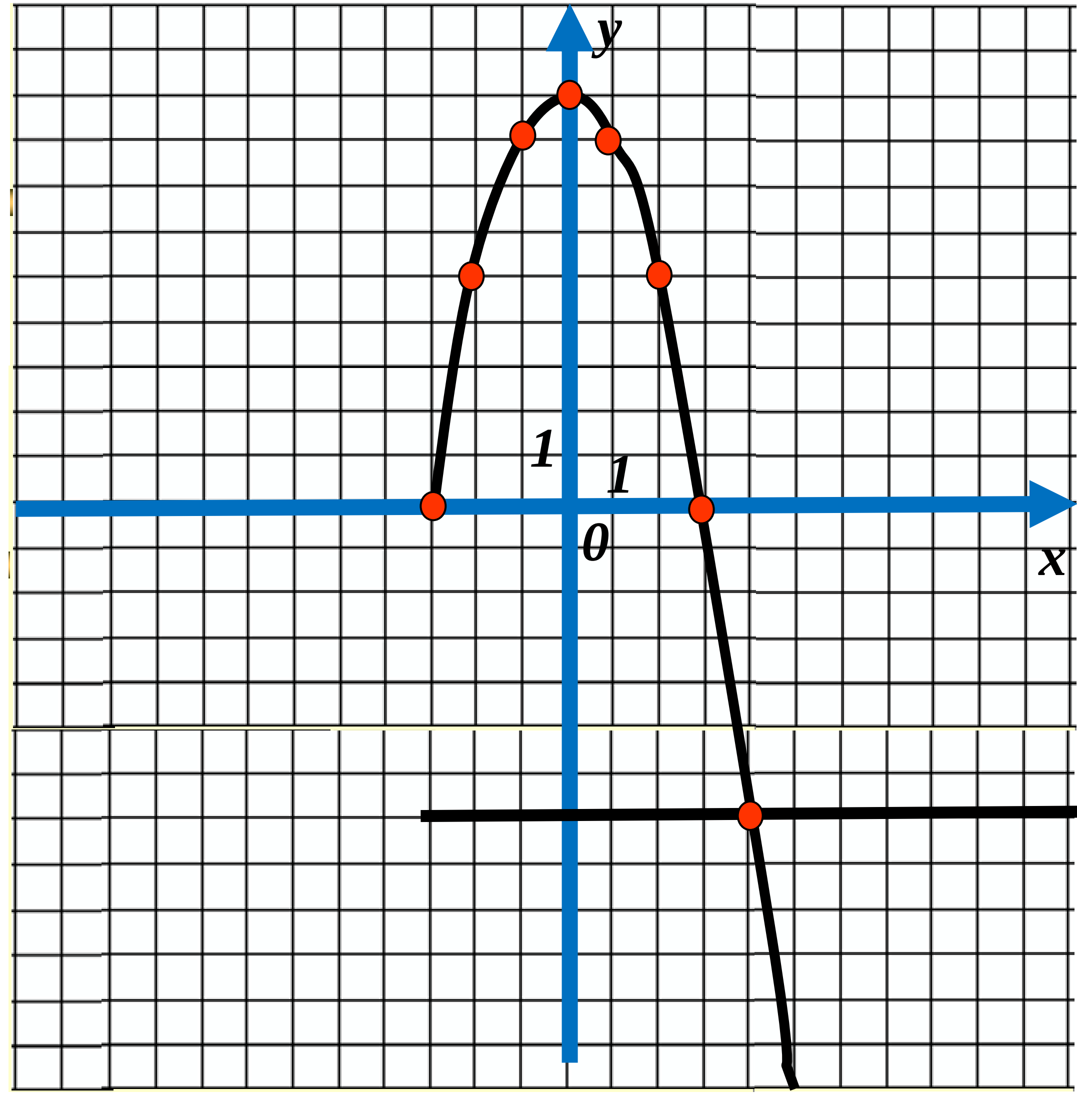
$$y = \frac{2 - x^2 \pm \left| x^2 - 16 \right|}{2} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \dfrac{2 - x^2 + x^2 - 16}{2} = -7 \\ \dfrac{2 - x^2 - x^2 + 16}{2} = 9 - x^2 \end{array} \right.$$

Строим 2 графика:

$$y = -7$$

$$y = 9 - x^2$$



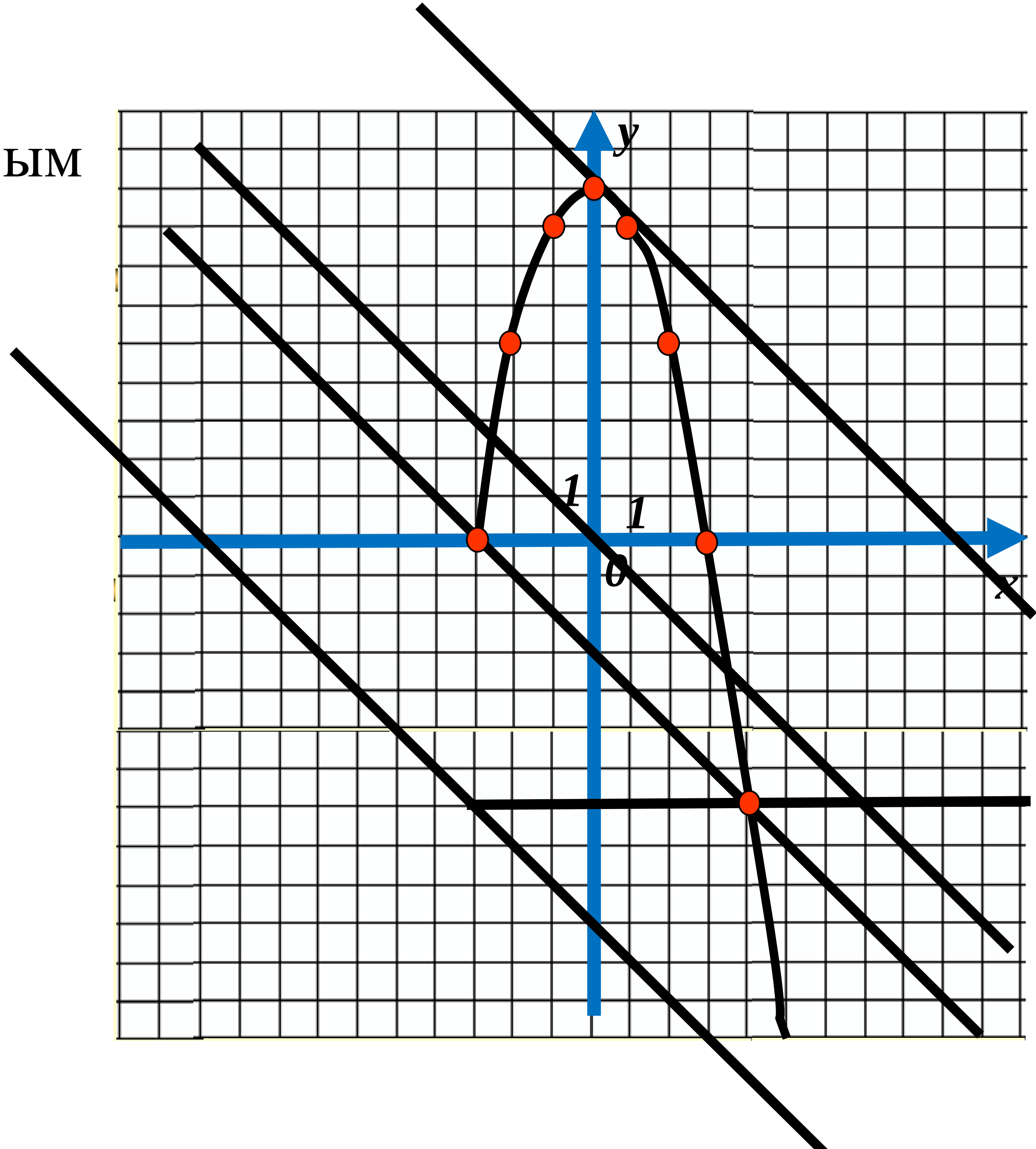
2. Поработаем со вторым уравнением системы:

$$x + y = a$$

$$y = -x + a$$

Построим прямую

$$y = -x$$



$a=-10$ $a=-3$

$$a\in[-10;-3]$$

$$9-x^2=-x+a$$

$$x^2-x+a-9=0$$

$$D=1-4(a-9)=1-4a+36=37-4a$$

$$37-4a=0$$

$$a=37/4$$

$$a=9{,}25$$

Ответ: 9,25

Задача №4. **Найдите все значения *a*, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1.**

Решение:

$$f(x) > 1$$

$$2ax + |x^2 - 8x + 7| > 1$$

$$|x^2 - 8x + 7| > -2ax + 1$$

Рассмотрим обе части неравенства как функции и построим их графики.

1) $y = |x^2 - 8x + 7|$ - график – парабола, часть параболы для $y<0$ отображаем относительно оси Ох

2) $y = -2ax + 1$, график – прямая, проходящая при любых значениях параметра через точку (0;1)

Прямая проходит через точку (1;0) $-2a + 1 = 0$; **$a = 0{,}5$**

Прямая касается параболы $y=x^2-8x+7$

$x^2-8x+7=-2ax+1$

$x^2-8x+2ax+6=0$

$x^2-2(4-a)x+6=0$

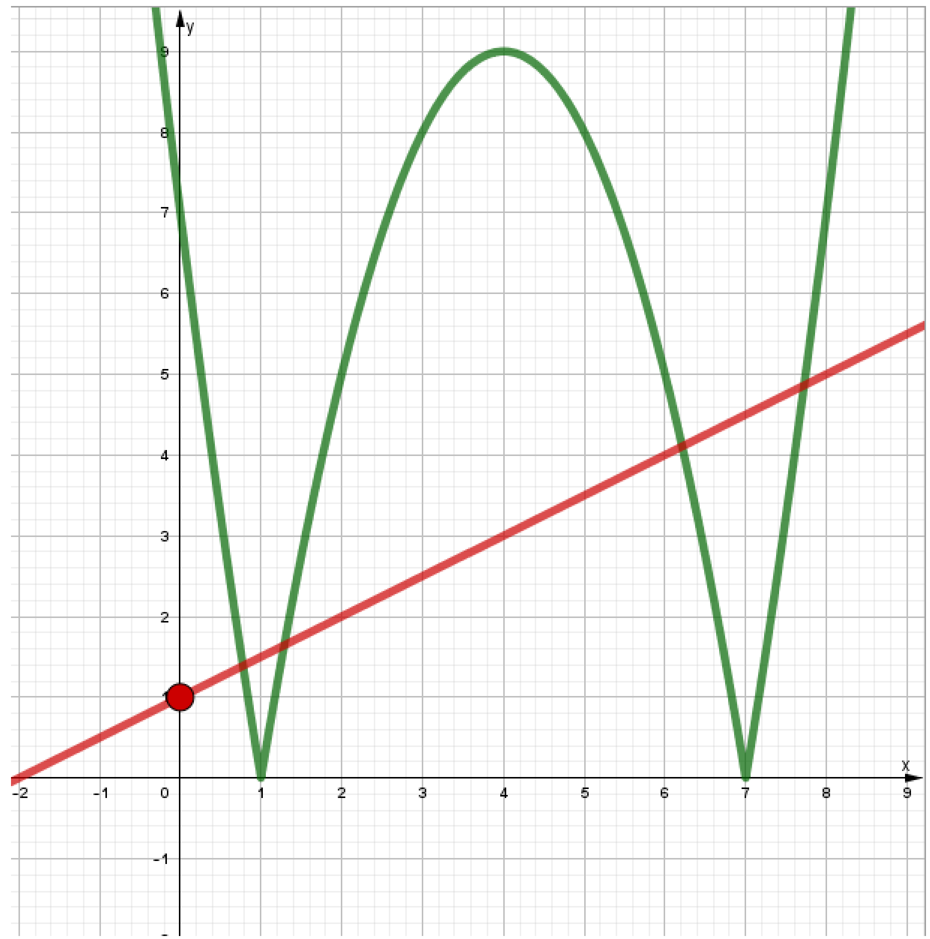
$D_1=16-8a+a^2-6=a^2-8a+10$

$a^2-8a+10=0$

$D_1=16-10=6$

$a_1=4-\sqrt{6}$

$a_2=4+\sqrt{6}$



Ответ: $a\in(0{,}5;4+\sqrt{6})$

Аналитический метод

Идея:

- ✓ Параметр считаем заданным числом, то есть решаем задачу по алгоритму, соответствующему данному типу уравнения: линейному,
- ✓ квадратному,
- ✓ иррациональному,
- ✓ тригонометрическому и т. д.

При этом на каждом шаге алгоритма обращаем внимание на особенности: возможное деление на ноль, смену знака неравенства, извлечение корней, раскрытие модуля и т. п.

Значения параметра, при которых возникают эти особенности, рассматриваем отдельно.

Задача №5. Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x-2}\,\ln(x-a)=\sqrt{3x-2}\,\ln(2x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,1]$

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x-2=0, \\ x-a>0, \\ 2x+a>0, \end{cases} \quad (1) \\ \\ \begin{cases} 3x-2>0, \\ \ln(x-a)=\ln(2x+a) \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

$$(1)\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x > a \\ x > -\frac{a}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a < \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2}{3} > -\dfrac{a}{2} \end{cases} \Longrightarrow a \in \left(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

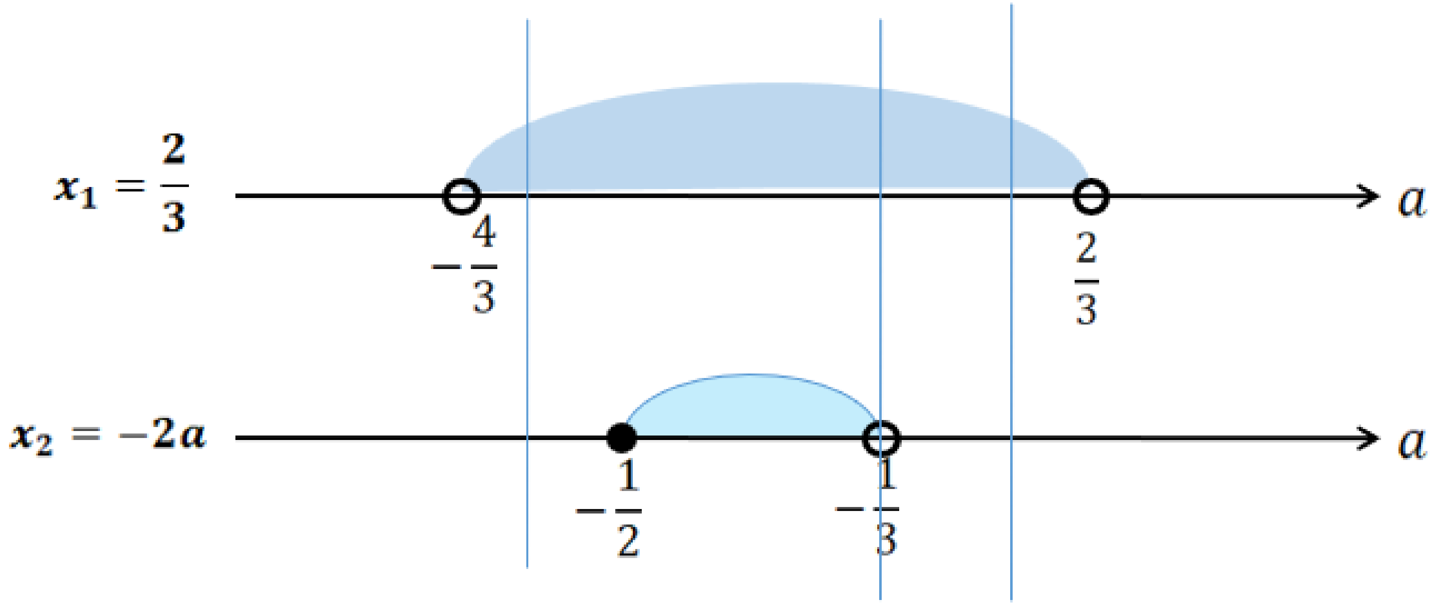
При $\boldsymbol{a} \in \left(-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}; \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)$ $\boldsymbol{x_1} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

$$(2)\begin{cases} x > \dfrac{2}{3}, \\ x \in [0; 1], \\ x - a > 0, \\ x - a = 2x + a. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \in \left(\dfrac{2}{3}, 1\right] \\ x > a \\ x = -2a \end{cases} \begin{cases} \dfrac{2}{3} < -2a \le 1 \\ -2a > a \end{cases} \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le a < -\dfrac{1}{3} \\ a < 0 \end{cases}$$

При $\boldsymbol{a} \in \left[-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}; -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$ $\boldsymbol{x_2} = -\mathbf{2}\boldsymbol{a}$

При $\boldsymbol{a} \in \left(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$ $\boldsymbol{x_1} = \frac{2}{3}$

При $\boldsymbol{a} \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$ $\boldsymbol{x_2} = -2\boldsymbol{a}$



Ответ: При $\boldsymbol{a} \in \left(-\frac{4}{3}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ ***ровно один корень на отрезке*** $[0; 1]$

Задача №6. **Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение** $$\left|x-a^2+a+2\right|+\left|x-a^2+3a-1\right|=2a-3$$

имеет корни, но, ни один из них не принадлежит интервалу

(4; 19).

Решение:

Пусть $x-a^2+a+2=m$ $\quad x-a^2+3a-1=n$

Тогда наше уравнение можно переписать в виде:

$$|m|+|n|=n-m$$

$$|m|+|n|=-m+n$$

Получаем, $\begin{cases} m \le 0, \\ n \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - a^2 + a + 2 \le 0, \\ x - a^2 + 3a - 1 \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \le a^2 - a - 2, \\ x \ge a^2 - 3a + 1 \end{cases}$

$$x \in \left[a^2 - 3a + 1; a^2 - a - 2\right]$$

Промежутков $x \in [10;2]$ $x \in [-6;-15]$

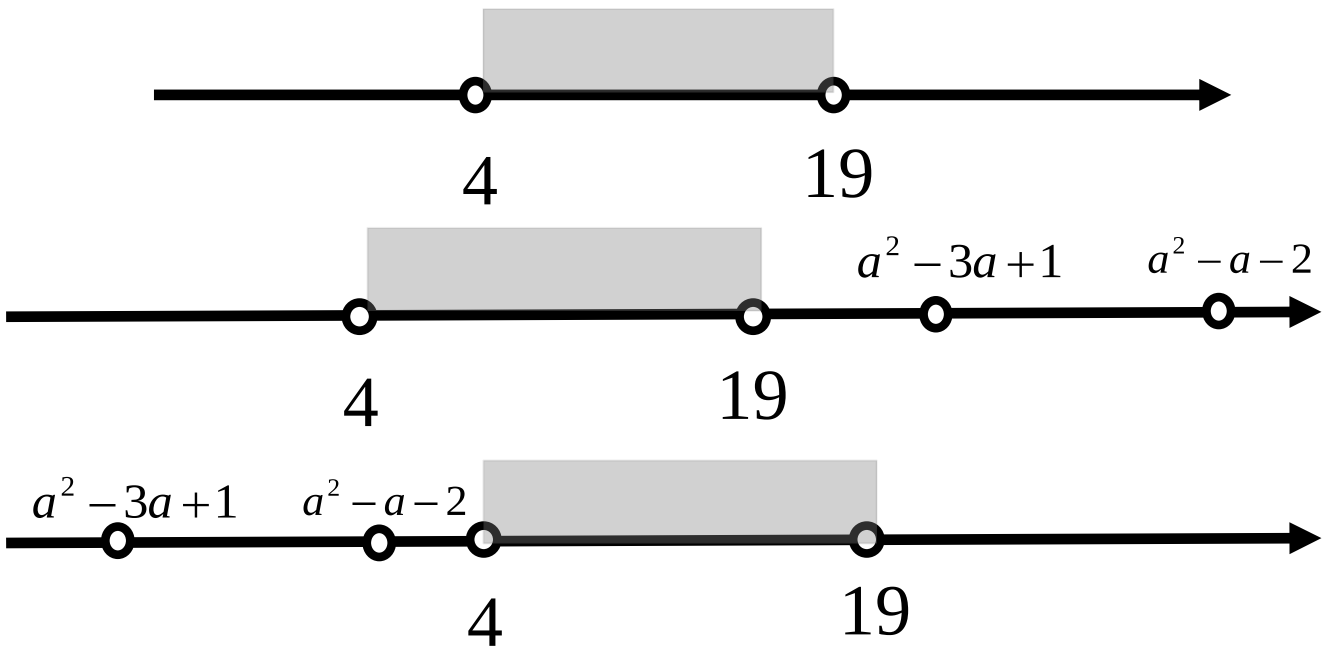
не бывает!!!!

Условие, чтобы уравнение имело корни:

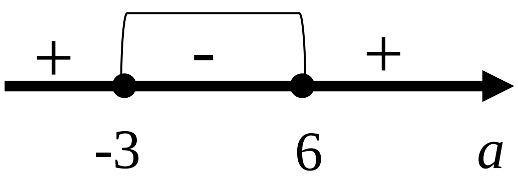
$$a^2 - 3a + 1 \le a^2 - a - 2$$

$$-2a \le -3$$

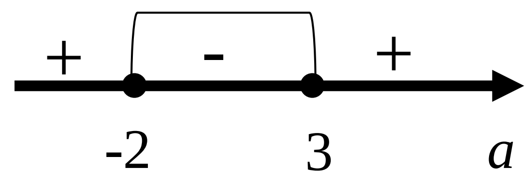
$$a \ge 1{,}5$$



$$a^2 - 3a + 1 \geq 19,$$
$$a^2 - 3a - 18 \geq 0$$
$$(a-6)(a+3) \geq 0$$



$$a^2 - a - 2 \leq 4,$$
$$a^2 - a - 6 \leq 0$$
$$(a-3)(a+2) \leq 0$$



С учетом того что $a \geq 1{,}5$, **получаем:**

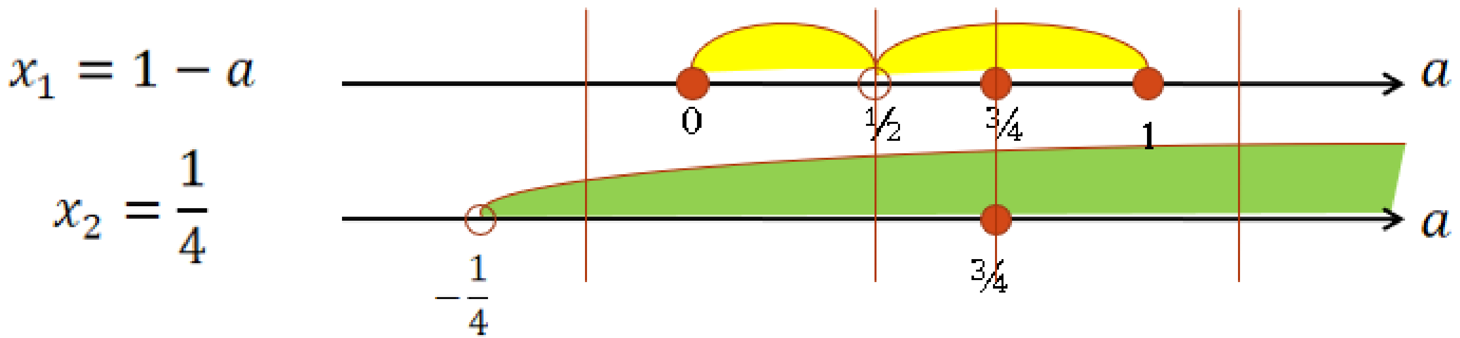
$$a \geq 6$$

$$1{,}5 \leq a \leq 3$$

Ответ: $a \in [1{,}5;3] \cup [6;+\infty)$

При $a \in [0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 1]$ $x_1 = 1 - a$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 1 - a = \frac{1}{4}, a = \frac{3}{4}$$



Ответ: При $a \in \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left\{\frac{3}{4}\right\} \cup (1; \infty)$ уравнение имеет ровно один корень на $[0; 1]$