МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЕЖНОЙ ПОЛИТИКИ
КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
Государственное бюджетное образовательное учреждение
дополнительного профессионального образования
«Институт развития образования»
Краснодарского края

РЕАЛИЗАЦИЯ КУРСА «ПРАКТИКУМ ПО ГЕОМЕТРИИ 10 КЛАСС»

Учебно-методическое пособие

Краснодар, 2024

УДК 372.851
ББК 74.262.21
Р 31

Рекомендовано к изданию решением редакционно-издательского совета ГБОУ ИРО Краснодарского края протоколом № 3 от 21.08.2024 г.

Рецензенты:
Васильева Ирина Викторовна, доцент кафедры функционального анализа и алгебры КубГУ, к.п.н.
Власова Александра Анатольевна, старший преподаватель кафедры математики, информатики и технологического образования ГБОУ ИРО Краснодарского края.

Р 31 Реализация курса «Практикум по геометрии, 10 класс»: учебно-методическое пособие /под ред. О.В. Задорожной, К.А. Кузьминой. – Краснодар, ГБОУ ИРО Краснодарского края. 2024. – 198 с.

Авторы – составители:
Белай Е.Н., Борейко А.С., Борщакова Е.Н., Волкова О.А., Голинченко О.Н., Задорожная О.В., Кузьмина К.А., Еременко О.Н., Кобецкая Н.А., Костюченко А.С., Пенькова А.Н., Попова И.Н., Прошина Е.А., Роговая МА., Рубенкова О.С., Татаркина О.А., Ткачева Е.В., Чередниченко И.В., Шакитько О.И.

Данное пособие входит в учебно-методический комплект для преподавания элективного курса для обучающихся 10-х классов «Практикум по геометрии» и предназначено для учителей математики. В пособии содержится рабочая программа курса с календарно-тематическим планированием, примерный план-конспект каждого занятия, собран краткий теоретический материал, задачи на проверку теоретических знаний и практических умений по геометрии базового и повышенного уровня сложности.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Настоящее учебно-методическое пособие для учителя «Реализация курса «Практикум по геометрии, 10 класс» рассчитано на помощь учителю в преподавании элективного курса. В пособии содержится рабочая программа курса с календарно-тематическим планированием, примерный план каждого занятия, проверочные и практические работы, ответы ко всем заданиям.

Каждое занятие начинается с рубрики «Повторяем теорию» для актуализации знаний обучающихся, далее рубрика «Проверяем себя», в которой предлагаются задания на проверку теоретического материала, обозначенные (Т1). Также в каждом занятии предлагается рубрика «Решаем задачи», содержащая по 5 – 7 типов заданий (а), б), в)). Задания а) обучающиеся решают вместе, обсуждая с учителем. Учитель при необходимости задает дополнительные наводящие вопросы для продвижения в решении заданий. Обучающиеся проговаривают основные понятия, определения, свойства в ходе решения задания. Задания б) обучающиеся решают самостоятельно, возможно, работая в парах. Задания в) предназначены для домашней работы. В некоторых занятиях предусмотрена рубрика «Задачи с развернутым ответом», в которой предлагаются задания повышенного уровня сложности (типа № 14 и № 17 ЕГЭ по математике профильного уровня), номера таких заданий подчеркнуты (<u>12</u>).

Для удобства все задания по курсу имеют сквозную нумерацию, после каждого задания приводится ответ. Практические работы содержат практико-ориентированные задания. Возможно проведение практических работ по группам и парам с использованием чертежных инструментов.

Проверочные работы предусмотрены в конце первого полугодия и в конце второго полугодия. Они направлены на оценивание уровня знаний и умений обучающихся на определенном этапе усвоения изучаемого материала.
Итоговое занятие курса возможно провести учителю по своему усмотрению в зависимости от результатов проверочных работ и уровня усвоенных знаний обучающихся.

В пособии для обучающегося собран краткий теоретический материал, теоретические, практические задачи базового уровня сложности по разделам. Задачи с развернутым ответом размещены в конце пособия, ответы не предусмотрены.

Рабочая программа элективного курса
«Практикум по геометрии, 10 класс»

Рабочая программа элективного курса «Практикум по геометрии» разработана в соответствии с требованиями ФГОС СОО, на основе Федеральной рабочей программы по учебному предмету «Математика» базовый уровень (ссылка https://edsoo.ru/rabochie-programmy/), с учетом федеральной программы воспитания (ссылка https://xn--80adrabb4aegksdjbafk0u.xn--p1ai/upload/medialibrary/ddc/sr3zcu3teyyu74meajjj1vzn171157v9.pdf).

Рабочая программа предназначена для обучающихся 10 классов и рассчитана на 34 часа в год.

Цель элективного курса:
создать условия для формирования устойчивых знаний обучающихся по геометрии (планиметрии и стереометрии) на базовом уровне.

Задачи элективного курса:

- повысить мотивацию обучающихся к изучению геометрии;
- создать «ситуацию успеха» у обучающихся при решении геометрических задач;
- обобщить и систематизировать геометрические знания обучающихся;
- совершенствовать практические навыки, математическую культуру обучающихся;
- уметь применять геометрический аппарат для решения разнообразных математических задач базового и повышенного уровня сложности.

1. Планируемые результаты освоения элективного курса

Изучение геометрии по данной программе способствует формированию у обучающихся личностных, метапредметных и предметных результатов обучения, соответствующих требованиям федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования и федеральной программе воспитания.

Личностные результаты:

1) гражданское воспитание: сформированность гражданской позиции обучающегося как активного и ответственного члена российского общества, представление о математических основах функционирования различных структур, явлений, процедур гражданского общества (выборы, опросы и другое);

2) патриотическое воспитание: сформированность российской гражданской идентичности, уважения к прошлому и настоящему российской

математики, ценностное отношение к достижениям российских математиков и российской математической школы;

3) духовно-нравственного воспитания: осознание духовных ценностей российского народа, сформированность нравственного сознания, связанного с практическим применением достижений науки и деятельностью учёного;

4) эстетического воспитания: эстетическое отношение к миру, включая эстетику математических закономерностей, объектов, задач, решений, рассуждений, восприимчивость к математическим аспектам различных видов искусства;

5) физического воспитания: сформированность умения применять математические знания в интересах здорового и безопасного образа жизни, ответственное отношение к своему здоровью;

6) трудового воспитания: готовность к труду, осознание ценности трудолюбия, интерес к различным сферам профессиональной деятельности, связанным с математикой, умение совершать осознанный выбор будущей профессии и реализовывать собственные жизненные планы; готовность к активному участию в решении практических задач математической направленности;

7) экологического воспитания: сформированность экологической культуры, ориентация на применение математических знаний для решения задач в области окружающей среды;

8) ценности научного познания: сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, понимание математической науки как сферы человеческой деятельности, этапов её развития и значимости для развития цивилизации, овладение языком математики и математической культурой как средством познания мира, готовность осуществлять проектную и исследовательскую деятельность индивидуально и в группе.

Метапредметные результаты:

Познавательные универсальные учебные действия.

Базовые логические действия: выявлять и характеризовать существенные признаки математических объектов, понятий, отношений между понятиями, формулировать определения понятий, устанавливать существенный признак классификации, основания для обобщения и сравнения, критерии проводимого анализа; проводить самостоятельно доказательства математических утверждений (прямые и от противного), выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры, обосновывать собственные суждения и выводы; выбирать способ решения учебной задачи.

Базовые исследовательские действия: использовать вопросы как исследовательский инструмент познания, формулировать вопросы, фиксирующие противоречие, проблему, устанавливать искомое и данное, формировать гипотезу, аргументировать свою позицию, мнение; проводить самостоятельно спланированный эксперимент, исследование по установлению особенностей математического объекта, явления, процесса, выявлению зависимостей между объектами, явлениями, процессами; самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого наблюдения, исследования, оценивать достоверность полученных результатов, выводов и обобщений; прогнозировать возможное развитие процесса, а также выдвигать предположения о его развитии в новых условиях.

Работа с информацией: выявлять дефициты информации, данных, необходимых для ответа на вопрос и для решения задачи; выбирать информацию из источников различных типов, анализировать, систематизировать и интерпретировать информацию различных видов и форм представления; структурировать информацию, представлять её в различных формах.

Коммуникативные универсальные учебные действия:

воспринимать и формулировать суждения в соответствии с условиями и целями общения, ясно, точно, грамотно выражать свою точку зрения в устных и письменных текстах, давать пояснения по ходу решения задачи, комментировать полученный результат;

сопоставлять свои суждения с суждениями других участников диалога, обнаруживать различие и сходство позиций, в корректной форме формулировать разногласия, свои возражения; представлять результаты решения задачи, эксперимента, исследования, проекта, самостоятельно выбирать формат выступления с учётом задач презентации и особенностей аудитории.

Регулятивные универсальные учебные действия

Самоорганизация: составлять план, алгоритм решения задачи, выбирать способ решения с учётом имеющихся ресурсов и собственных возможностей.

Самоконтроль, эмоциональный интеллект: владеть навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов, владеть способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи.

Совместная деятельность: понимать и использовать преимущества командной и индивидуальной работы при решении учебных задач, принимать цель совместной деятельности, планировать организацию совместной работы, распределять виды работ; участвовать в групповых формах работы, выполнять свою часть работы и координировать свои действия с другими членами команды.

Предметные результаты:

пользоваться признаками равенства треугольников, использовать признаки и свойства равнобедренных треугольников при решении задач;

распознавать основные виды четырёхугольников, их элементы, пользоваться их свойствами при решении геометрических задач;

знать тригонометрические функции острых углов;

оперировать понятиями: параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей;

классифицировать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве; оперировать понятиями: двугранный угол, грани двугранного угла, ребро двугранного угла, линейный угол двугранного угла, градусная мера двугранного угла;

оперировать понятиями: многогранник, выпуклый и невыпуклый многогранник, элементы многогранника, правильный многогранник;

распознавать основные виды многогранников (пирамида, призма, прямоугольный параллелепипед, куб);

оперировать понятиями: секущая плоскость, сечение многогранников; объяснять принципы построения сечений;

решать задачи на нахождение геометрических величин по образцам или алгоритмам, применяя известные аналитические методы при решении стандартных математических задач на вычисление расстояний между двумя точками, от точки до прямой, от точки до плоскости, между скрещивающимися прямыми; решать задачи на нахождение геометрических величин по образцам или алгоритмам;

вычислять объёмы и площади поверхностей многогранников (призма, пирамида) с применением формул, вычислять соотношения между площадями поверхностей, объёмами подобных многогранников;

применять геометрические факты для решения стереометрических задач, предполагающих несколько шагов решения;

моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин.

2. Содержание курса

Раздел 1. Повторение планиметрии (4 часа)

Треугольники. Виды треугольников. Сумма углов треугольника. Свойства углов параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции. Признаки равенства треугольников, в том числе и прямоугольных. Диагонали и высоты в параллелограмме, ромбе, прямоугольнике, квадрате, трапеции. Средняя линия трапеции. Вписанные и описанные окружности для треугольников, четырехугольников, правильных многоугольников. Тригонометрические функции острого угла в прямоугольном треугольнике. Определение синуса, косинуса, тангенса острого угла прямоугольного треугольника. Теорема Пифагора. Теорема, обратная теореме Пифагора. Значения синуса, косинуса, тангенса для углов 30^0, 45^0, 60^0. Вычисление элементов треугольников с использованием тригонометрических соотношений. Площадь параллелограмма. Площадь прямоугольника. Площадь ромба. Площадь квадрата. Площадь трапеции. Площадь треугольника. Площадь многоугольника.

Раздел 2. Прямые и плоскости в пространстве (18 часов)

Взаимное расположение прямых в пространстве: пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве: параллельные прямые в пространстве, параллельность трёх прямых, параллельность прямой и плоскости. Углы с сонаправленными сторонами, угол между прямыми в пространстве. Параллельность плоскостей: параллельные плоскости, свойства параллельных плоскостей. Простейшие пространственные фигуры на плоскости: тетраэдр, куб, параллелепипед, построение сечений. Перпендикулярность прямой и плоскости: перпендикулярные прямые в пространстве, прямые параллельные и перпендикулярные к плоскости, признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорема о прямой перпендикулярной плоскости. Углы в пространстве: угол между прямой и плоскостью, двугранный угол, линейный угол двугранного угла. Перпендикуляр и наклонные: расстояние от точки до плоскости, расстояние от прямой до плоскости, проекция фигуры на плоскость. Перпендикулярность плоскостей: признак перпендикулярности двух плоскостей. Теорема о трёх перпендикулярах.

Раздел 3. Многогранники (12 часов)

Понятие многогранника, основные элементы многогранника, выпуклые и невыпуклые многогранники, развёртка многогранника. Призма: n-угольная призма, грани и основания призмы, прямая и наклонная призмы, боковая и полная поверхность призмы. Параллелепипед, прямоугольный параллелепипед и его свойства. Пирамида: n-угольная пирамида, грани и основание пирамиды, боковая и полная поверхность пирамиды, правильная и усечённая пирамида. Элементы призмы и пирамиды. Правильные многогранники: понятие правильного многогранника, правильная призма и правильная пирамида, правильная треугольная пирамида и правильный тетраэдр, куб. Представление о правильных многогранниках: октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Сечения призмы и пирамиды. Вычисление элементов многогранников: рёбра, диагонали, углы.

Площадь боковой поверхности и полной поверхности прямой призмы, площадь оснований, теорема о боковой поверхности прямой призмы. Площадь боковой поверхности и поверхности правильной пирамиды, теорема о площади усечённой пирамиды. Понятие об объёме. Объём пирамиды, призмы. Подобные тела в пространстве. Соотношения между площадями поверхностей, объёмами подобных тел.

Тематическое (календарно-тематическое) планирование элективного курса

№ занятия	Темы	Дата (план)	Дата (факт)	Основные виды деятельности обучающихся (на уровне учебных действий)	Электронные (цифровые) образовательные ресурсы*	Материально-техническое оснащение (оборудование)**	Универсальные учебные действия (УУД), проекты, межпредметные понятия
Раздел 1. Повторение планиметрии							
1	Треугольники			Знать свойства углов в треугольниках; применять признаки равенства треугольников. Знать и применять свойства углов в параллелограмме, прямоугольнике, ромбе, квадрате, трапеции; решать задачи на вычисление, построение, связанные с этими видами четырёхугольников. Применять свойства средней линии треугольника трапеции. Применять теоремы о свойстве сторон описанного	1, 2	1, 2, 3, 4	Личностные УУД: готовность к труду, осознание ценности трудолюбия. Регулятивные УУД: составлять план, алгоритм решения задачи Познавательные УУД: устанавливать существенный признак классификации, выстраивать аргументацию, аргументировать свою позицию. Коммуникативные УУД: точно, грамотно выражать свою точку зрения в устных и письменных текстах. Межпредметные понятия: утверждение, свойства, сравнение, схема, классификация, вид, элемент
2	Пропорциональность отрезков и площадей. Подобие						
3	Четырехугольники						
4	Правильные многоугольники						

				четырёхугольника; о свойстве углов вписанного четырёхугольника. Решать задачи на вычисления, связанные с теоремой Пифагора. знать основное тригонометрическое тождество и значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45°, 60°. Уметь вычислять площади треугольников, прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции.			
Раздел 2. Прямые и плоскости в пространстве							
5	Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые в пространстве			Формулировать признак скрещивающихся прямых и применять его при решении задач. Решать практические задачи на построение сечений многогранника. Использовать признак параллельности двух плоскостей, свойства параллельных плоскостей при решении задач на построение. Находить углы между скрещивающимися	1, 2	1, 2, 5, 6, 8	Личностные УУД: эстетическое отношение к миру, включая эстетику математических закономерностей, объектов, задач. Регулятивные УУД: выбирать способ решения с учётом имеющихся ресурсов, владеть способами самопроверки, планировать организацию совместной работы. Познавательные УУД: проводить самостоятельно доказательства
6	Параллельность прямой и плоскости						
7	Параллельность плоскостей						
8	Параллельность плоскостей						
9	Прямоугольный параллелепипед						
10	Тетраэдр						
11	Практическая работа. Построение сечений многогранников						
12	Перпендикулярность прямой и плоскости						
13	Перпендикулярность прямой и плоскости						
14	Углы между прямой и плоскостью						
15	Углы между прямой и плоскостью						
16	Проверочная работа						
17	Перпендикуляр и наклонная к плоскости						

18	Перпендикуляр и наклонная к плоскости			прямыми в кубе и пирамиде. Решать задачи на вычисления, связанные с перпендикулярностью прямой и плоскости, с использованием при решении планиметрических фактов и методов. Находить угол между прямой и плоскостью в многограннике, расстояние от точки до прямой на плоскости, используя теорему о трёх перпендикулярах.			математических утверждений, формировать гипотезу, выбирать информацию из источников различных типов, Коммуникативные УУД: представлять результаты решения задачи Межпредметные понятия: расстояние, свойства, схема, аналогия, классификация, теорема
19	Двугранный угол, линейный угол двугранного угла						
20	Двугранный угол, линейный угол двугранного угла						
21	Перпендикулярность плоскостей						
22	Теорема о трех перпендикулярах						
Раздел 3. Многогранники							
23	Многогранники. Призма			Находить площадь полной и боковой поверхности пирамиды. Решать задачи на вычисление, связанные с пирамидами, а также задачи на построение сечений. Изображать призмы на чертеже. Находить площадь полной или боковой поверхности призмы. Вычислять объём призмы и пирамиды по их элементам. Применять объём для	1, 2	1, 2, 3, 4, 8, 9	Личностные УУД: интерес к различным сферам профессиональной деятельности, связанным с математикой. Регулятивные УУД: составлять план, алгоритм решения задачи, владеть способами самоконтроля процесса и результата решения математической задачи, участвовать в групповых формах работы. Познавательные УУД: обосновывать собственные суждения и выводы,
24	Многогранники. Призма						
25	Многогранники. Пирамида						
26	Многогранники. Пирамида						
27	Практическая работа. «Развертки многогранников»						
28	Объемы многогранников. Призма						
29	Объемы многогранников. Призма						
30	Объемы многогранников. Пирамида						
31	Объемы многогранников. Пирамида						
32	Подобные тела в пространстве						
33	Проверочная работа						
34	Итоговое занятие по обобщению и систематизации знаний за курс						

				решения стереометрических задач и для нахождения геометрических величин.			формулировать обобщения и выводы, анализировать, систематизировать и интерпретировать информацию различных видов и форм представления Коммуникативные УУД: сопоставлять свои суждения с суждениями других участников диалога. Межпредметные понятия: сравнение, схема, площадь, формула, аналогия, классификация, задача, соотношение
	Итого	**34**					проверочные работы – 2 практические работы - 2

*Электронные образовательные ресурсы (ЭОР).
1. Открытый банк заданий ЕГЭ. Математика. Базовый уровень https://ege.fipi.ru/bank/index.php?proj=E040A72A1A3DABA14C90C97E0B6EE7DC
2. Открытый банк заданий ЕГЭ. Математика. Профильный уровень https://ege.fipi.ru/bank/index.php?proj=AC437B34557F88EA4115D2F374B0A07B

**Материально-техническое оснащение (оборудование)
1. Учебное пособие для обучающихся «Практикум по геометрии, 10 класс», ГБОУ ИРО Краснодарского края, 2024.
2. Учебно-методическое пособие для учителя «Реализация элективного курса «Практикум по геометрии», 10 класс», ГБОУ ИРО Краснодарского края, 2024.
3. Классный набор чертежных инструментов (линейка классная, угольник классный, циркуль классный, транспортир классный)
4. Доска магнитно-маркерная или меловая.

5. Проектор мультимедийный с креплением
6. Компьютер (ноутбук) педагога.
7. Компьютер (ноутбук) обучающегося.
8. Интерактивная доска (при наличии в ОО).
9. Индивидуальный набор чертежных инструментов обучающегося (линейка, угольник, транспортир).

Раздел 1. Повторение планиметрии

Занятие 1. Треугольники

Повторяем теорию

Треугольник – фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки.

Теорема об углах треугольника: сумма углов треугольника равна 180^0.

Внешний угол треугольника: это угол, смежный с любым углом треугольника.

Свойство: внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

Неравенство треугольника: любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон и больше их разности.

Треугольник, все три стороны которого равны, называется *правильным* (*равносторонним*) треугольником (Рис.1).

Пусть a, h, S, R, r – соответственно длина стороны, высота, площадь, радиус описанной и радиус вписанной окружности правильного треугольника. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, R = \frac{a}{\sqrt{3}},$$
$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}, r = \frac{1}{3}h, R = \frac{2}{3}h,$$
$$R = 2r, r + R = h$$

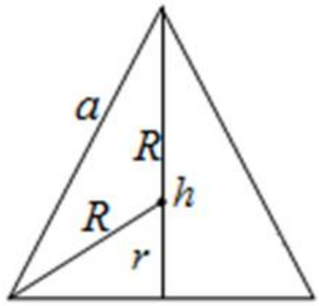


Рис.1

Треугольник называется *равнобедренным*, если две его стороны равны. Равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона – *основанием* равнобедренного треугольника. Высота, медиана и биссектриса равнобедренного треугольника, проведенные к его основанию, совпадают. Углы при основании равнобедренного треугольника равны. Высоты (медианы, биссектрисы), проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника равны.

Если один из углов треугольника прямой, то треугольник называется *прямоугольным* (Рис. 2). В прямоугольном треугольнике сторона, лежащая против прямого угла, называется *гипотенузой*, а две другие стороны называются *катетами* этого треугольника.

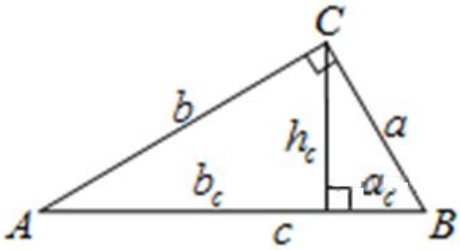


Рис. 2

Свойства прямоугольного треугольника

1) сумма острых углов равна 90^0;

2) катет, лежащий против угла в 30^0, равен половине гипотенузы;

3) если катет равен половине гипотенузы, то он лежит напротив угла в 30^0;

4) медиана, проведенная к гипотенузе равна ее половине.

Обозначим через c гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC, через a_c и b_c – проекции катетов a и b на гипотенузу AB, а через h_c – высоту, проведенную из вершины прямого угла C этого треугольника. Тогда имеют место следующие соотношения:

$a^2 = c \cdot a_c$ (катет равен среднему геометрическому гипотенузы и своей проекции на неё).

$b^2 = c \cdot b_c$ (катет равен среднему геометрическому гипотенузы и своей проекции на неё).

$h_c^2 = a_c \cdot b_c$ (высота, проведенная к гипотенузе, равна среднему геометрическому проекций катетов на гипотенузу).

$$a^2 + b^2 = c^2,\ h_c = \frac{ab}{c},\ \sin A = \frac{a}{c},\ \cos A = \frac{b}{c},\ tgA = \frac{a}{b},\ ctgA = \frac{b}{a}.$$

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется *средней линией* треугольника.

Средняя линия треугольника параллельна одной из сторон треугольника и равна ее половине. Средняя линия отсекает треугольник, который подобен данному, а его площадь равна одной четвёртой площади исходного треугольника. Три средние линии треугольника делят его на 4 равных треугольника (Рис. 3).

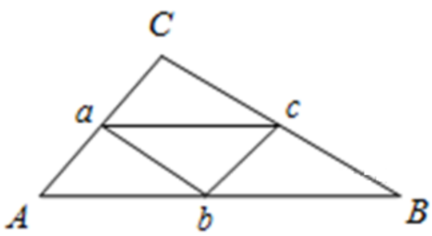


Рис. 3

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется *медианой* треугольника. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, и точка пересечения делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины. Медиана разбивает треугольник на два треугольника одинаковой площади.

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется *биссектрисой* треугольника. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (*центре вписанной окружности*). Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника. Биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника перпендикулярны. От любой точки, лежащей на биссектрисе угла, расстояния до сторон угла равны.

Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника, на прямую, содержащую противоположную сторону, называется *высотой* треугольника (Рис. 4). Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

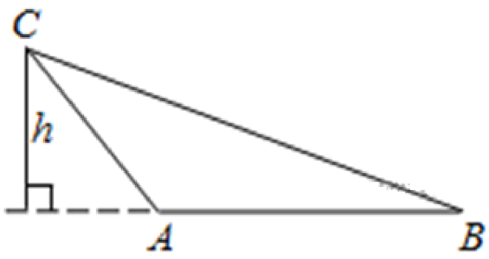


Рис. 4

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (*центре описанной окружности*).

Теорема косинусов: квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, уменьшенной на удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Теорема синусов: если в треугольнике против сторон *a, b, c* лежат углы α, β, γ соответственно, то $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, где R – радиус окружности, описанной около треугольника.

Проверяем себя

Т1. Какие из перечисленных утверждений всегда верны:

1) Все углы треугольника острые.

2) Все высоты равностороннего треугольника равны.

3) Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен половине гипотенузы.

4) Гипотенуза меньше любого из катетов.

5) Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90^0.

6) В прямоугольном треугольнике против угла в 60^0 лежит катет, равный половине гипотенузы.

7) Точка пересечения медиан лежит внутри треугольника.

8) В треугольнике квадрат любой стороны равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

9) Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

10) Внешний угол треугольника равен углу этого треугольника, смежного с ним.

Ответ: 2); 5); 7); 8); 9).

Т2. Укажите неверные утверждения:

1) Любая биссектриса равнобедренного треугольника является его медианой.

2) Центры вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника совпадают.

3) В тупоугольном треугольнике все углы тупые.

4) Сумма углов любого треугольника равна 180°.

5) Треугольника со сторонами 1, 2, 4 не существует.

6) Медианой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.

7) Около всякого треугольника можно описать не более одной окружности.

8) В любой треугольник можно вписать не менее одной окружности.

Ответ: 1), 3), 6).

Т3. Заполните пропуски:

а) Если две стороны треугольника равны, то его называют ________________ треугольником.

Ответ: равнобедренным.

б) В разностороннем треугольнике все три стороны имеют _____ длину.

Ответ: разную.

в) Треугольник называют прямоугольным, если один из углов треугольника _________________.

Ответ: равен 90^0.

г) В равностороннем треугольнике все углы _______________

Ответ: равны по 60^0.

д) Чтобы вычислить периметр треугольника, нужно ___________________.

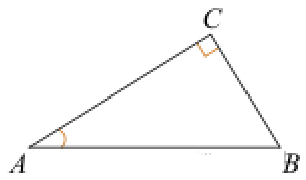
Ответ: найти сумму длин его сторон

е) Периметр ___ треугольника вычисляется по формуле $P=3a$, где a – __.

Ответ: равностороннего, длина стороны

Решаем задачи

1. а) В треугольнике ABC угол C равен 90^0, AC=4,8; $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите AB.

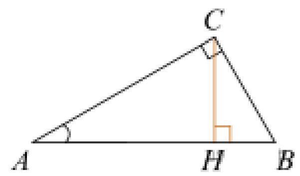


б) В треугольнике ABC угол C равен 90^0, AC= 4, $cosA$=0,5. Найдите AB.

в) В треугольнике ABC угол C равен 90^0, AC=8, tgA=0,5. Найдите BC.

Ответ: а) 5; б) 8; в) 4.

2. а) В треугольнике ABC угол C равен 90^0, CH – высота, AB=13, tgA=5. Найдите BH.

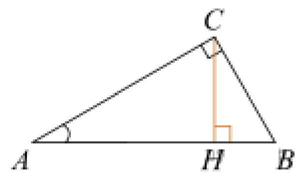


б) В треугольнике ABC угол C равен 90^0, CH – высота, BC=8, $sinA$=0,5. Найдите BH.

в) В треугольнике ABC угол C равен 90^0, BC=8, $cosA$=0,5. Найдите CH.

Ответ: а) 12,5; б) 4; в)4.

3.а) В треугольнике ABC угол C равен 90^0, высота CH равна 4, $BC = \sqrt{17}$. Найдите tgA.

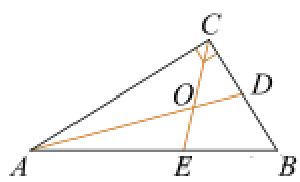


б) В треугольнике ABC угол C равен 90^0, высота CH равна 24, BH=7. Найдите $sinA$.

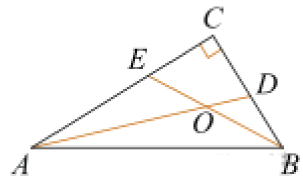
в) В треугольнике ABC угол C равен 90°, высота CH равна 7, BH=24. Найдите $cosA$.

Ответ: а) 0,25; б) 0,28; в) 0,28.

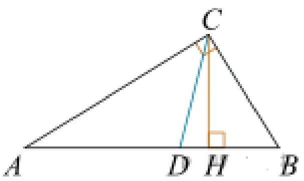
4. а) Острый угол прямоугольного треугольника равен 32°. Найдите острый угол, образованный биссектрисами этого и прямого углов треугольника. Ответ дайте в градусах.



б) Найдите острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.



в) Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен 61^0. Найдите угол между высотой CH и биссектрисой CD, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

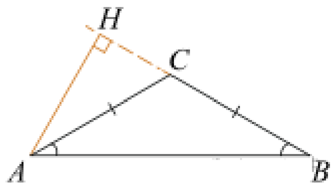


Ответ: а) 61; б) 45; в)16.

5. а) В тупоугольном треугольнике ABC $AC=BC=8$, высота AH равна 4. Найдите $\sin ACB$.

б) В тупоугольном треугольнике ABC $AC=BC=25$, высота AH равна 20. Найдите $\cos ACB$.

в) В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC = 4\sqrt{5}$, высота AH равна 4. Найдите $\operatorname{tg} ACB$.



Ответ: а) 0,5; б) -0,6; в) -,05.

6. а) В треугольнике ABC $AC=BC$, угол C равен 52^0. Найдите внешний угол CBD. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 116^0.

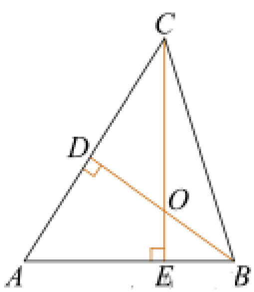
б) В треугольнике ABC $AC=BC$. Внешний угол при вершине B равен 122^0. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 64^0.

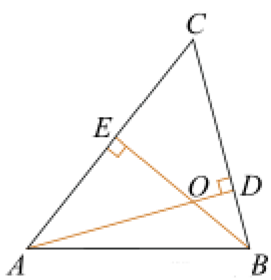
в) В треугольнике ABC $AB=BC$. Внешний угол при вершине B равен 138^0. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 69^0.

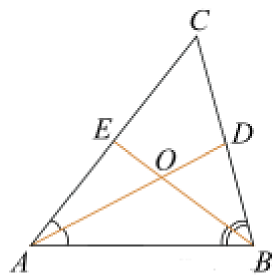
7. а) В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 65^0. BD и CE – высоты, пересекающиеся в точке O. Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах.



б) Два угла треугольника равны 58^0 и 72^0. Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.



в) В треугольнике ABC угол C равен 58^0, AD и BE – биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



Ответ: а) 115^0; б) 130^0; в) 119^0.

<u>Задачи с развернутым ответом</u>

<u>8.</u> В равнобедренном треугольнике ABC с углом 120^0 при вершине A проведена биссектриса BD. В треугольник ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона FH лежит на отрезке BC, а вершина E – на отрезке AB.

а) Докажите, что $FH=2DH$.

б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB=4$.

Ответ: $24-12\sqrt{3}$.

Занятие 2. Пропорциональность отрезков и площадей. Подобие

Повторяем теорию

Отношением отрезков AB и CD называется отношение их длин.

Говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, если выполняется равенство $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$.

Два треугольника называются *подобными*, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, если:

1) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$;

2) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$.

Число k – коэффициент подобия (показывает во сколько раз стороны одного треугольника больше сторон другого треугольника)

Признаки подобия треугольников:

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.
2. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между ними равны, то такие треугольники подобны.
3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Отношение отрезков и площадей в треугольнике:

- Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.
- Периметры подобных треугольников и их линейные величины (медианы, биссектрисы, высоты) относятся друг к другу как коэффициент подобия k.
- Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.
- Три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.
- Параллельные прямые отсекают на сторонах угла (на двух прямых) пропорциональные отрезки (обобщенная теорема Фалеса).
- Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.
- Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату

коэффициента подобия.

- Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.
- Площади треугольников, имеющих равные основания и равные высоты, равны.
- Отношение площадей треугольников, имеющих равные высоты равно отношению их оснований.

Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам a:c=b:d (Рис. 5).

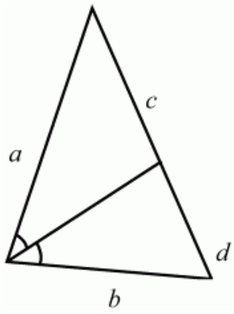


Рис. 5

Точка пересечения биссектрис делит биссектрису угла C в отношении $\frac{a+b}{c}$ (Рис. 6).

$$\frac{CO}{OD} = \frac{a+b}{c}$$

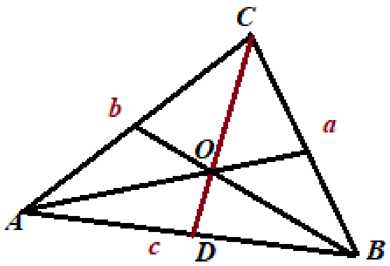


Рис. 6

Теорема о пропорциональных отрезках

Параллельные прямые отсекают на секущих пропорциональные отрезки (Рис. 7).

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_1A_3}{B_1B_3}.$$

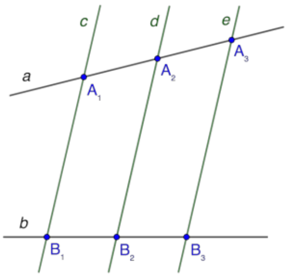


Рис. 7

Теорема Менелая

Пусть точка A_1 лежит на стороне BC треугольника ABC, точка C_1 – на стороне AB, точка B_1 – на продолжении стороны AC за точку C (Рис. 8). Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

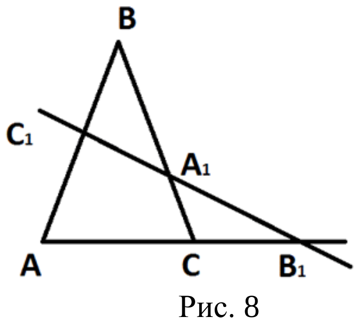


Рис. 8

Теорема Чевы

Пусть в треугольнике ABC точка A_1 лежит на стороне BC, точка B_1 – на стороне AC, точка C_1 – на стороне AB (Рис. 9). Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.$$

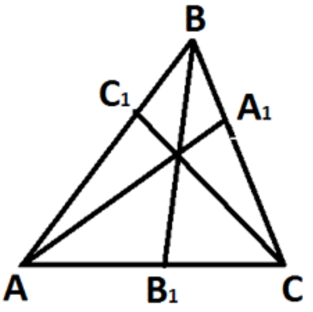


Рис. 9

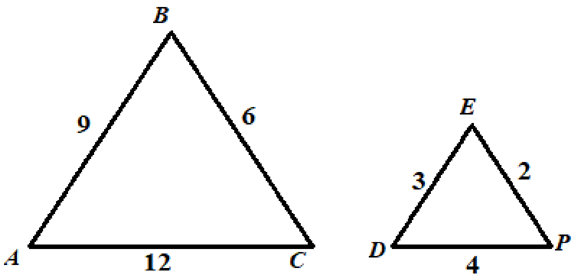
<u>Проверяем себя</u>

Т4. Установите соответствие между понятиями и определениями.

А. Медиана треугольника		1. Это луч, выходящий из вершины угла и делящий его пополам.
Б. Биссектриса угла		2. Это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.
В. Высота треугольника		3. Это отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной стороне.
		4. Это перпендикуляр, опущенный из вершины угла на прямую, содержащую противоположную сторону.

Ответ: А-2, Б-1, В-4.

Т5. Установите по рисунку, верно ли данное утверждение: $\Delta ABC \sim \Delta DEP$



Ответ: да.

Т6. Укажите условия, при которых ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ были бы подобны по третьему признаку:

а) $\angle A = \angle A_1; \angle B = \angle B_1$; в) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$;

б) $\angle A = \angle A_1; \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$; г) $\angle C = \angle C_1; \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.

Ответ: в).

Т7. У треугольников ABC и DEF равны углы A и D. Какого условия не достает для того, чтобы утверждать, что эти треугольники подобны по первому признаку:

а) $\angle C = \angle F; \angle B = \angle E$; б) $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$;

в) $\angle B = \angle E$; г) $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$.

Ответ: в).

Т8. В треугольниках ABC и MNK $\angle A = 50^0, \angle B = 70^0, \angle C = 60^0, \angle M = 70^0, \angle K = 60^0$. Чему равен угол N?

а)50^0; б)60^0; в)70^0.

Ответ: а).

Т9. Средняя линия треугольника ______________________ одной из его сторон и равна __________________________.

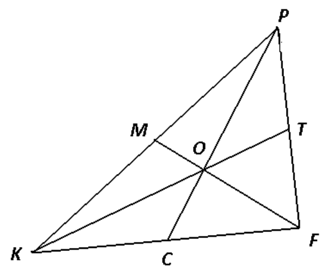
Ответ: параллельна; ее половине.

Т10. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении __________________, считая от ______________.

Ответ: 2:1 считая от вершины.

Решаем задачи

9. а) Дан треугольник KPF, в котором KT, PC и FM – медианы. Найдите CO, если OP=10 см.



Ответ:5.

б) Дан треугольник KPF, в котором KT, PC и FM – медианы. Найдите MO, если $OF=8$ см.

Ответ: 4.

в) Дан треугольник KPF, в котором KT, PC и FM – медианы. Найдите TO, если $OK=6$ см.

Ответ:3.

10. а) На стороне BC треугольника ABC отмечена точка M так, что $BM:MC=3:10$. В каком отношении отрезок AM делит медиану BK треугольника ABC?

Ответ: 3:5.

б) На стороне AB треугольника ABC отмечена точка M так, что $AM:MB=4:3$. В каком отношении медиана BK делится отрезком CM?

Ответ: 3:2.

в) На стороне AB треугольника ABC отмечена точка M так, что $AM:MB=4:3$. В каком отношении медиана BK делит отрезок CM?

Ответ: 7:3.

11. а) Основания трапеции равны 12 см и 22 см. найдите отрезки, на которые диагонали трапеции делят её среднюю линию.

Ответ: 6; 5; 6.

б) Основания трапеции равны 18 см и 26 см. найдите отрезки, на которые диагонали трапеции делят её среднюю линию.

Ответ: 9; 4; 9.

в) Основания трапеции равны 15 см и 27 см. найдите отрезки, на которые диагонали трапеции делят её среднюю линию.

Ответ: 7,5; 6; 7,5.

12. а) Биссектриса BD делит сторону AC треугольника ABC на отрезки $AD=7$ см и $CD=10,5$ см, $AB=9$ см. Чему равен периметр треугольника ABC?

Ответ: 40.

б) Биссектриса BD делит сторону AC треугольника ABC на отрезки $AD=8$ см и $CD=12$ см, $AB=10$ см. Чему равен периметр треугольника ABC?

Ответ: 45.

в) Биссектриса BD делит сторону AC треугольника ABC на отрезки $AD=6$ см и $CD=9$ см, $AB=8$ см. Чему равен периметр треугольника ABC?

Ответ: 35.

13. а) Периметр треугольника равен 70 см, две его стороны равны 24 см и 32 см. Найдите отрезки, на которые биссектриса треугольника делит его третью сторону.

Ответ: 6 и 8.

б) Периметр треугольника равен 35 см, две его стороны равны 12 см и 16см. Найдите отрезки, на которые биссектриса треугольника делит его третью сторону.

Ответ: 3 и 4.

в) Периметр треугольника равен 40 см, две его стороны равны 15 см и 9см. Найдите отрезки, на которые биссектриса треугольника делит его третью сторону.

Ответ: 6 и 10.

14. а) В треугольнике ABC на стороне BC взята точка N так, что $NC=3BN$; на продолжении стороны AC за точку А взята точка M так, что $MA=AC$. Прямая MN пересекает сторону AB в точке F. Найдите отношение $\frac{BF}{FA}$.

Ответ: $2{:}3$.

б) На стороне PQ треугольника PQR взята точка N, а на стороне PR – точка L, причем $NQ=LR$. Точка пересечения отрезков QL и NR делит QL в отношении $m{:}n$, считая от точки Q. Найдите $\frac{PN}{PR}$.

Ответ: $n{:}m$.

в) В треугольнике ABC AD – медиана, точка O – середина медианы. Прямая BO пересекает сторону AC в точке K. В каком отношении точка K делит AC, считая от точки A?

Ответ: 1:2.

<u>Задачи с развернутым ответом</u>

<u>15.</u> В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K так, что $AK{:}BK=1{:}3$, а на стороне BC – точка L так, что $CL{:}BL=2{:}1$. Пусть Q – точка пересечения прямых AL и CK. Найти площадь треугольника ABC, если площадь треугольника BQC равна 2.

Ответ: 3.

<u>16.</u> В треугольнике ABC, площадь которого равна 5, на стороне AB взята точка K, делящая эту сторону в отношении $AK{:}BK=2{:}3$, а на стороне AC – точка L, делящая её в отношении $AL{:}AC=5{:}8$. Точка Q пересечения прямых CK и BL удалена от прямой AB на расстояние 1. Найти длину стороны AB.

Ответ: 5.

Занятие 3. Четырехугольники

Повторяем теорию

Четырехугольник – плоская фигура, ограниченная четырехзвенной простой замкнутой ломаной.

Выпуклый четырехугольник – четырехугольник, который лежит по одну сторону от прямой, содержащий любую из его сторон.

Невыпуклый четырехугольник – четырехугольник, который не лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащий хотя бы одну из его сторон.

Четырехугольники можно структурировать по их свойствам (Рис. 10).

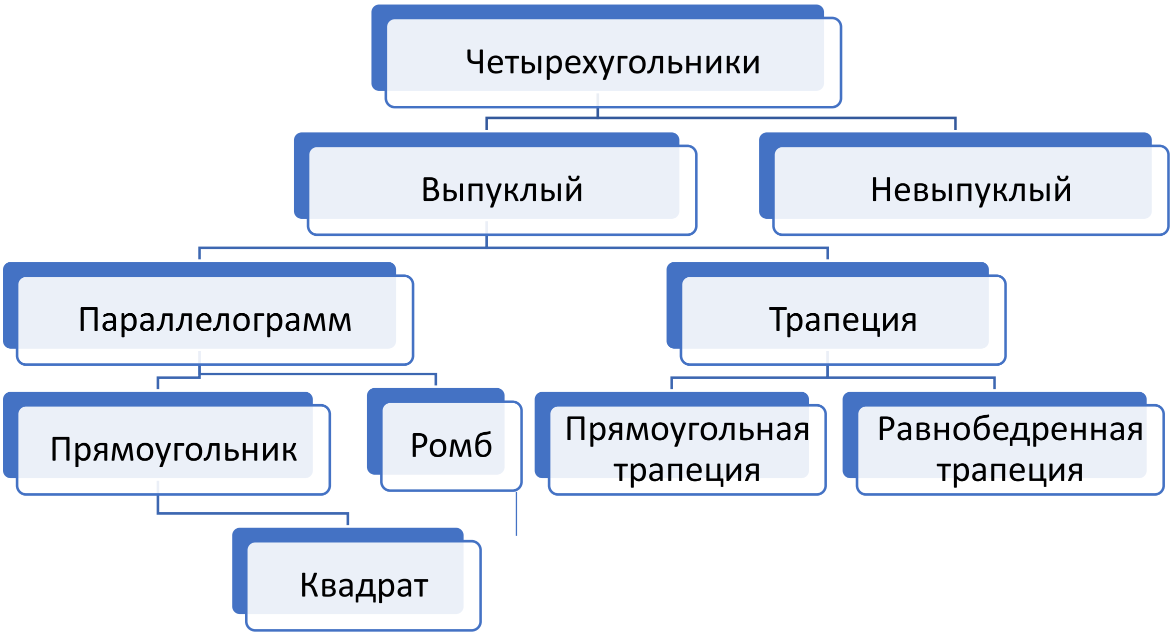


Рис. 10

Параллелограмм – это четырёхугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны

Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые.

Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Квадрат – это параллелограмм, у которого все углы прямые и все стороны равны.

Трапеция – это четырёхугольник, у которого две стороны параллельны (основания), а две другие стороны не параллельны (боковые стороны).

Равнобедренной называют трапецию, у которой боковые стороны равны.

Прямоугольной называют трапецию, у которой одна из боковых сторон перпендикулярна основаниям.

У выпуклого четырехугольника две диагонали, а сумма внутренних углов равна 360^0.

Полезные свойства параллелограмма:

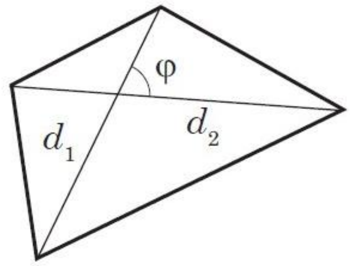
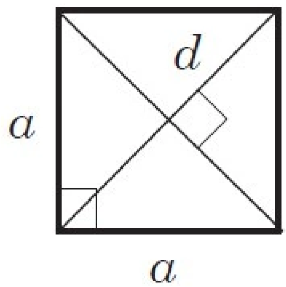
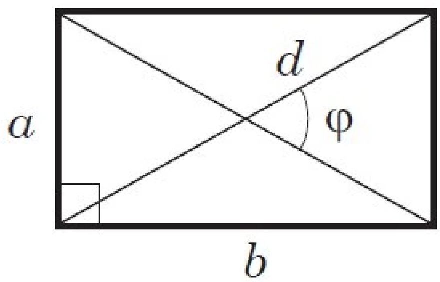
1. Противоположные углы равны.
2. Сумма углов, прилежащих к одной стороне равна 180°
3. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
4. Биссектрисы соседних углов взаимно перпендикулярны.
5. Биссектриса угла отсекает на противоположной стороне отрезок, равный прилежащей стороне.

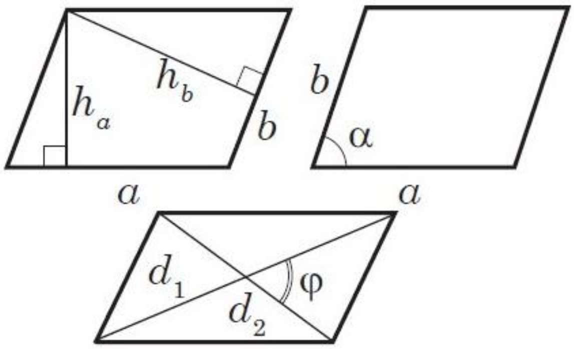
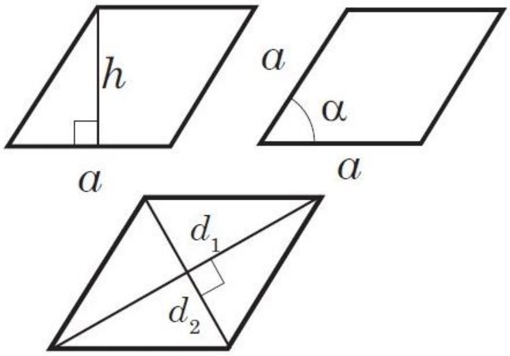
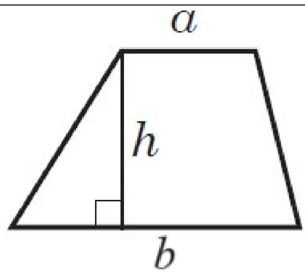
Полезные свойства равнобедренной трапеции:

1. Углы при основаниях равны.
2. Диагонали равны.
3. Если диагонали взаимно перпендикулярны, то высота равна полусумме оснований и равна ее средней линии.

Формулы площадей основных четырехугольников даны в таблице 1.

Таблица 1.

Формулы площадей четырехугольников	
Площадь любого *выпуклого четырёхугольника* равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$	
Площадь квадрата $S=a^2$ $S=\frac{d^2}{2}$	
Площадь прямоугольника $S=ab$ $S=\frac{1}{2}d^2\sin\varphi$	

Площадь параллелограмма $S = ah_a = bh_b$ $S = ab\sin\alpha$ $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$	
Площадь ромба $S = ah$ $S = a^2 \sin\alpha$ $S = \frac{1}{2}d_1 d_2$	
Площадь трапеции $S = \frac{a+b}{2}h$	

Проверяем себя

Т11. Заполните пропуски:

а) Площадь любого выпуклого четырёхугольника равна ___________ произведения диагоналей на синус угла между ними.

Ответ: половине.

б) Четырехугольник имеет сумму внутренних углов равную ______, имеет две диагонали.

Ответ: 360^0.

Т12. Укажите верные утверждения:

а) в параллелограмме все углы острые;

б) диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам;

в) биссектрисы соседних углов параллелограмма взаимно перпендикулярны

Ответ: б), в).

Т13. Укажите неверные утверждения:

а) в любой трапеции углы при основаниях раны;

б) в равнобедренной трапеции диагонали равны;

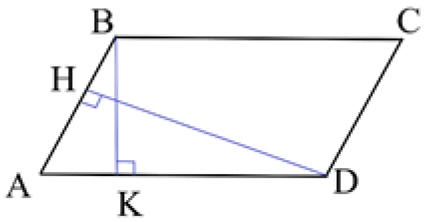
в) если диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, то высота равна сумме оснований этой трапеции.

Ответ: а), в).

Решаем задачи

17. а) В параллелограмме *ABCD* *AB*=9, *AD*=3, $\sin A = \frac{2}{3}$. Найдите большую высоту параллелограмма.

Ответ: 6.



б) В параллелограмме *ABCD* *AB*=5, *AD*=7, $\sin A = \frac{5}{7}$. Найдите большую высоту параллелограмма.

*Ответ: 5.*в) В параллелограмме *ABCD* *AB*=2, *AD*=3, $\sin A = \frac{1}{3}$ Найдите большую высоту параллелограмма.

Ответ: 1.

18. а) Периметр прямоугольника равен 42, а площадь 90. Найдите большую сторону прямоугольника.

Ответ: 15.

б) Периметр прямоугольника равен 46, а площадь 126. Найдите большую сторону прямоугольника.

Ответ: 14.

в) Периметр прямоугольника равен 48, а площадь 108. Найдите большую сторону прямоугольника.

Ответ: 18.

19. а) Периметр прямоугольника равен 28, а диагональ равна 13. Найдите площадь этого прямоугольника.

Ответ: 13,5.

б) Периметр прямоугольника равен 84, а диагональ равна 41. Найдите площадь этого прямоугольника.

Ответ: 41,5.

в) Периметр прямоугольника равен 22, а диагональ равна 10. Найдите площадь этого прямоугольника.

Ответ: 10,5.

20. а) Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 18.

Ответ: 162.

б) Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 12.

Ответ: 72.

в) Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 24.

Ответ: 288.

21. а) Площадь ромба равна 42. Одна из его диагоналей равна 6. Найдите другую диагональ.

Ответ: 14.

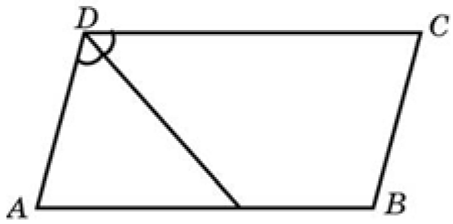
б) Площадь ромба равна 56. Одна из его диагоналей равна 16. Найдите другую диагональ.

Ответ: 7.

в) Площадь ромба равна 38. Одна из его диагоналей равна 4. Найдите другую диагональ.

Ответ: 19.

22. а) Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 2:7, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 44.



Ответ: 18.

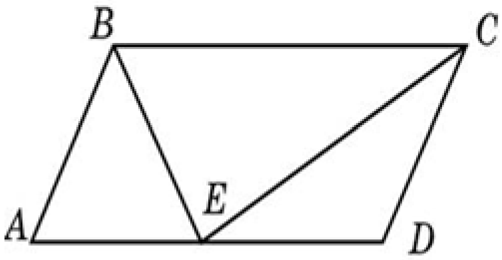
б) Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 1:3, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 40.

Ответ: 16.

в) Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 5:8, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 126.

Ответ: 45,5.

23. а) Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 14. Найдите его большую сторону.



Ответ: 28.

б) Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 29. Найдите его большую сторону.

Ответ: 58.

в) Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 31. Найдите его большую сторону.

Ответ: 62.

24. а) Основания равнобедренной трапеции равны 12 и 24, а ее периметр равен 56. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 144.

б) Основания равнобедренной трапеции равны 17 и 23, а ее периметр равен 50. Найдите площадь трапеции.

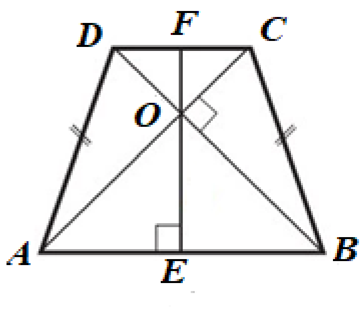
Ответ: 80.

в) Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 20, а ее периметр равен 44. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 68.

25. а) В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 18. Найдите ее среднюю линию.

Ответ: 18.



б) В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 21. Найдите ее среднюю линию.

Ответ: 21.

в) В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 26. Найдите ее среднюю линию.

Ответ: 26.

Занятие 4. Правильные многоугольники

Повторяем теорию

Правильный многоугольник – это многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.

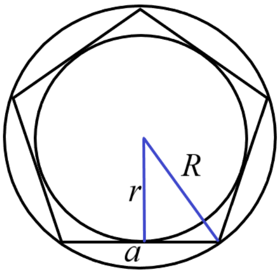
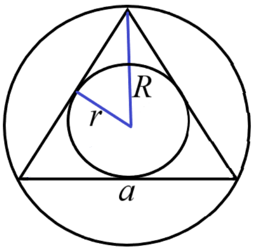
Сумма углов правильного n – угольника равна $(n\text{-}2)\cdot 180^0$.

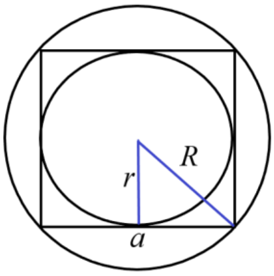
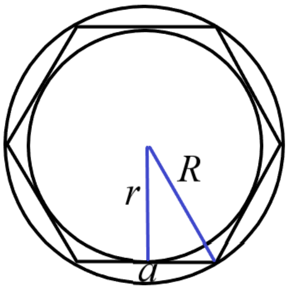
Каждый угол правильного многоугольника равен $\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}$, где n – число сторон (вершин) правильного многоугольника.

Любой правильный многоугольник можно *вписать в окружность* и вокруг любого правильного многоугольника можно *описать окружность*. Вписанная окружность касается всех сторон правильного многоугольника. Описанная окружность проходит через все вершины правильного многоугольника. Центры вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника совпадают. Эту точку называют *центром* правильного многоугольника.

Основные формулы для правильных многоугольников даны в таблице 2.

Таблица 2.

	Правильный многоугольник (n – угольник) $P = na$ $S = \frac{1}{2}P\cdot r$ $a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n}$ $r = R\cos\frac{180^0}{n}$
	Правильный треугольник $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, r = \frac{1}{3}h, R = \frac{2}{3}h$

	Правильный четырехугольник (квадрат) $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ $r = \frac{a}{2}$ $S = a^2$
	Правильный шестиугольник $R = a$ $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$

R – радиус описанной окружности;

r – радиус вписанной окружности;

a_n – сторона правильного многоугольника;

S_n – площадь n-угольника;

P_n – периметр n-угольника.

<u>Проверяем себя</u>

Т14. Заполните пропуски:

а) Многоугольник, у которого равны все стороны и все углы называется ___________

Ответ: правильным

б) Сумма углов правильного пятиугольника равна ______

Ответ: 540^0.

Т15. Укажите верные утверждения:

а) в правильном треугольнике все углы по 60^0;

б) центры вписанной и описанной окружностей любого многоугольника совпадают;

в) все высоты (биссектрисы, медианы) правильного треугольника равны и точкой пересечения O делятся в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

Ответ: а), в).

Т16. Укажите неверные утверждения:

а) ромб является правильным четырехугольником;

б) центром окружности, описанной около квадрата, является точка пересечения его диагоналей;

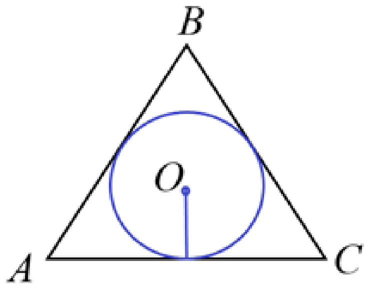
в) любой правильный многоугольник можно вписать в окружность и вокруг любого правильного многоугольника можно описать окружность.

Ответ: а).

Решаем задачи

26. а) Сторона правильного треугольника равна $8\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Ответ: 4.



б) Сторона правильного треугольника равна $38\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

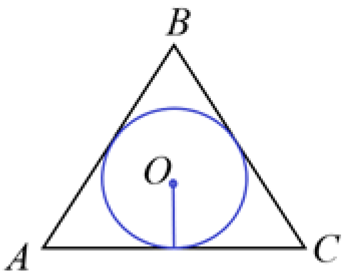
Ответ: 19.

в) Сторона правильного треугольника равна $16\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Ответ: 8.

27. а) Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 39.

Ответ: 13.



б) Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 45.

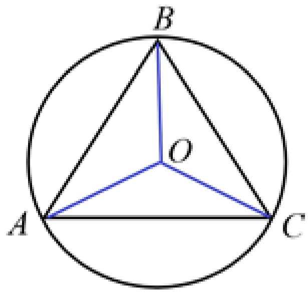
Ответ: 15.

в) Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 84.

Ответ: 28.

28. а) Сторона правильного треугольника равна $17\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: 17.



б) Сторона правильного треугольника равна $41\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

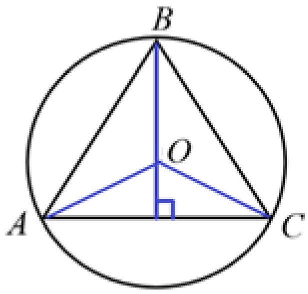
Ответ: 41.

в) Сторона правильного треугольника равна $29\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: 29.

29. а) Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 82. Найдите высоту этого треугольника.

Ответ: 123.



б) Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 76. Найдите высоту этого треугольника.

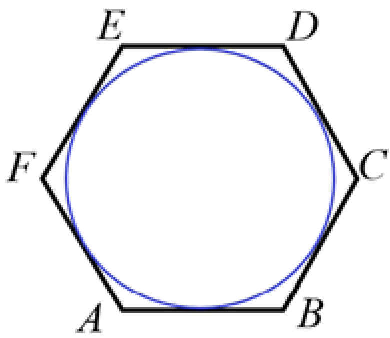
Ответ: 114.

в) Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 54. Найдите высоту этого треугольника.

Ответ: 81.

30. а) Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $17\sqrt{3}$.

Ответ: 34.



б) Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $23\sqrt{3}$.

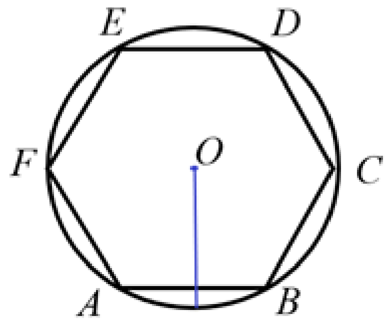
Ответ: 46.

в) Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $14\sqrt{3}$.

Ответ: 28.

31. а) Чему равна сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 12?

Ответ: 12.



б) Чему равна сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 19?

Ответ: 19.

в) Чему равна сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 17?

Ответ: 17.

32. а) Угол между двумя соседними сторонами правильного многоугольника, вписанного в окружность, равен 140°. Найдите число вершин многоугольника.

Ответ: 9.

б) Угол между двумя соседними сторонами правильного многоугольника, вписанного в окружность, равен 108°. Найдите число вершин многоугольника.

Ответ: 5.

в) Угол между двумя соседними сторонами правильного многоугольника, вписанного в окружность, равен 135°. Найдите число вершин многоугольника.

Ответ: 8.

33. а) Периметр правильного треугольника равен 36. Найдите его площадь.

Ответ: $36\sqrt{3}$.

б) Периметр правильного треугольника равен 180. Найдите его площадь.

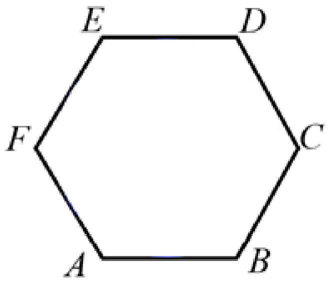
Ответ: $900\sqrt{3}$.

в) Периметр правильного треугольника равен 72. Найдите его площадь.

Ответ: $144\sqrt{3}$.

34. а) Сторона правильного шестиугольника *ABCDEF* равна 6. Найдите его площадь.

Ответ: $54\sqrt{3}$.



б) Сторона правильного шестиугольника *ABCDEF* равна 4. Найдите его площадь.

Ответ: $24\sqrt{3}$.

в) Сторона правильного шестиугольника *ABCDEF* равна 8. Найдите его площадь.

Ответ: $96\sqrt{3}$.

Раздел 2. Прямые и плоскости в пространстве

Занятие 5. Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые в пространстве

<u>Повторяем теорию</u>

Прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются (Рис. 11).

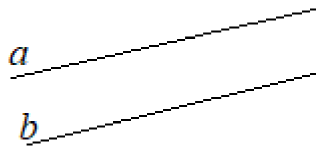


Рис. 11

Прямые на плоскости называются *пересекающимися*, если у них одна общая точка (Рис. 12).

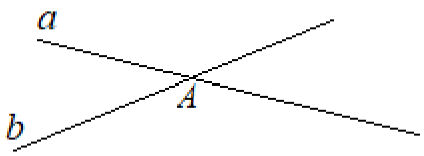


Рис. 12

Прямые на плоскости называются *совпадающими*, если у них бесконечное множество общих точек (Рис. 13).

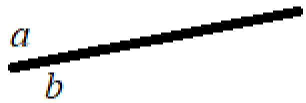
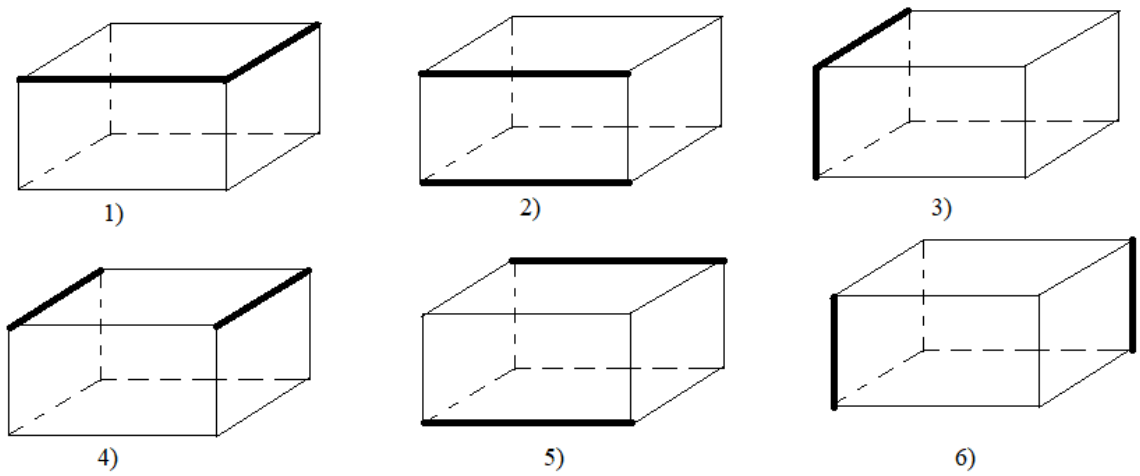


Рис. 13

<u>Проверяем себя</u>

Т17. а) Назовите параллельные прямые на окружающих предметах.
б) Назовите пересекающиеся прямые на окружающих предметах.

Т18. Задание по чертежу.



а) Назовите номера рисунков с пересекающимися прямыми.

Ответ: а) 1); 3).

б) Назовите номера рисунков с параллельными прямыми. Лежат ли эти прямые в разных плоскостях?

Ответ: б) 2);4); 5); 6).

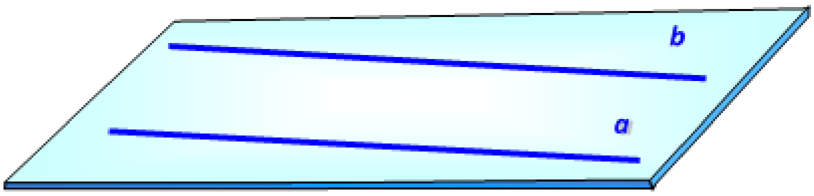
Т19. а) Можно ли утверждать, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую? (Перефразируйте задачу: если одна из параллельных прямых пересекает некоторую прямую, пересекает ли эту прямую вторая из параллельных прямых?)

Ответ: да.

б) Можно ли утверждать, что прямые, пересекающие каждую из двух параллельных прямых, лежат в плоскости данных прямых?

Ответ: да, по аксиоме принадлежности прямой плоскости.

<u>Повторяем теорию (продолжение)</u>

Планиметрия	**Стереометрия**
Две прямые *на плоскости* называются *параллельными*, если они не пересекаются.	Две прямые *в пространстве* называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.
 $a \parallel b$	

Две прямые в пространстве называются *скрещивающимися*, если они не лежат в одной плоскости.

Скрещивающиеся прямые не параллельны и не пересекаются (Рис. 14).

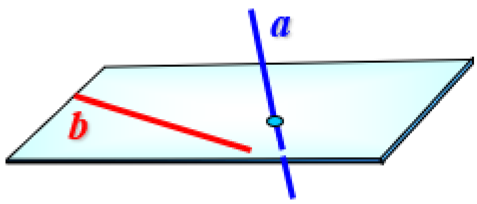
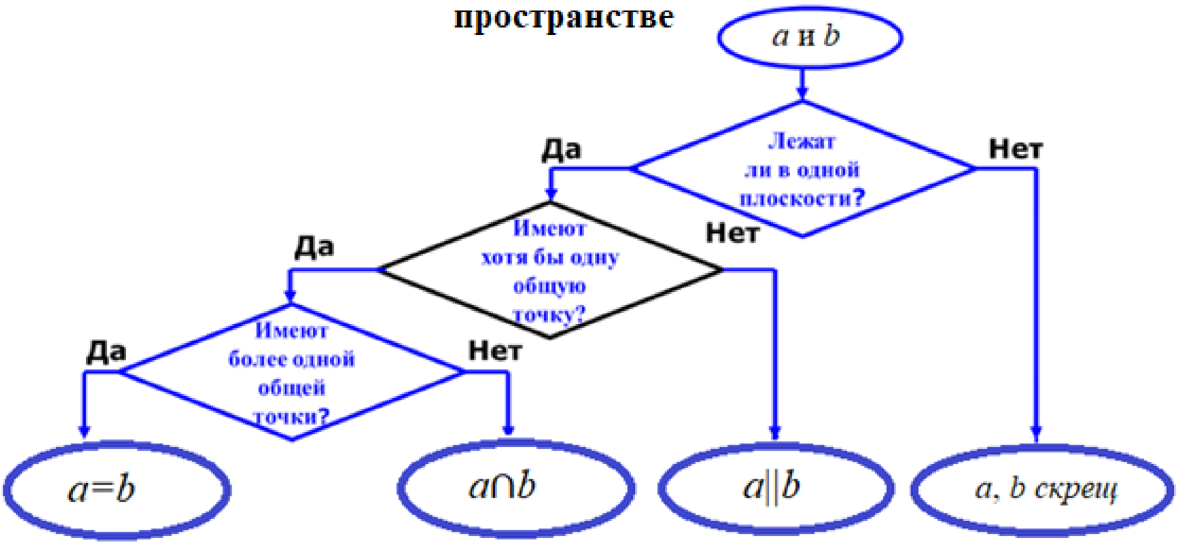


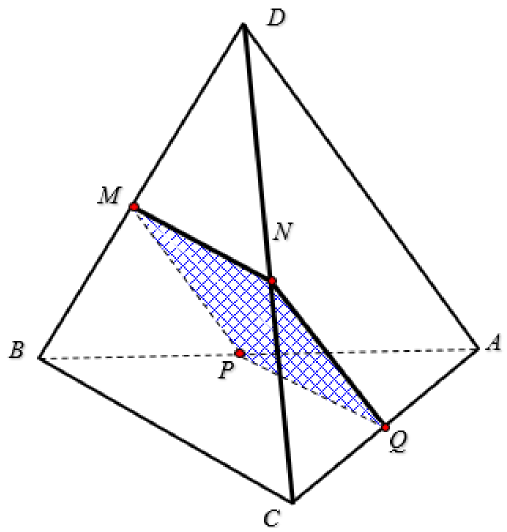
Рис. 14

Алгоритм распознавания взаимного расположения двух прямых в пространстве



Решаем задачи

35. а) На рисунке точки M, N, P и Q – середины отрезков BD, CD, AB и AC. Найти периметр четырехугольника $MNQP$, если AD=12, BC=14.



Решение.

1). Из условия задачи следует, что MN – средняя линия ΔDBC, $MN \| BC$ по свойству средней линии, $MN=BC:2=7$.

2) Из условия задачи следует, что PQ – средняя линия ΔABC, $PQ \| BC$ по свойству средней линии, $PQ=BC:2=7$.

3) Из условия задачи следует, что NQ – средняя линия ΔADC, $NQ \| AD$ по свойству средней линии, $NQ=AD:2=6$.

3) Получили, что $MN \| BC$ и $PQ \| BC$, значит $MN \| PQ$, $PQ=MN=7$. Следовательно $MNQP$ – параллелограмм.

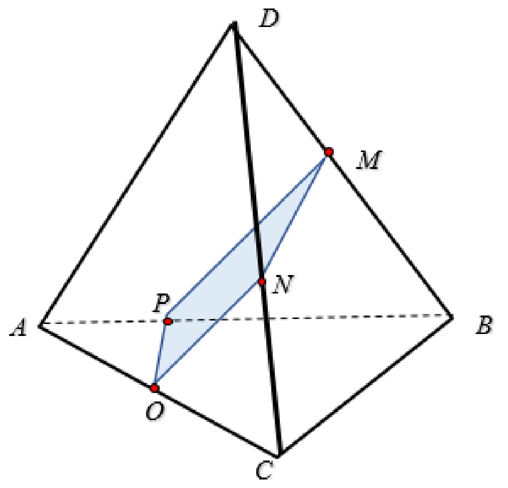
4) Получили, что в параллелограмме $MNQP$ – $PQ=7$; $NQ=6$, $P_{MNQP}=2(7+6)=26$.

Ответ: 26.

б) На рисунке точки *M*, *N*, *P* и *Q* – середины отрезков *BD*, *CD*, *AB* и *AC*.

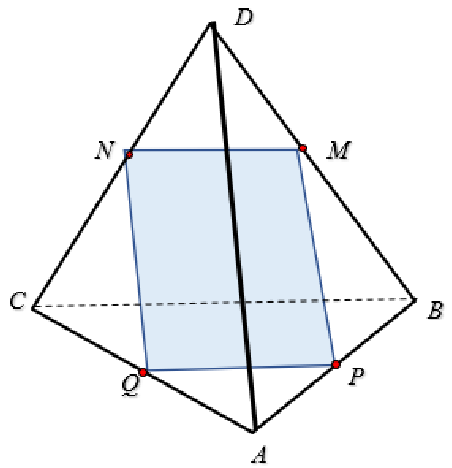
Найти периметр четырехугольника *MNQP*, если *AD*=18, *BC*=24.

Ответ: 42.

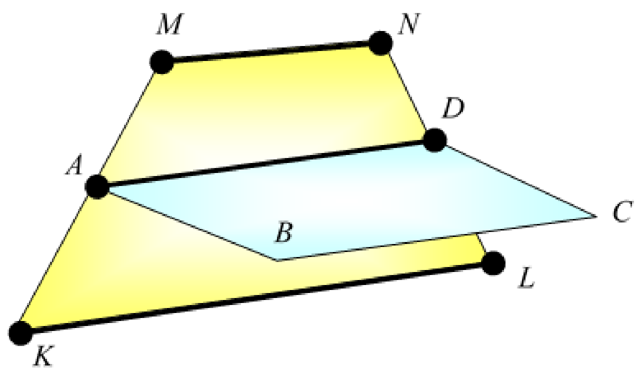


в) На рисунке точки *M*, *N*, *P* и *Q* – середины отрезков *BD*, *CD*, *AB* и *AC*. Найти периметр четырехугольника *MNQP*, если *AD*=28, *BC*=26.

Ответ: 54.



36. а) Квадрат *ABCD* и трапеция *KMNL* не лежат в одной плоскости. Точки *A* и *D* – середины отрезков *KM* и *NL* соответственно. Докажите, что *KL*||*BC*. Найдите *BC*, если *KL*=10, *MN*=6.



Решение.

Т.к. точки *A* и *D* – середины отрезков *KM* и *NL* соответственно, то сторона *AD* квадрата *ABCD* является средней линией трапеции *KMNL*.

Значит *AD*||*KL*, но *AD*||*BC*, следовательно, *KL*||*BC*.

Средняя линия $AD = \dfrac{MN + KL}{2} = \dfrac{6+10}{2} = 8$. *BC*=*AD*=8.

Ответ: 8.

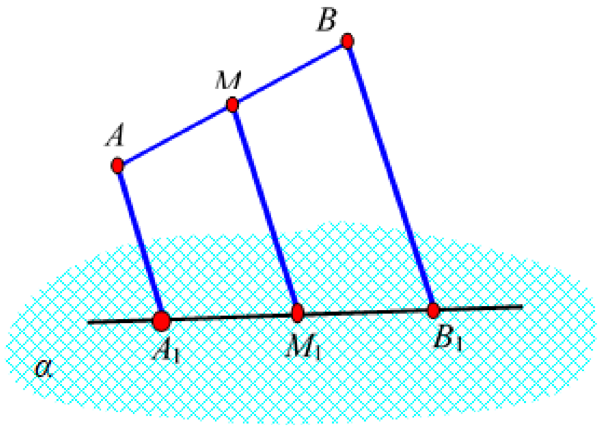
б) Квадрат *ABCD* и трапеция *KMNL* не лежат в одной плоскости. Точки *A* и *D* – середины отрезков *KM* и *NL* соответственно. Докажите, что *KL*||*BC*. Найдите *BC*, если *KL*=18, *MN*=12.

Ответ: 15.

в) Квадрат $ABCD$ и трапеция $KMNL$ не лежат в одной плоскости. Точки A и D – середины отрезков KM и NL соответственно. Докажите, что $KL \parallel BC$. Найдите BC, если $KL=28$, $MN=22$.

Ответ: 25.

37. а) Отрезок AB не пересекается с плоскостью α. Через концы отрезка AB и его середину, точку M, проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1 и M_1.



а) Докажите, что точки A_1, B_1 и M_1 лежат на одной прямой.

б) Найдите AA_1, если $BB_1=12$, $MM_1=8$.

Решение.

1. Параллельные прямые AA_1 и BB_1 образуют плоскость ABB_1A_1. Докажем, что точка M_1 тоже лежит в этой плоскости.

2. Пусть точка M_1 не лежит в этой плоскости. Но точка M лежит в плоскости ABB_1A_1, значит прямая $MM_1 \cap ABB_1A_1$=M.

3. $MM_1 \parallel BB_1$, $MM_1 \cap ABB_1A_1=M$, значит $BB_1 \cap ABB_1A_1$, что противоречит условию BB_1 лежит в плоскости ABB_1A_1. Получили противоречие, значит, MM_1 не может пересекать плоскость ABB_1A_1, MM_1 лежит в плоскости ABB_1A_1, как и прямая BB_1.

4. Т.к. $AA_1 \parallel BB_1$, то ABB_1A_1 – трапеция, где MM_1 – средняя линия, значит $MM_1 = \dfrac{AA_1 + BB_1}{2}, \dfrac{AA_1 + 12}{2} = 8, AA_1 + 12 = 16$. $AA_1=4$.

Ответ: 4.

б) Отрезок AB не пересекается с плоскостью α. Через концы отрезка AB и его середину, точку M, проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1 и M_1.

Найдите AA_1, если $BB_1=20$, $MM_1=15$.

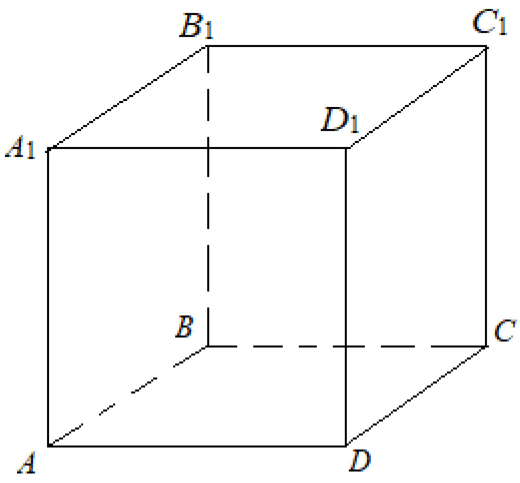
Ответ: 10.

в) Отрезок AB не пересекается с плоскостью α. Через концы отрезка AB и его середину, точку M, проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1 и M_1.

Найдите AA_1, если $BB_1=28$, $MM_1=19$.

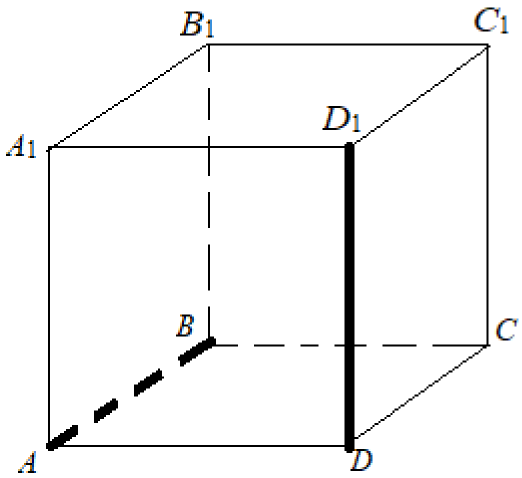
Ответ: 10.

38. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



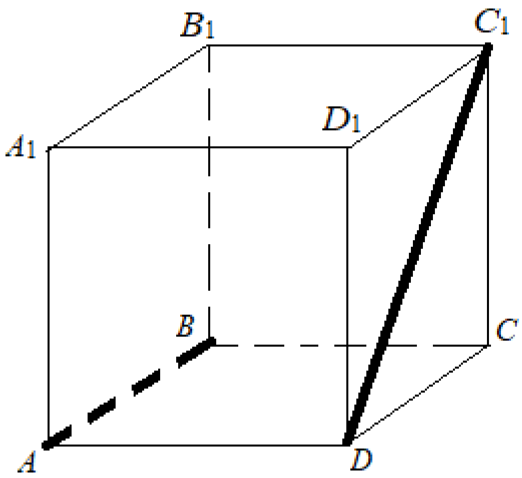
а) Найти расстояние между скрещивающими прямыми AB и DD_1.

Ответ: а) $\rho(AB, DD_1)=AD$.

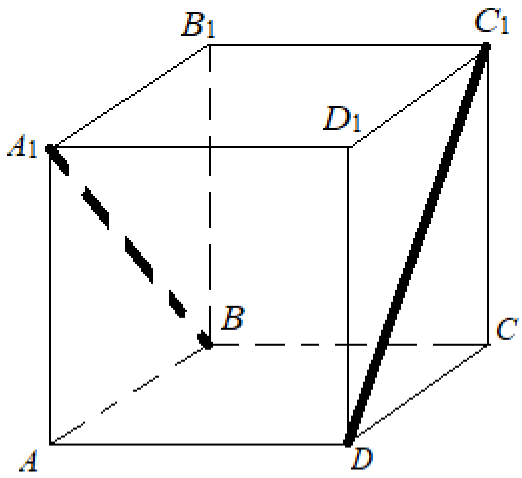


б) Найти расстояние между скрещивающими прямыми AB и DC_1.

Ответ: б) $\rho(AB, DC_1)=AD$.



в) Найти расстояние между скрещивающими прямыми A_1B и DC_1.



Ответ: в) $\rho(A_1B, DC_1)=AD$.

Занятие 6. Параллельность прямой и плоскости

Повторяем теорию

1. Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

2. Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

3. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

4. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

5. *Признак параллельности прямой и плоскости.* Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

6. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

7. Прямые, которые не параллельны и не пересекаются, получили название скрещивающиеся. Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости

8. *Признак скрещивающихся прямых.* Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся

Проверяем себя

Т20. Заполните пропуски в предложениях.

1. Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая _______________ данной, и притом только одна.

Ответ: параллельная (Теорема о параллельных прямых).

2. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая ______________ эту плоскость.

Ответ: пересекает.

3. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они _________________.

Ответ: параллельны.

4. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она _____________ данной плоскости.

Ответ: параллельна (Признак параллельности прямой и плоскости).

5. Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые ________________.

Ответ: скрещивающиеся (Признак скрещивающихся прямых).

6. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости _________________.

Ответ: *параллельны (Признак параллельности двух плоскостей).*

7. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения _______________.

Ответ: параллельны (Свойство параллельных плоскостей).

8. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями ___________________.

Ответ: равны (Свойство параллельных плоскостей).

Т21. Каким может быть взаимное расположение прямых a и b, если прямая a лежит в плоскости α, а прямая b параллельна этой плоскости?

а) параллельны или пересекаются;

б) скрещиваются или пересекаются;

в) параллельны или скрещиваются;

г) определить нельзя;

д) совпадают.

Ответ: в.)

Т22. Выберите верное утверждение.

а) Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая лежит в данной плоскости.

б) Прямая и плоскость называются скрещивающимися, если они не имеют общих точек.

в) Если две прямые параллельны третьей прямой, то они скрещивающиеся.

г) Если две прямые пересекают плоскость, то они параллельны.

д) Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Ответ. д).

Т23. Какое из следующих утверждений верно?

а) Через любые три точки проходит плоскость, и притом только одна;

б) если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости;

в) если две плоскости имеют общую точку, то они не пересекаются;

г) через прямую и точку, лежащую на ней, проходит плоскость, и притом только одна;

д) через две пересекающиеся прямые плоскость провести нельзя.

Ответ: б)

2. Выберите верное утверждение.

а) Если одна точка прямой лежит в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости;

б) через две пересекающиеся прямые плоскость провести нельзя;

в) через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна;

г) любые две плоскости не имеют общих точек;

д) если четыре точки не лежат в одной плоскости, то какие-нибудь три из них лежат на одной прямой.

Ответ: в).

3. Сколько общих точек могут иметь две различные плоскости?

а) 2; б) 3; в) несколько; г) бесконечно много; д) бесконечно много или ни одной.

Ответ: д).

4. Прямая c, параллельная прямой a, пересекает плоскость β. Прямая b параллельна прямой a, тогда:

а) прямые b и c пересекаются;

б) прямая b лежит в плоскости β;

в) прямые b и c скрещиваются;

г) прямые b и c параллельны;

д) прямая a лежит в плоскости β.

Ответ: г).

Решаем задачи

39. а) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E так, что DE=5 см и BD:DA=2:3. Плоскость α проходит через точки B и C и параллельна отрезку DE. Найдите длину отрезка BC.

Ответ: $8\frac{1}{3}$.

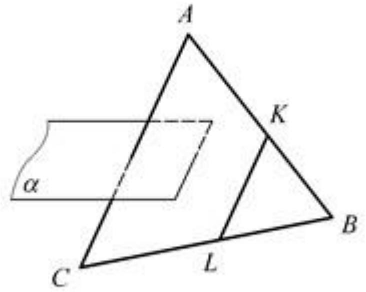
б) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E так, что DE=6 см и BD:DA=4:3. Плоскость α проходит через точки B и C и параллельна отрезку DE. Найдите длину отрезка BC.

Ответ: 14.

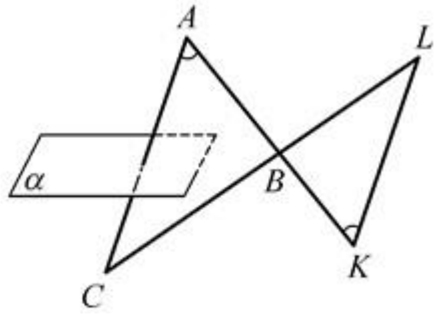
в) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E так, что DE=4 см и $BD:DA$=2:1. Плоскость α проходит через точки B и C и параллельна отрезку DE. Найдите длину отрезка BC.

Ответ: 6.

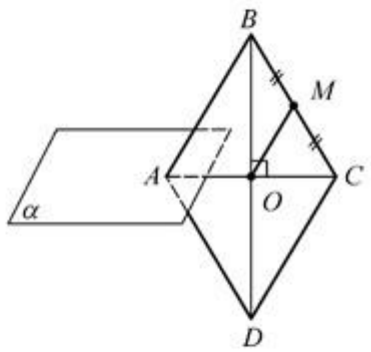
40. а) Дано:
ΔABC, $K \in AB$,
$\angle CAB = \angle LKB$, $AC \cap \alpha$.
Докажите, что $KL \cap \alpha$.



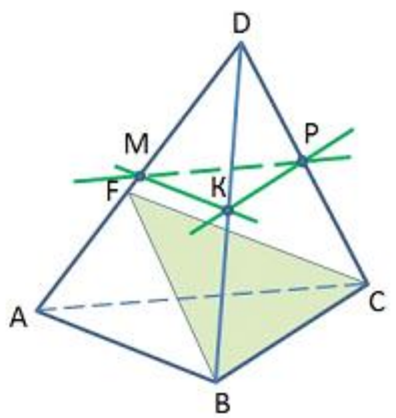
б) Дано:
$AK \cap CL = B$,
$\angle CAB = \angle LKB$, $AC \cap \alpha$.
Докажите, что $KL \cap \alpha$.



в) Дано:
$ABCD$ – ромб, $AB \cap \alpha = A$,
$AC \cap BD = O$, $BM = MC$.
Докажите, что $OM \cap \alpha$.



41. а) Точки M, P, K – середины ребер DA, DB, DC тетраэдра $DABC$. Определите прямую, параллельную плоскости FBC.



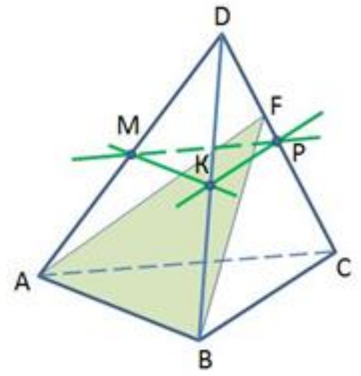
Ответ: KP.

Решение.

1. Т.к. точки M, P, K – середины ребер DA, DB, DC, то MK – средняя линия ΔABD, KP – средняя линия ΔCBD, MP – средняя линия ΔACD.

2. Т.к. KP – средняя линия ΔCBD, то $KP \| BC$, но $BC \in FBC$), значит $KP \| (FBC)$ по признаку параллельности прямой и плоскости.

б) Точки M, P, K – середины ребер DA, DB, DC тетраэдра $DABC$. Определите прямую, параллельную плоскости FAB.



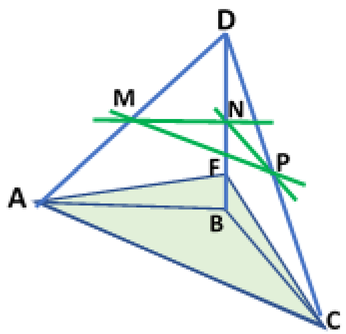
Ответ: MK.

Решение.

1. Т.к. точки M, P, K – середины ребер DA, DB, DC, то MK – средняя линия ΔABD, KP – средняя линия ΔCBD, MP – средняя линия ΔACD.

2. Т.к. MK – средняя линия ΔABD, то $MK \| AB$, но $AB \in (FAB)$, значит, $MK \| (FAB)$ по признаку параллельности прямой и плоскости.

в) Точки M, P, K – середины ребер DA, DB, DC тетраэдра $DABC$. Определите прямую, параллельную плоскости FAC.



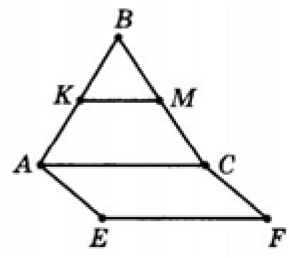
Ответ: MP.

Решение.

1. Т.к. точки M, P, K – середины ребер DA, DB, DC, то MK – средняя линия ΔABD, KP – средняя линия ΔCBD, MP – средняя линия ΔACD.

2. Т.к. MP – средняя линия ΔACD, то $MP \| AC$, но $AC \in (FAC)$, значит. $MP \| (FAC)$ по признаку параллельности прямой и плоскости.

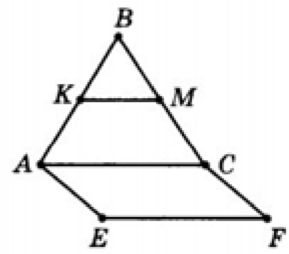
42. а) Треугольник ABC и квадрат $AEFC$ не лежат в одной плоскости. Точки K и M – середины отрезков AB и BC соответственно.



1. Докажите, что $MK \| (AEFC)$.
2. Найдите KM, если AE=8.

Ответ: KM=4.

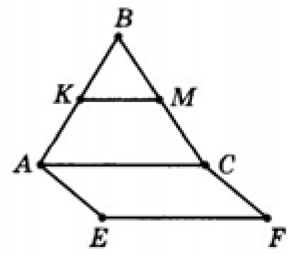
б) Треугольник ABC и квадрат $AEFC$ не лежат в одной плоскости. Точки K и M – середины отрезков AB и BC соответственно.



Найдите KM, если AE=10.

Ответ: KM=5.

в) Треугольник ABC и квадрат $AEFC$ не лежат в одной плоскости. Точки K и M – середины отрезков AB и BC соответственно.

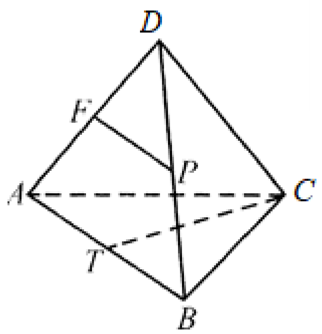


Найдите KM, если AE=12.

Ответ: KM=6.

43. а) Дано:

$AF=FD$, $BP=PD$, $\angle ACB=90^0$, $AT=TB$, CT=5.

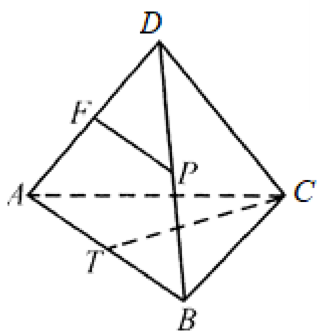


1. Доказать, что $FP \| (ABC)$.
2. Найти FP.

Ответ: FP=5.

б) Дано:

$AF=FD$, $BP=PD$, $\angle ACB=90^0$, $AT=TB$, CT=7.



Найти FP.

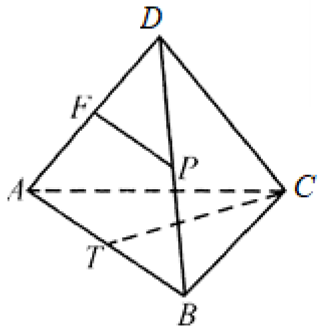
Ответ: FP=7.

в) Дано:

$AF=FD$, $BP=PD$, $\angle ACB=90^0$, $AT=TB$, $CT=13$.

Найти FP.

Ответ: $FP=13$.



Задачи с развернутым ответом

44. Сторона AC треугольника ABC параллельна плоскости α , а стороны AB и BC пересекаются с этой плоскостью в точках M и N. Докажите, что треугольники ABC и MBN подобны.

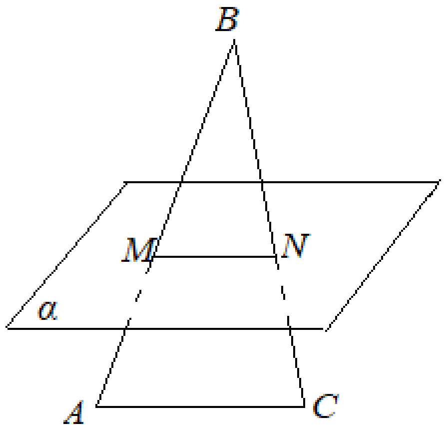
Решение.

Дано:

ΔABC, $AB\cap\alpha=M$, $BC\cap\alpha=N$, $AC||\alpha$.

Доказать: $\Delta ABC \sim\Delta MBN$

Плоскость (ABC) проходит через данную прямую AC, параллельную плоскости α, и пересекает эту плоскость α, тогда линия пересечения MN будет параллельна первой прямой AC. Получили $AC||MN$, значит MN отсекает от ΔABC подобный ΔMBN.



45. На ребре DC правильной треугольной пирамиды взята точка M, так что $MC=2DM$. Докажите, что $OM||(ABD)$, где точка O – центр треугольника ABC.

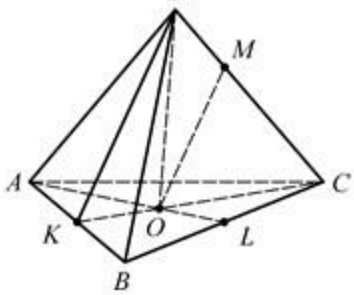
Решение.

Дано:

$DABC$ – пирамида, ΔABC – правильный, O – центр ΔABC, $M\in DC$, $MC=2DM$.

Доказать: $OM||(ABD)$.

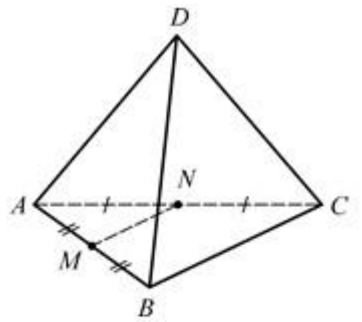
1. Центр правильного треугольника – это точка пересечения медиан, значит $CO:OK=2:1$.
2. В ΔKDC $MC:MD=2:1$, тогда по теореме Фалеса $OM||KD$.



3. $OM||KD$, $KD\in(ABD)$, значит, $OM||(ABD)$по признаку параллельности прямой и плоскости.

46. Точки M и N – середины ребер AB и AC тетраэдра $ABCD$. Доказать, что прямая MN параллельна плоскости BCD.

Решение.



Дано:

$DABC$ – пирамида, M – середина AB, N – середина AC.

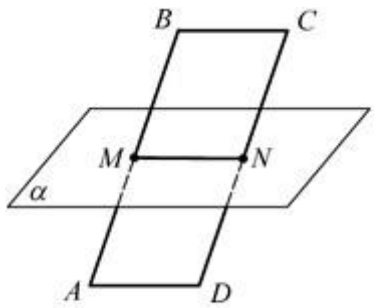
Доказать: $MN||(BCD)$.

1. Т.к. M – середина AB, N – середина AC, то MN – средняя линия, $MN||BC$.

2. $MN||BC$, $BC\in(BCD)$, значит $MN||(BCD)$ по признаку параллельности прямой и плоскости.

47. Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $AB\cap\alpha=M$, $CD\cap\alpha=N$, $MN||AD$.

Доказать: $BC||\alpha$.



Решение.

1. Т.к. $M\in\alpha$, $N\in\alpha$, то $MN\in\alpha$.

2. $MN||AD$, $MN\in\alpha$, тогда $AD||\alpha$.

3. $AD||\alpha$, $AD||BC$, значит $BC||\alpha$ по признаку параллельности прямой и плоскости.

Занятие 7. Параллельность плоскостей

Повторяем теорию

Определение. Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то плоскости параллельны (Рис. 15).

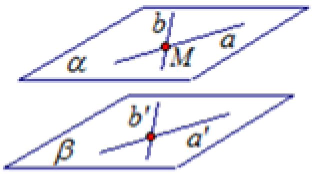


Рис. 15

Свойства.

1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны (Рис. 16).

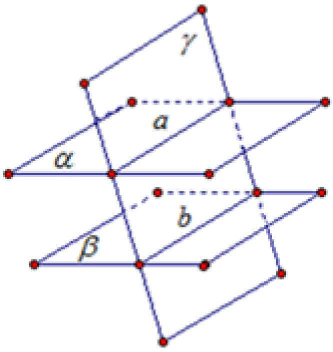


Рис. 16

2. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны (Рис. 17).

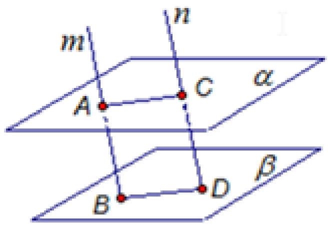


Рис. 17

3. Параллельные плоскости рассекают стороны угла на пропорциональные части (Рис. 18).

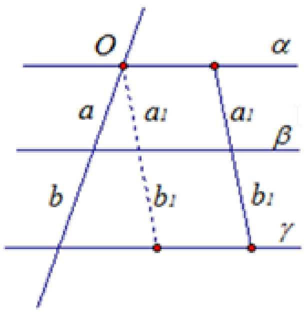


Рис. 18

<u>Проверяем себя</u>

Т24. 1) Плоскость α пересекает стороны BC и AC треугольника ABC соответственно в точках M и E. известно, что $AB \| \alpha$, тогда прямые AB и ME:

а) пересекаются; б) параллельны; в) скрещиваются.

Ответ: параллельны.

2) Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC, точки P, O и M – середины отрезков DA, DB, DC соответственно. Каково взаимное расположение плоскостей ABC и POM?

а) плоскости параллельны;

б) плоскости пересекаются;

в) их расположение определить нельзя.

Ответ: плоскости параллельны.

3) Прямые a и b лежат в параллельных плоскостях, следовательно, эти прямые:

а) скрещиваются или пересекаются;

б) скрещиваются или параллельны;

в) только скрещиваются;

г) только параллельны.

Ответ: скрещиваются или параллельны.

Т25. Укажите верные утверждения:

1. Если прямая a параллельна прямой b, а b параллельна плоскости α, то a тоже параллельна плоскости α?

2. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения этих плоскостей параллельна данной прямой?

3. Если две прямые параллельны плоскости, то эти прямые параллельны?

Ответ: 2.

Т26. Укажите неверные утверждения:

1. Если одна точка прямой лежит в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

2. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

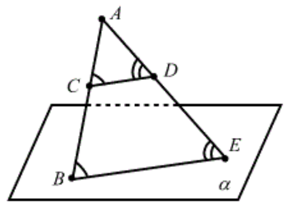
3. Через две пересекающие прямые плоскость провести нельзя.

4. Любые две плоскости не имеют общих точек.

Ответ: 1, 3, 4.

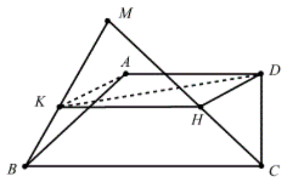
Решаем задачи

48. а) Точка C лежит на отрезке AB, причем AB:BC=4:3. Отрезок CD, равный 12 см, параллелен плоскости α, проходящей через точку B. Докажите, что прямая AD пересекает плоскость α в некоторой точке E и найдите отрезок BE.



Ответ: 48 см.

б) В трапеции $ABCD$ основание BC равно 12 см. Точка M не лежит в плоскости трапеции, а точка K – середина отрезка BM. Докажите, что плоскость ADK пересекает отрезок MC в некоторой точке H. Найдите отрезок KH.



Ответ: 6 см.

в) Точка C лежит на отрезке AB. Через A проведена плоскость, а через точки B и C – параллельные прямые, пересекающие эту плоскость соответственно в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если точка C – середина отрезка AB и BB_1=7 см.

Ответ: 3,5 см.

49. а) Параллельные прямые a и b пересекают одну из двух параллельных плоскостей в точках A_1 и B_1, а другую – в точках A_2 и B_2 соответственно. Найдите $\angle B_1B_2A_2$, если $\angle B_1A_1A=50^0$.

Ответ:50°.

б) Параллельные прямые a и b пересекают одну из двух параллельных плоскостей в точках A_1 и B_1, а другую – в точках A_2 и B_2 соответственно. Найдите $\angle A_2A_1B$, если $\angle A_1A_2B_2=140^0$.

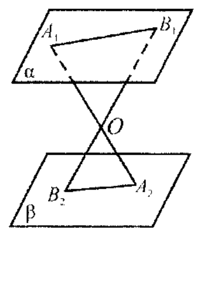
Ответ:40°.

в) Точка C лежит на отрезке AB. Через A проведена плоскость, а через точки B и C – параллельные прямые, пересекающие эту плоскость соответственно в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если AC:CB=3:2 и BB_1=20 см.

Ответ: 12 см.

50. а) Плоскости α и β параллельны. $A_1\in\alpha$, $A_2\in\beta$, $B_1\in\alpha$, $B_2\in\beta$; $A_1A_2\cap B_1B_2=O$. A_1O=5, A_2O=3, A_2B_2=3.Найти A_1B_1.

Ответ:5.

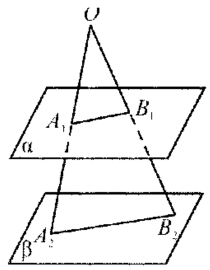


б) Плоскости α и β параллельны. $A_1 \in \alpha$, $A_2 \in \beta$, $B_1 \in \alpha$, $B_2 \in \beta$; $A_1A_2 \cap B_1B_2 = O$. $A_1A_2 = 14$, $B_1O:B_2O = 3:4$. Найти A_1O.

Ответ:6.

в) Плоскости α и β параллельны. $A_1 \in \alpha$, $A_2 \in \beta$, $B_1 \in \alpha$, $B_2 \in \beta$; $A_1A_2 \cap B_1B_2 = O$. $A_1B_1 = 6$, $B_1O:B_1B_2 = 5:8$. Найти A_2B_2.

Ответ: 15,6.



51. а) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ сторона равна $6\sqrt{2}$. Точка K – середина ребра SC. Через прямую AK проведено сечение, параллельное одной из диагоналей основания, площадь которого равна 60. Найдите расстояние от точки B до плоскости сечения.

Ответ: 4,8.

б) В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ каждое ребро равно 12. На ребре PC отмечена точка K так, что $PK:KC=1:3$. Линия пересечения плоскостей ABK и PCD параллельна плоскости ABC. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью ABK.

Ответ: $\frac{45\sqrt{43}}{4}$.

в) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C. Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

Ответ: 44.

52. а) Все ребра правильной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны по 2. Плоскость параллельная прямым AC и SB пересекает ребра AB и BC в точках M и N. Найдите периметр сечения пирамиды этой плоскостью, если $MN=\sqrt{2}$.

Ответ: $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

б) Плоскость, параллельная боковому ребру $AS=a\sqrt{2}$ и ребру $BC=a$ основания ABC правильной пирамиды $SABC$, проходит на расстоянии d от ребра AS. Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

Ответ: $\frac{4\sqrt{5}ad-8\sqrt{2}d^2}{5}$.

в) В правильной пирамиде $SABC$ с высотой SH и ребром основания $AB=a$ угол между боковым ребром и плоскостью основания равен φ. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку H параллельно ребрам SA и BC.

Ответ: $\dfrac{2a^2}{9\sqrt{3}\cos\varphi}$.

Занятие 8. Параллельность плоскостей

Повторяем теорию

1. Если плоскость α параллельна плоскости β, а плоскость β параллельна плоскости γ, то плоскость α параллельна плоскости γ.

2. Через точку, не лежащую в плоскости, проходит единственная плоскость параллельная данной.

3. Противолежащие грани параллелепипеда лежат в параллельных плоскостях.

Проверяем себя

Т27. Заполните пропуски:

а) Через прямую и не лежащую на ней точку, проходит ______ и притом только одна.

Ответ: плоскость.

б) Через любую точку пространства, ______ на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна

Ответ: не лежащей.

Т28. Укажите верные утверждения:

1) Прямые a и b пересекаются в точке M. Прямая c, не проходящая через точку M, пересекает прямые a и b. Лежат ли все эти прямые в одной плоскости?

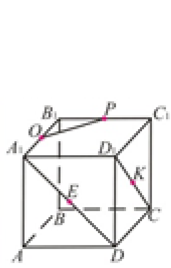
2) Прямые a и b скрещиваются с прямой c. Могут ли прямые a и b быть параллельными?

3) Две прямые параллельны одной и той же плоскости. Можно ли утверждать, что эти прямые параллельны между собой?

Ответ:1, 2.

Т29. Определи вид четырехугольника:

№1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки O, P, K и E – середины отрезков A_1B_1, B_1C_1, D_1C и A_1D соответственно. Четырёхугольник $OPKE$ является



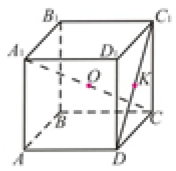
1) произвольным четырёхугольником;

2) трапецией;

3)параллелограммом.

Ответ: параллелограммом.

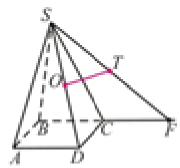
№2. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки O K – середины отрезков A_1C и C_1D соответственно. Четырёхугольник $AOKD$ является



1) произвольным четырёхугольником;
2) трапецией;
3) параллелограммом.

Ответ: трапецией.

№3. Точка F лежит на продолжении ребра BC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ так, что $FC=BC$, точки O и T – середины отрезков SD и SF соответственно. Четырёхугольник $AOTC$ является

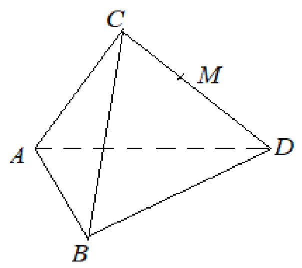


1) произвольным четырёхугольником;
2) трапецией;
3) параллелограммом.

Ответ: трапецией.

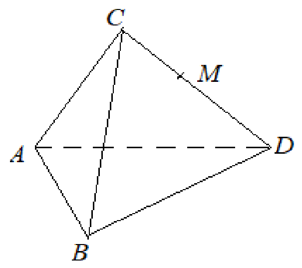
Решаем задачи

53. а) На рисунке изображен правильный тетраэдр $ABCD$, длина ребра которого равна 8, $CM=MD$. Проведите плоскость, проходящую через точку M параллельно плоскости ABC. Найдите периметр полученного сечения.



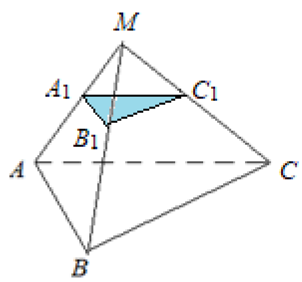
Ответ: 12.

б) На рисунке изображен правильный тетраэдр $ABCD$, длина ребра которого равна 8, $DM:BM=3:5$. Проведите плоскость, проходящую через точку M параллельно плоскости ABC. Найдите периметр полученного сечения.



Ответ: 9.

в) На рисунке изображена $MABC$ – пирамида, $S_{ABC}=98$, $A_1B_1C_1 \| ABC$, $MA_1:AA_1=3:4$. Найдите $S_{сеч}$.



Ответ: 18.

54. а) Точка M – середина ребра BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Докажите, что плоскость AMB_1 параллельна прямой A_1C.

2) Найдите расстояние между прямой A_1C и плоскостью AMB_1, если параллелепипед прямоугольный, $AB=12$, $AD=12$ и $AA_1=6$.

Ответ: 4.

б) Точка M – середина ребра BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Докажите, что плоскость AMB_1 параллельна прямой A_1C.

2) Найдите расстояние между прямой A_1C и плоскостью AMB_1, если параллелепипед прямоугольный, $AB=8$, $AD=8$ и $AA_1=4$.

Ответ: $\frac{8}{3}$.

в) В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB=BC=6$, $AA_1=12$ точки M и K – середины AB и BC соответственно, точка N лежит на ребре BB_1, причем $BN=6$. Через точку D провели плоскость α параллельно плоскости KMN.

1) Докажите, что плоскость α проходит через точки A_1 и C_1.

2) Найдите расстояние между плоскостями KMN и α.

Ответ: 6.

55. а) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2. Плоскости A_1BD и B_1D_1C параллельны. Найдите расстояние между плоскостями A_1BD и B_1D_1C.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

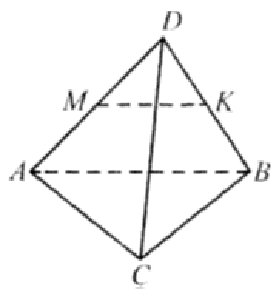
б) Точка Q симметрична вершине S правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ относительно плоскости основания ABC. Плоскости SBC и QDA параллельны. Найдите расстояние между плоскостями SBC и QDA, если сторона основания пирамиды $SABCD$ равна 2, а ее боковое ребро равно $\sqrt{2022}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{2020}}{\sqrt{2021}}$.

в) Площадь сечения правильной треугольной пирамиды, проходящего через её боковое ребро, равное $\sqrt{13}$, и высоту, вдвое больше площади её основания. Найдите площадь её боковой грани.

Ответ: $\frac{7\sqrt{3}}{4}$.

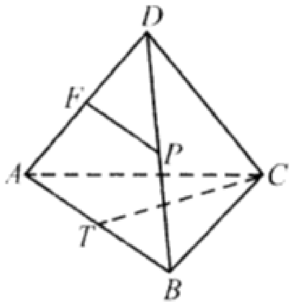
56. а) Дано: $DABC$ – пирамида; $\angle ABC=\angle ACB=60^0$; $MK||BC$; $AM=MD$, $AC=6\sqrt{2}$. Найти MK.



Ответ: $3\sqrt{2}$.

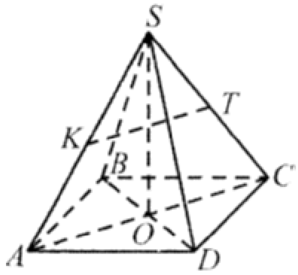
б) Дано: *DABC* – пирамида; *AF*=*FD*, *FP*||*ABC*; $\angle ACB=90^0$; *AT*=*BT*, *CT*=9. Найти *FP*.

Ответ:9.



в) Дано: *SABCD* – пирамида; *KT*||*BC*, *CT*=*ST*, *ABCD* – ромб; *AD*=15, *BD*:*AC*=3:4. Найти *KT*.

Ответ: 12.



57. а) Стороны *AB*=6 и *CD* основания *ABCD* пирамиды *SABCD* параллельны, *AD*=4, $AS=2\sqrt{14}$ и $\angle BAD=120^0$. Найдите объем пирамиды, если через каждую из прямых *AB* и *CD* можно провести по плоскости, которые не содержат основание пирамиды и пересекают её по равным четырехугольникам.

Ответ: $28\sqrt{3}$.

б) На ребре *AS* правильной пирамиды *SABC* объёмом *V* взята такая точка *D*, что *SD*:*DA*=*m*:*n*. Расстояние от центра основания *ABC* до плоскости *BCD* равно *d*. Найдите площадь треугольника *BCD*.

Ответ: $\frac{n}{n+m}\cdot\frac{V}{d}$.

в) На каком расстоянии от ребра *SA* правильной пирамиды *SABC* с вершиной *S* должна проходить плоскость, параллельная ребрам *BC*=*a* и *AS*=*b*, чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была максимальной?

Ответ: $\frac{a\sqrt{3b^2-a^2}}{4b}$.

Занятие 9. Прямоугольный параллелепипед

Повторяем теорию

Прямоугольный параллелепипед – это параллелепипед, у которого боковые рёбра перпендикулярны к основаниям, а основания представляют собой прямоугольники. На рисунке 19 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

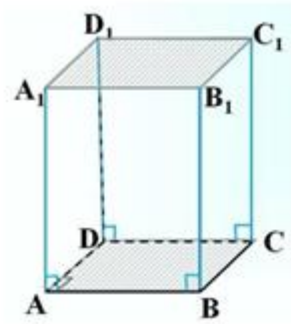


Рис. 19

AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – *боковые рёбра,* перпендикулярные основаниям.

$ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – *основания.*

ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DAA_1D_1 – *боковые грани.*

d – *диагональ* прямоугольного параллелепипеда.

a (длина), b (ширина), c (высота) – *измерения* прямоугольного параллелепипеда (Рис. 20).

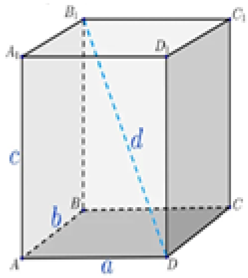


Рис. 20

Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда

$S_{пов}=2ab+2bc+2ac$.

Объём прямоугольного параллелепипеда

$V=abc$.

Свойства:

1. В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней – прямоугольники.
2. Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда – прямые.
3. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.
4. Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

Куб – это прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны. Все грани куба – равные друг другу квадраты (Рис. 21).

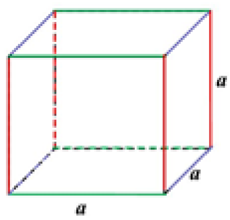


Рис. 21

Площадь поверхности куба

S *пов*.$=6a^2$

Объём куба

$V=a^3$

<u>Проверяем себя</u>

Т30. Заполните пропуски:

а) Прямоугольный параллелепипед – это параллелепипед, у которого боковые рёбра _______ к основаниям, а основания представляют собой прямоугольники.

Ответ: перпендикулярны.

б) Куб – это прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения _______.

Ответ: равны.

Т31. Ответьте на вопросы:

а) Сколько боковых рёбер в прямоугольном параллелепипеде?

Ответ:4.

б) Сколько оснований в прямоугольном параллелепипеде?

Ответ:2.

в) Сколько боковых граней в прямоугольном параллелепипеде?

Ответ:4.

г) Сколько всего диагоналей в прямоугольном параллелепипеде?

Ответ:4.

Т32. Укажите верные утверждения:

а) В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней – прямоугольники;

б) Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда – прямые;

в) Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме трёх его измерений.

Ответ: а), б).

Т33. Укажите неверное утверждение:

а) Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны;

б) Все грани куба – равные друг другу прямоугольники;

в) Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

Ответ: б).

Решаем задачи

58. а) Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 6,1 см, 7 см и 3,5 см. Найдите площадь его поверхности.

Ответ: 177,1 см².

б) Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 94. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.

Ответ: 5.

в) Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 дм и 4 дм. Диагональ параллелепипеда равна 6 дм. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.

Ответ: 64 дм².

59. а) Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда с размерами 60 см×20 см×50 см. Сколько литров составляет объём аквариума? В одном литре 1000 кубических сантиметров.

Ответ: 60 литров.

б) Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 38,6. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4,5. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: 173,7.

в) Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 4, 6, 9. Найдите ребро равновеликого ему куба.

Ответ: 6.

60. а) Бак имеет форму куба со стороной 40 см. Сколько литров составляет объём бака? В одном литре 1000 кубических сантиметров.

Ответ: 64 литра.

б) Объем куба равен 8. Найдите площадь его поверхности.

Ответ: 24.

в) Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в три раза?

Ответ: 27.

61. а) Рёбра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 20, 30 и 60. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда.

Ответ: 70.

б) Площадь поверхности куба равна 18 см². Найдите его диагональ.

Ответ:3.

в) Если каждое ребро куба увеличить на 1 мм, то его площадь поверхности увеличится на 54 мм². Найдите ребро куба.

Ответ: 4 мм.

62. а) Объем первого куба в 8 раз больше объема второго куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?

Ответ: 4.

б) Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 4,5. Найдите объем треугольной пирамиды AD_1CB_1.

Ответ: 1,5.

в) Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, D, A_1, B, C, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB=3$, $AD=4$, $AA_1=5$.

Ответ: 30.

Занятие 10. Тетраэдр

Повторяем теорию

Определение тетраэдра. Поверхность, составленная из четырёх треугольников ΔABC, ΔDAB, ΔDBC и ΔDCA, называется тетраэдром и обозначается: $DABC$.

Тетраэдр – это многогранник, состоящий из плоскости треугольника и точки не лежащий в этой плоскости, трех отрезков, соединяющих эту точку с вершинами основания треугольника.

Построим ΔABC и точку D, не лежащую в плоскости этого треугольника. Соединим точку D с вершинами ΔABC, получим ΔDAB, ΔDBC, ΔDCA, получим $DABC$ – тетраэдр (Рис. 22).

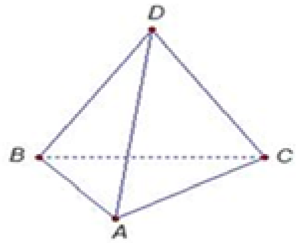


Рис. 22

Треугольники, из которых состоит тетраэдр, называются *гранями,* их стороны – *рёбрами*, а вершины – *вершинами* тетраэдра.

Ребро тетраэдра – линия пересечения двух плоскостей тетраэдра.

Тетраэдр имеет *четыре* грани, *шесть* рёбер и *четыре* вершины.

Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются *противоположными*.

Один из треугольников называется *основанием* тетраэдра. А три другие – *боковыми* гранями.

Тетраэдр называется правильным, если у него все четыре грани равносторонние треугольники.

Свойства правильного тетраэдра: все двугранные углы при рёбрах и все трёхгранные углы при вершинах равны, все рёбра имеют одинаковую длину, все грани имеют одинаковую площадь.

Элементы тетраэдра

A, B, C, D – вершины тетраэдра.

AB, AC, AD, BC, BD, CD – ребра тетраэдра.

ABC, ABD, BDC, ADC – грани тетраэдра.

Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой противоположной грани и перпендикулярный этой грани, называется его *высотой*, опущенной из данной вершины.

Площадь правильного треугольника, со стороной *a,* равна: $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Площадь поверхности правильного тетраэдра равна: $S=a^2\sqrt{3}$.

Объём тетраэдра $V=\frac{1}{3}S\cdot H$, где S – площадь основания, а H – высота.

<u>Проверяем себя</u>

Т34. Заполните пропуски:

а) Тетраэдр – это _______, составленная из ________________________.

Ответ: поверхность, из четырёх треугольников.

б) Треугольники, из которых состоит тетраэдр, называются__________.

Ответ: гранями.

в) Линии пересечения двух плоскостей тетраэдра, называются________.

Ответ: рёбрами тетраэдра.

Т35. Укажите верные утверждения:

а) фигура, состоящая из треугольников, называется тетраэдром;

б) у правильного тетраэдра все четыре грани равносторонние треугольники;

в) тетраэдр имеет четыре одинаковые грани.

Ответ: б).

Т36. Укажите неверные утверждения:

а) все грани тетраэдра имеют одинаковую площадь;

б) в каждой вершине тетраэдра сходятся три грани;

в) рёбра тетраэдра имеют одинаковую длину.

Ответ: а), в).

<u>Решаем задачи</u>

63. а) В правильном тетраэдре *SABC* точка *K* − середина ребра *BC*, *S* − вершина. Известно, что *SK*=4, а площадь боковой поверхности тетраэдра равна 54. Найдите длину ребра *AC*.

Ответ: 9.

б) В правильном тетраэдре *SABC* точка *L* – середина ребра *AC*, *S* – вершина. Известно, что *BC*=6, а *SL*=5. Найдите площадь боковой поверхности тетраэдра.

Ответ: 45.

в) В правильном тетраэдре $SABC$, Q − середина ребра AB, S − вершина. Известно, что BC=7, а площадь боковой поверхности тетраэдра равна 42. Найдите длину отрезка SQ.

Ответ: 4.

64. а) Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?

Ответ: 4.

б) Во сколько раз увеличили рёбра правильного тетраэдра, если площадь его поверхности увеличилась в 1296 раза?

Ответ: *36*.

в) Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в 5 раз?

Ответ: 25.

65.а) В правильном тетраэдре $SABC$ точка R − середина ребра BC, S − вершина. Известно, что AB=1, а SR=2. Найдите площадь боковой поверхности.

Ответ: 3.

б) В правильном тетраэдре $SABC$ точка R − середина ребра BC, S − вершина. Известно, что AB=7, а SR=16. Найдите площадь боковой поверхности.

Ответ: 168.

в) В правильном тетраэдре $SABC$ точка Q − середина ребра AB, S − вершина. Известно, что BC=5, а SQ=6. Найдите площадь боковой поверхности.

Ответ: 45.

66. а) Найдите объем тетраэдра, в основании которого лежит правильный треугольник, стороны которого равны 1, а высота равна $\sqrt{3}$.

Ответ:0,25.

б) Найдите объем тетраэдра, в основании которого лежит правильный треугольник, стороны которого равны 11, а высота равна $4\sqrt{3}$.

Ответ: 121.

в) Найдите объем тетраэдра, в основании которого лежит правильный треугольник, стороны которого равны 3, а высота равна $6\sqrt{3}$.

Ответ: 13,5.

67. а) Основанием тетраэдра является правильный треугольник со стороной 16, а боковые рёбра равны 10. Найдите площадь боковой поверхности этого тетраэдра.

Ответ: 144.

б) Основанием тетраэдра является правильный треугольник со стороной 14, а боковые рёбра равны 25. Найдите площадь боковой поверхности этого тетраэдра.

Ответ: 504.

в) Основанием тетраэдра является правильный треугольник со стороной 6, а боковые рёбра равны 5. Найдите площадь боковой поверхности этого тетраэдра.

Ответ: 36.

Занятие 11. Практическая работа. Построение сечений многогранников

Повторяем теорию

Чтобы построить сечение многогранника плоскостью нужно указать точки пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника и соединить эти точки отрезками, принадлежащими граням многогранника. Для построения сечения многогранника плоскостью нужно в плоскости каждой грани указать две точки, принадлежащие сечению, соединить их прямой и найти точки пересечения этой прямой с рёбрами многогранника. При построении сечения многогранника получается плоская фигура.

При построении сечений используем свойства.

Свойства параллельных плоскостей:

Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

Если в параллелепипеде на одной из граней проведена линия, по которой плоскость сечения пересекает грань, а на параллельной ей грани есть точка, принадлежащая сечению, то через эту точку можно провести линию, параллельную линии сечения (Рис. 23).

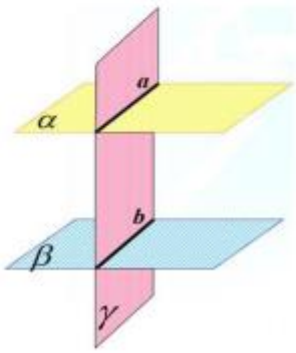


Рис. 23

Метод следов: Линия пересечения плоскости сечения и плоскости грани многогранника называется следом секущей плоскости на плоскости этой грани многогранника. Точка пересечения плоскости сечения и прямой, содержащей ребро многогранника, называется следом секущей плоскости на прямой, содержащей это ребро многогранника.

Соединяйте точки, которые лежат в одной грани.

Проверяем себя

Т37. Заполните пропуски:

а) Если две точки прямой принадлежат плоскости, то прямая_________.

Ответ: лежит в этой плоскости.

б) Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются _____.

Ответ: по прямой.

в) Если плоскость пересекает две параллельные плоскости, то линии пересечения ____________________.

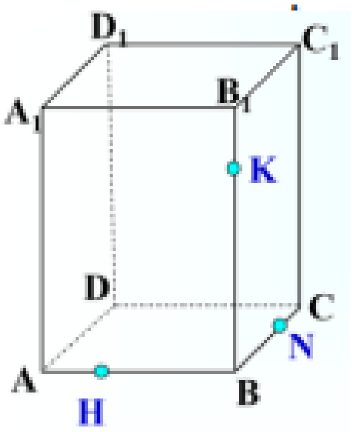
Ответ: параллельны.

г) Соединяйте точки, которые лежат ____________________________.

Ответ: в одной плоскости.

Решаем задачи

68. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки K, H и N.



Решение:

Точки H и N лежат в одной грани $ABCD$, их можно соединить.

Точки H и K лежат в одной грани AA_1B_1B, их можно соединить.

Точки K и N лежат в одной грани BB_1C_1C, их можно соединить.

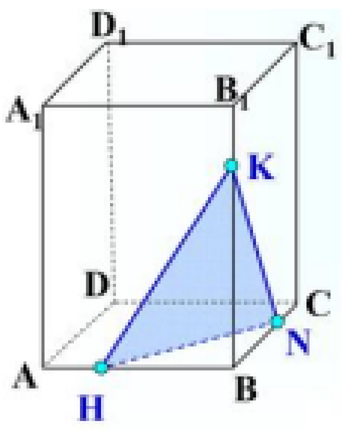
Построение:

1) HN

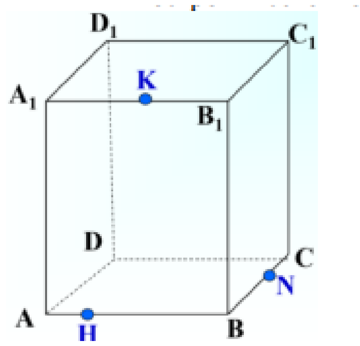
2) KH

3) KN

HKN – искомое сечение



69. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки *К*, *Н* и *N*.



Решение:

Построение:

1) *HK*

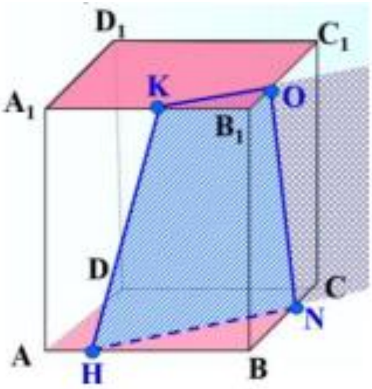
2) *HN*

3) $HN \parallel KO$

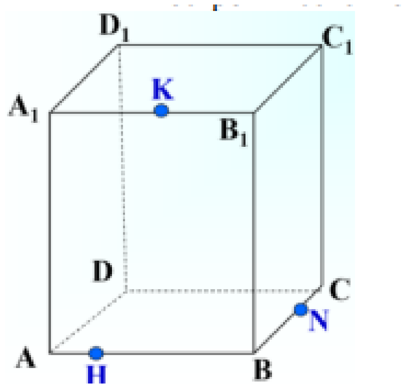
4) $KO \cap B_1C_1 = O$

5) *ON*

HKON – искомое сечение

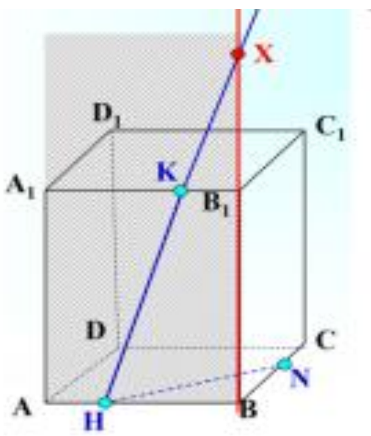


70. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки *К, Н* и *N*, методом следов.



Решение:

Решение: Прямая *HK* лежит на грани ABB_1A_1. Точка *N* – лежит на грани BCC_1B_1. Эти грани имеют общую прямую BB_1. Поэтому, продолжим прямые *HK* и BB_1 до пересечения в некоторой точке, например *X*. Эта точка лежит на прямой BB_1, следовательно, принадлежит плоскости грани BCC_1B_1, значит на этой плоскости у нас есть две точки *X* и *N* – их можно соединить. Тогда прямая *XN* пересекается с ребром B_1C_1 в некоторой точке, например, точке *O*, которую можно будет соединять с точкой *K*.



Построение:

1) HK

2) HN

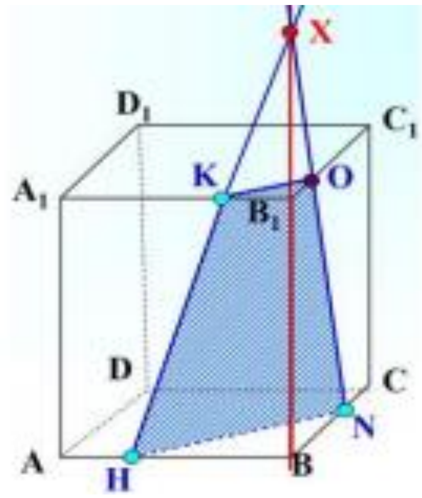
3) $HK \cap B_1B = X$

4) $XN \cap B_1C_1 = O$

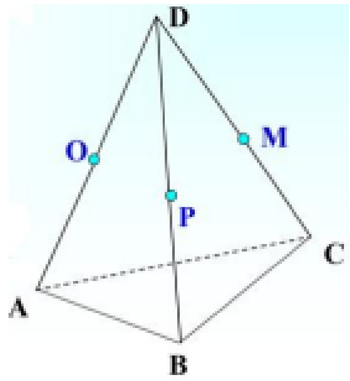
5) ON

6) KO

$HKON$ – искомое сечение



71. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки O, M и P.



Решение:

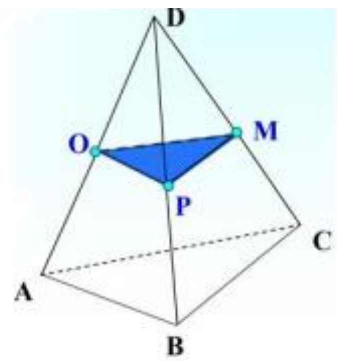
Построение:

1) OP

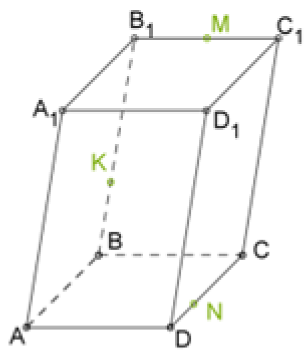
2) PM

3) MO

OMP – искомое сечение



72. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точки K, M и N.



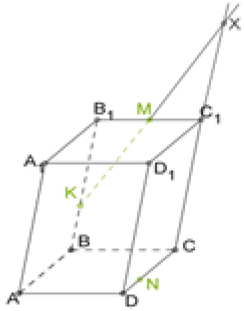
Решение:

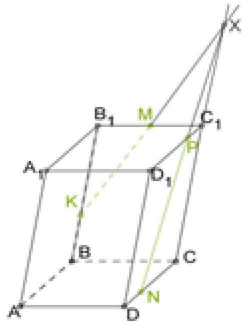
Построение:

1. *MK*

2. $MK \cap CC_1 = X$ непараллельные прямые в одной плоскости пересекаются.

3. *XN*



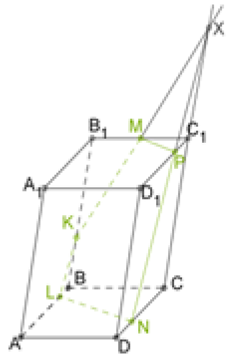


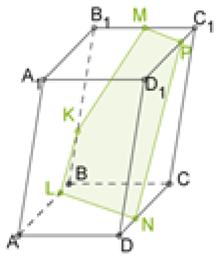
4. $XN \cap D_1C_1 = P$

5. *MP*

6. $NL \| MP$

MPNLK – искомое сечения





Практическая работа. Построение сечений многогранников

Критерии оценивания:

1 балл за каждую правильную линию,

1 балл за описание построения,

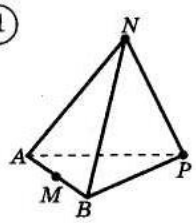
1 балл за штриховку сечения

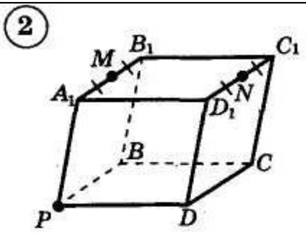
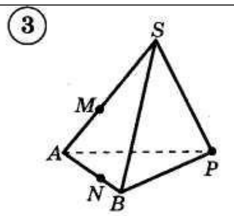
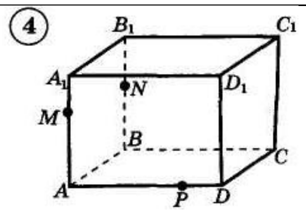
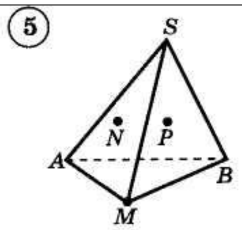
Вариант 1		Вариант 2.	
0 – 11 баллов	«2»	0 – 11 баллов	«2»
12 – 16 баллов	«3»	12 – 16 баллов	«3»
17 – 25	«4»	17 – 25	«4»
26 баллов и более	«5»	26 баллов и более	«5»

Вариант 1

1. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки *M*, *N* и *P*.

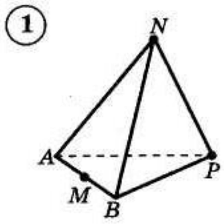
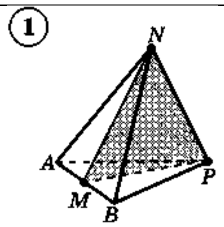
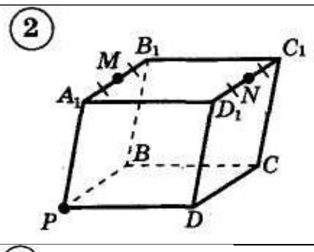
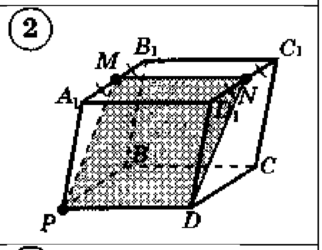
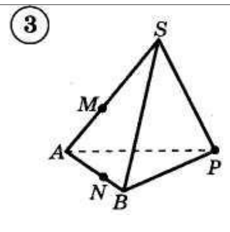
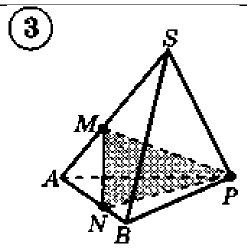
1

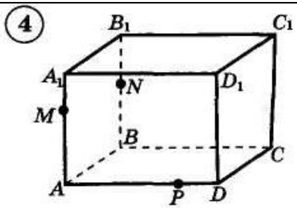
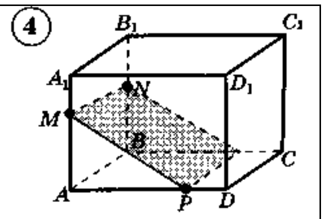
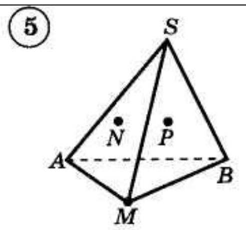
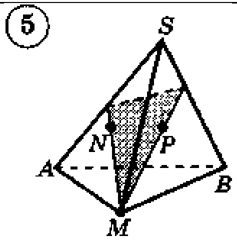


2. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точки *M*, *N* и *P*.	
3. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки *M*, *N* и *P*.	
4. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точки *M*, *N* и *P*.	
5. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки *M*, *N* и *P*, где *N* принадлежит плоскости (*AMS*), *P* принадлежит плоскости (*MSB*)	

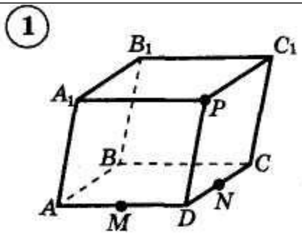
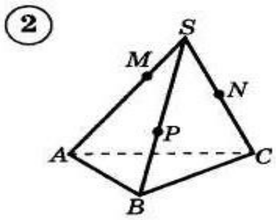
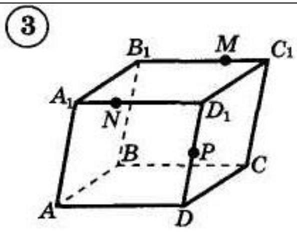
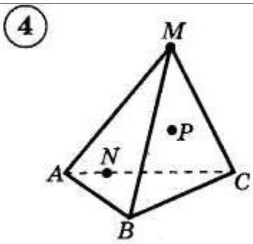
Ответы

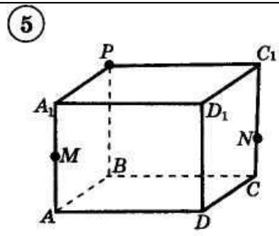
Вариант 1:

1. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки *M*, *N* и *P*.		
2. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точки *M*, *N* и *P*.		
3. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки *M*, *N* и *P*.		

4. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точки M, N и P.		
5. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M, N и P, где N принадлежит плоскости (AMS), P принадлежит плоскости (MSB)		

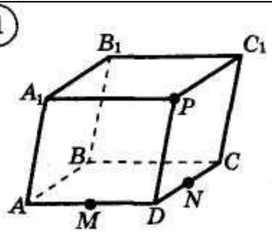
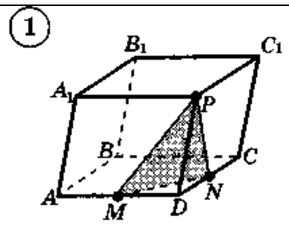
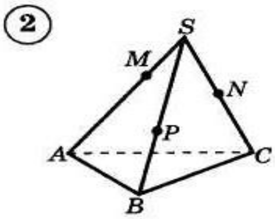
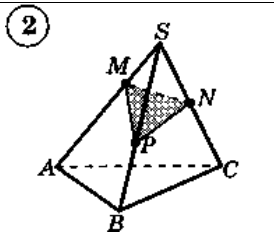
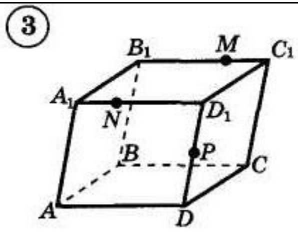
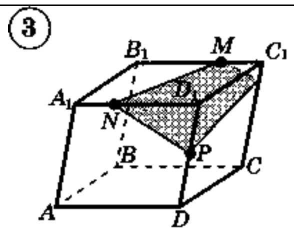
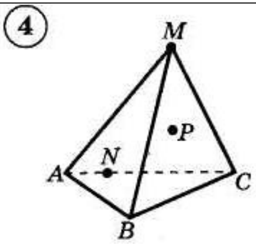
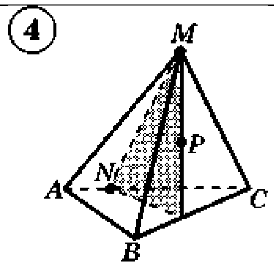
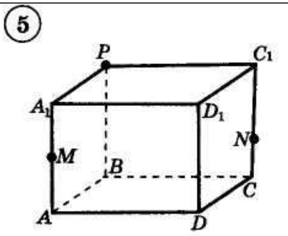
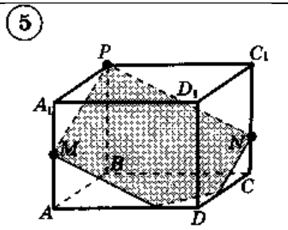
Вариант 2

1. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точки M, N и P.	
2. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M, N и P.	
3. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точки M, N и P.	
4. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M, N и P, где P принадлежит плоскости (BMC).	 $P \in BMC$

5. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точки *M*, *N* и *P*.	

Ответы

Вариант 2:

1. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точки *M*, *N* и *P*.		
2. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки *M*, *N* и *P*.		
3. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точки *M*, *N* и *P*.		
4. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки *M*, *N* и *P*, где *P* принадлежит плоскости (*BMC*).	$P \in BMC$	
5. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точки *M*, *N* и *P*.		

Занятие 12. Перпендикулярность прямой и плоскости

Повторяем теорию

Прямая называется *перпендикулярной плоскости*, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости (Рис.24).

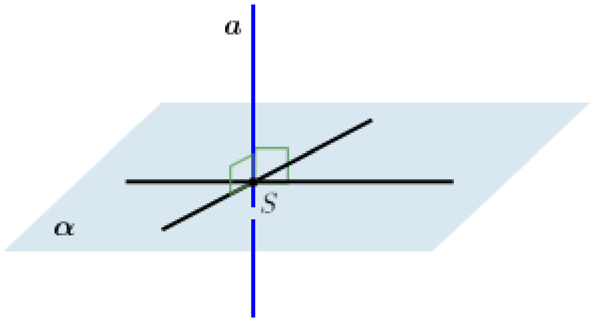


Рис. 24

Перпендикулярности прямой и плоскости:

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в данной плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Свойства:

- Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то эти прямые параллельны.
- Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой.
- Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.
- Если две различные плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то эти плоскости параллельны.

Проверяем себя

Т38. Заполните пропуски:

а) Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна третьей прямой, то другая прямая __________ к этой прямой.

Ответ: перпендикулярна.

б) Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они ______.

Ответ: параллельны.

Т39. Закончите предложение, чтобы получились верные утверждения:

а) две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен _______.

Ответ: 90^0.

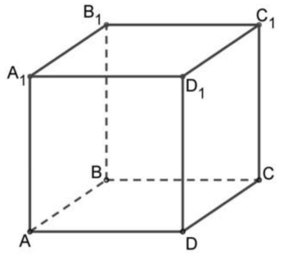
б) если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она ___________________ и другой.

Ответ: перпендикулярна

в) если две плоскости перпендикулярны прямой, то они______________.

Ответ: параллельны.

Т40. Выпишите:



а) ребра, перпендикулярные плоскости DCC_1;

б) плоскости перпендикулярные ребру BB_1.

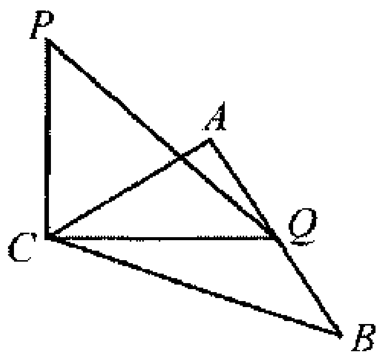
Ответ: а) AD, A_1D_1, BC, B_1C_1; б) ABC, $A_1B_1C_1$.

Решаем задачи

73. На готовых чертежах

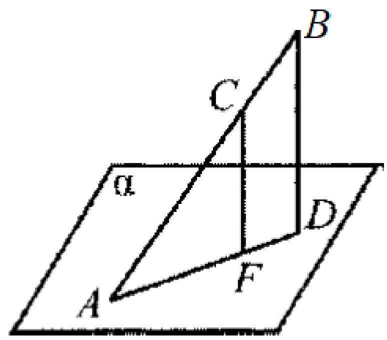
а) $CP \perp ABC$; $\angle ACB=90^0$; $AQ=QB$; $AB=4$; $PQ=3$.

CP–?

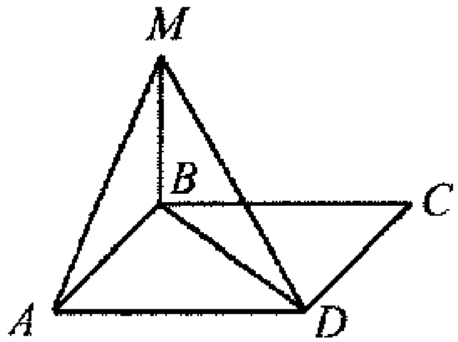


б) $AD \in \alpha$; $BD \perp \alpha$; $CF \perp \alpha$; $\frac{AF}{FD}=\frac{7}{3}$; $BD=6$.

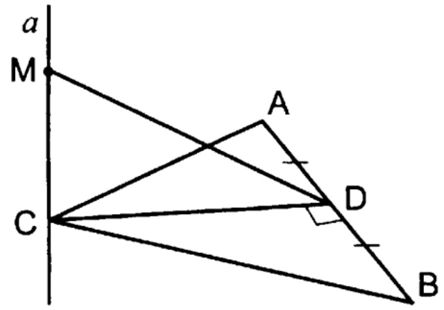
CF – ?



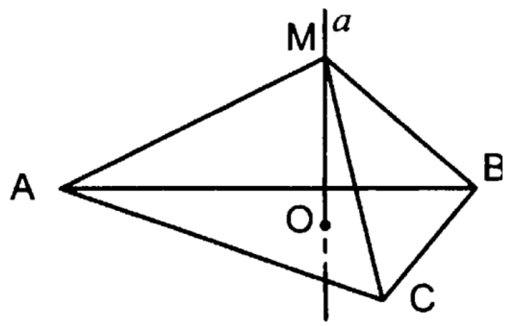
в) $BM \perp BC$; $BM \perp AB$; $ABCD$ – прямоугольник; $DM=8$; $\angle BDM=30^0$; $\angle MAB=45^0$. P_{ABCD} -?



г) Дано: $\angle ACB=90^0$, $AC=4$, $MD=3$.
Найти MC.

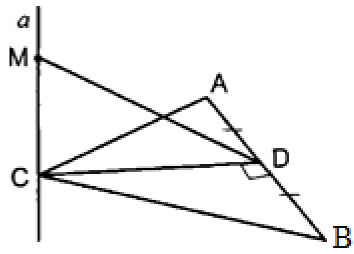


д) Дано: $\triangle ABC$ – равносторонний.
$AB=4\sqrt{3}$. O – центр окружности, описанной около $\triangle ABC$. $MO=3$. Найти MB.

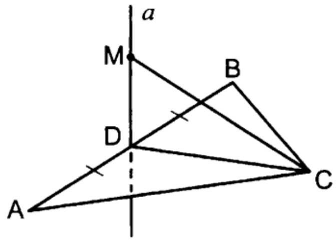


Ответ: а) $\sqrt{5}$; б) 4,2; в)$8+8\sqrt{2}$; г)1; д)5 .

74. Прямая a перпендикулярна плоскости ABC.
а) Дано:
$\angle ACB=90^0$; $BC=4$, $MC=1$.
Найти MD.



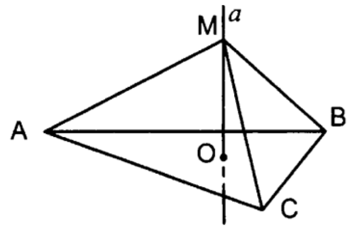
б) Дано:
$\triangle ABC$ – равносторонний, $AB=2\sqrt{3}$, $MD=4$.
Найти MC.



в) Дано:

$\triangle ABC$ – равносторонний, $AB=3\sqrt{3}$. O – центр окружности, описанной около $\triangle ABC$, MB=5.

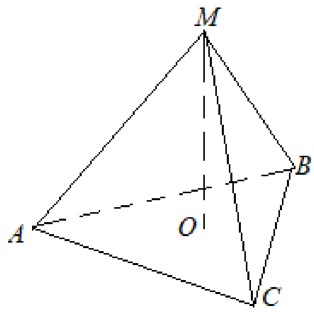
Найти MO.



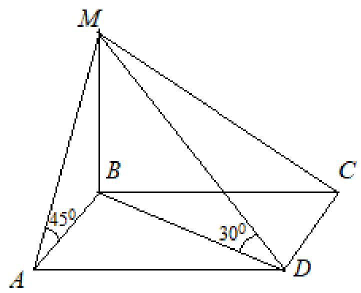
г) Дано:

O – центр окружности, описанной около $\triangle ABC$, $\angle ACB=120^0$, AB=6, MO=2.

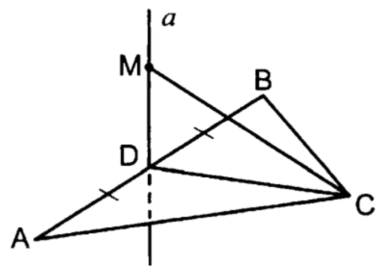
Найти MC.



д) Дано: $ABCD$ – прямоугольник, $MB \perp ABCD$. $\angle MAB=45^0$, $\angle MDB=30^0$, $MD=8\sqrt{2}$. Найти AD.

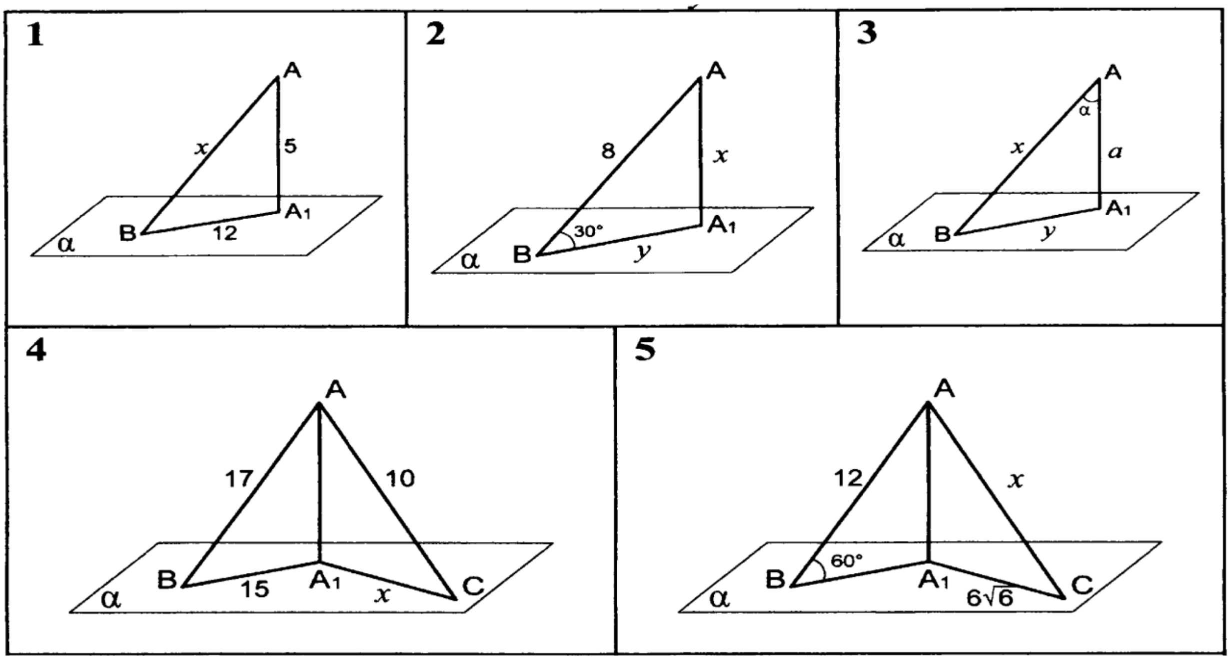


е) Дано: $\triangle ABC$ – равносторонний, $AB=\frac{10}{\sqrt{3}}$; MC=13. Найти MD.



Ответ: а) 3; б) 5; в) 4; г) 4; д) 8; е) 12.

75. AA_1 – перпендикуляр к плоскости α, AB и AC – наклонные. Найти x и y.



Ответы: 1) 13; 2) 4 и $4\sqrt{3}$*; 3) α/cosα и atgα; 4) 6; 5) 18.*

Занятие 13. Перпендикулярность прямой и плоскости

Повторяем теорию

Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащей на прямой, перпендикулярной к плоскости.

Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием* перпендикуляра (Рис. 25).

Расстояние от точки до плоскости равно *длине перпендикуляра* из точки на эту плоскость.

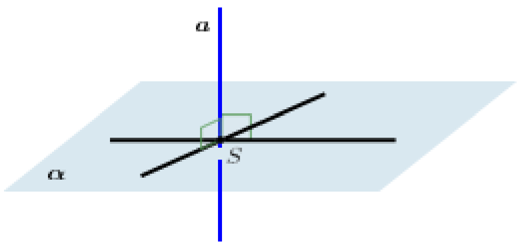


Рис. 25

Если из данной точки проведены перпендикуляр и наклонная, то перпендикуляр короче наклонной.

Проверяем себя

Т41. Закончите предложение, чтобы получилось верное утверждение:

а) Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она _______ к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Ответ: перпендикулярна.

б) Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая ________

Ответ: перпендикулярна плоскости.

Т42. Ответьте на вопросы:

а) Сколько перпендикуляров можно провести через данную точку к данной прямой на плоскости?

Ответ: один.

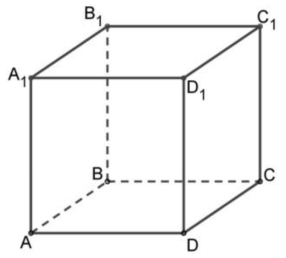
б) Сколько перпендикуляров можно провести через данную точку к данной прямой в пространстве?

Ответ: один.

в) Что можно сказать о двух (трех, четырех) прямых, перпендикулярных к одной плоскости?

Ответ: они параллельны.

Т43. Дан параллелепипед



а) Назовите:

1) рёбра, перпендикулярные к плоскости ABB_1.

Ответ: AD; A_1D_1; B_1C_1; BC.

2) плоскости, перпендикулярные ребру A_1D_1.

Ответ: (AA_1B_1); (DD_1C_1).

б) Определите взаимное расположение:

1) прямой AA_1 и плоскости (DCB).

Ответ: они перпендикулярны.

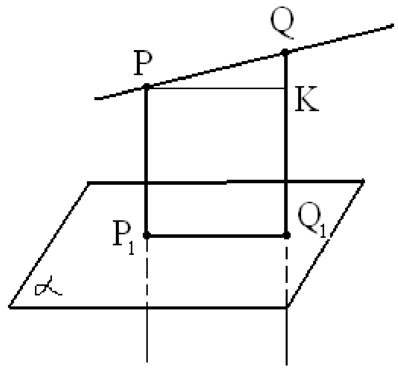
2) прямой B_1C_1 и плоскости (DCB).

Ответ: они параллельны.

<u>Решаем задачи</u>

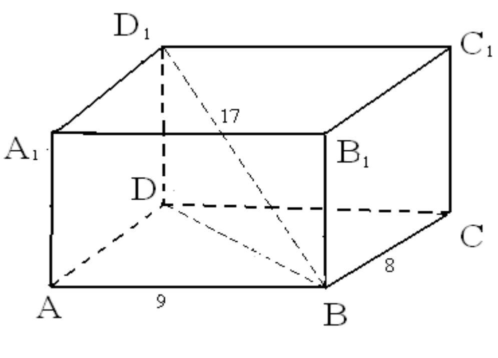
76. а) Через точки P и Q прямой PQ проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α и пересекающие её соответственно в точках P_1 и Q_1. Найдите P_1Q_1, если PQ=15 см; PP_1=21,5 см; QQ_1=33,5 см.

Ответ: 9.



б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB=9 см; BC=8 см; BD=17 см. Найдите площадь BDD_1B_1.

Ответ: $12\sqrt{145}$ *см*^{2}.



в) Отрезок MH пересекает плоскость α в точке K. Из концов отрезка проведены прямые ME и HP, перпендикулярные к плоскости α. HP=4 см; ME=12 см; HK=5 см. Найдите отрезок PE.

Ответ:12 см.

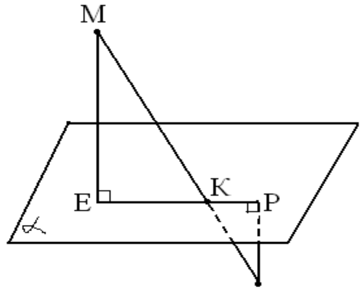
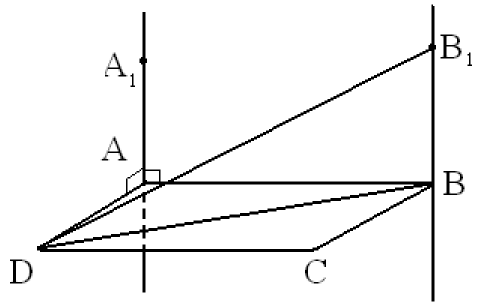


Рис.8

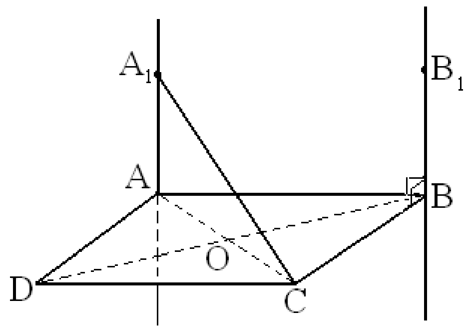
77. а) Через вершины A и B прямоугольника $ABCD$ проведены параллельные прямые AA_1 и BB_1, не лежащие в плоскости прямоугольника. Известно, что $AA_1 \perp AB$, $AA_1 \perp AD$. Найдите B_1B, если B_1D=25 см, AB=12 см, AD=16 см.



Ответ:15 см.

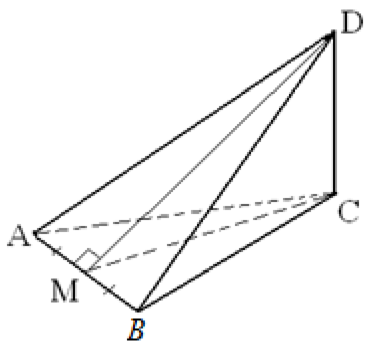
б) Через вершины A и B ромба $ABCD$ проведены параллельные прямые AA_1 и BB_1, не лежащие в плоскости ромба. Известно, что $BB_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AB$. Найдите A_1A, если A_1C=13 см, BD=16 см, AB=10 см.

Ответ: 5 см.



в) В треугольнике ΔABC; $AB=AC=BC$; $CD \perp (ABC)$; $AM=MB$; DM=15дм, CD=12 дм. Найти: $S_{\Delta ADB}$.

Ответ: $45\sqrt{3}$.



78. а) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 5. На рёбрах SA, AB, BC взяты точки P, Q, R соответственно так, что $PA=AQ=RC=2$.

1) Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD.

2) Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR.

Ответ: 3,5.

б) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что AK=1. Точки M и L – середины рёбер A_1C_1и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

1) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

2) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.

Ответ: 0,75.

в) В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На ребрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK=4$, $C_1L=5$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

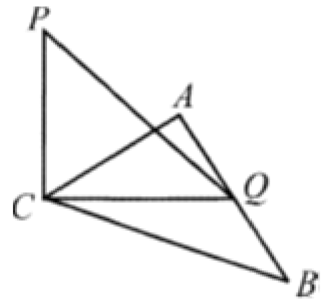
1) Докажите, что прямая AC_1 перпендикулярна плоскости γ.

2) Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости γ.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

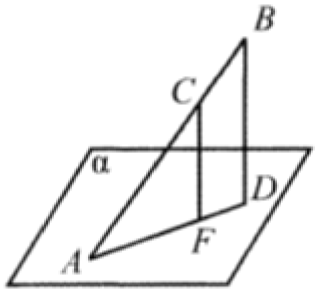
79. На готовых чертежах.

а) Дано: $CP\perp ABC$; $\angle ACB=90^0$; $AQ=QB$, $AB=4$, $PQ=3$. Найти CP.



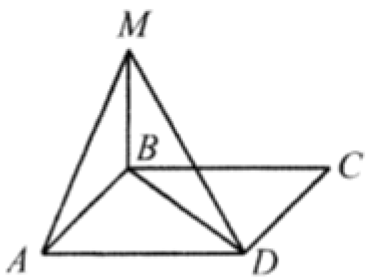
Ответ: $\sqrt{5}$.

б) Дано: $AD\in\alpha$, $BD\perp\alpha$, $CF\perp\alpha$; $AF:FD=7:3$; $BD=6$. Найти CF.



Ответ: 4,2.

в) Дано: $BM\perp BC$, $BM\perp AB$, $ABCD$-прямоугольник, $DM=8$, $\angle BDM=30^0$, $\angle MAB=45^0$. Найти P_{ABCD}.



Ответ: $8(1+\sqrt{2})$.

80. а) Точка S лежит вне плоскости прямоугольника $ABCD$. Известно, что $AB=8$, $BC=12$, $SA=6$, $SB=10$, $SD=6\sqrt{5}$. SA перпендикулярна плоскости ABC. Найдите расстояние от точки A до плоскости SCB.

Ответ: 4,8.

б) Точка *S* лежит вне плоскости прямоугольника *ABCD*. Известно, что *AB*= $6\sqrt{21}$, *BC*=5, *SA*=12, *SB*=30, *SD*=13. Прямая *SA* перпендикулярна плоскости *ABC*. Найдите расстояние от точки *A* до плоскости *SCB*.

Ответ: $\frac{12\sqrt{21}}{5}$.

в) В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* все ребра равны 5. На ребрах *SA*, *AB*, *BC* взяты точки *P*, *Q*, *R* соответственно так, что *PA*=*AQ*=*RC*=2. Плоскость *PQR* перпендикулярна ребру *SD*. Найдите расстояние от вершины *D* до плоскости *PQR*.

Ответ: 3,5.

Занятие 14. Углы между прямой и плоскостью

Повторяем теорию

Плоскость – это бесконечная плоская поверхность, не имеющая толщины и неограниченно расширяющаяся во все стороны (Рис 26).

Рис 26

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости (Рис 27).

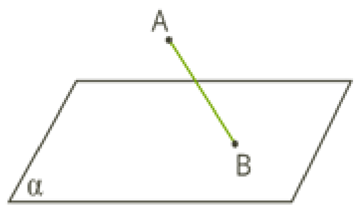


Рис 27

Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием наклонной.*

AB – наклонная,

B – основание наклонной.

Перпендикуляром, проведенным из данной точки к данной плоскости, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, и лежащей на прямой, перпендикулярной плоскости (Рис 28).

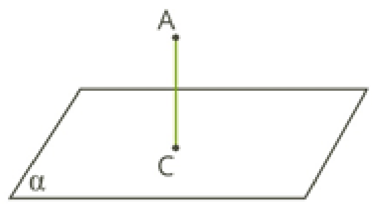


Рис 28

Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием перпендикуляра.*

AC – перпендикуляр,

C – основание перпендикуляра.

Расстояние от точки до плоскости называется *длиной перпендикуляра,* проведенного из этой точки к плоскости.

Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется *проекцией наклонной* (Рис 29).

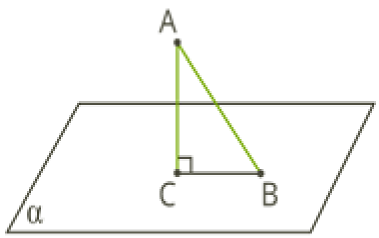


Рис 29

CB – проекция наклонной *AB* на плоскость α. Треугольник *ABC* прямоугольный.

Углом между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и её проекцией на плоскость (Рис 30).

$\angle CBA$ – угол между наклонной и плоскостью α.

Если $AD>AB$, то $DC>BC$.

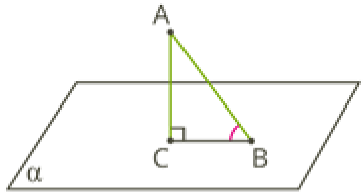


Рис 30

Если из данной точки к данной плоскости провести несколько наклонных, то большей наклонной соответствует большая проекция. $\angle DAB$ – угол между наклонными;

$\angle DCB$ – угол между проекциями (Рис 31).

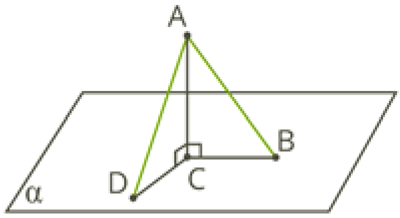


Рис 31

Отрезок DB – расстояние между основаниями наклонных (Рис 32).

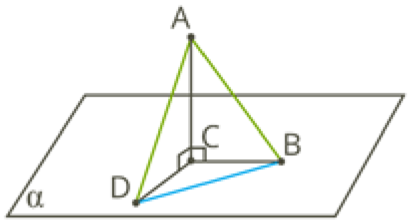


Рис 32

<u>Проверяем себя</u>

Т44. Заполните пропуски:

а) Углом между наклонной к плоскости и плоскостью называют угол между ______________________ и её проекцией на плоскость.

Ответ: этой наклонной.

б) Если прямая _______________ плоскости, то угол между прямой и плоскостью считается равным 90^0.

Ответ: перпендикулярна.

Т45. Укажите верные утверждения:

а) проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную этой прямой является отрезок;

б) проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную этой прямой является прямая;

в) проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную этой прямой является наклонная.

Ответ: б).

Т46. Укажите неверные утверждения:

а) проекцией прямой на плоскость, может быть точка;

б) перпендикуляр, опущенный из точки, не принадлежащей данной плоскости, длиннее наклонной, проведенной из этой же точки к данной плоскости;

в) углом между прямой и плоскостью называется угол именно между прямой и любой прямой в плоскости.

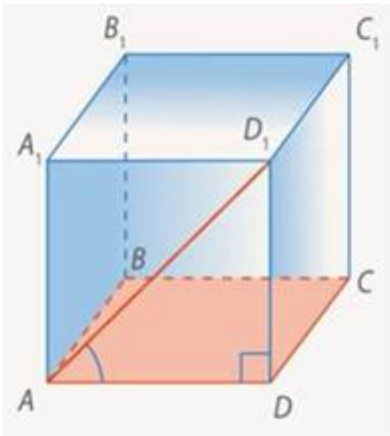
Ответ: б), в).

Решаем задачи

Чтобы научиться находить угол между прямой и плоскостью при работе с многогранниками, обосновывать или опровергать выдвигаемые предположения, рассмотрите алгоритм:

– Найдите точку пересечения прямой и плоскости.
– Найдите точку прямой, не лежащую в плоскости.
– Найдите проекцию данной точки на плоскость.
– Соедините эти точки. Полученная прямая – это и есть проекция прямой на плоскость.
– Выделите цветом полученный угол.

81. а) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямой AD_1 и плоскостью ABC.

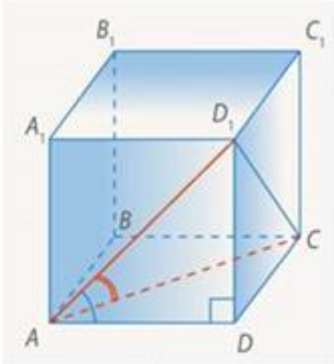


Решение: как мы знаем, искомый угол – это угол между самой прямой и ее проекцией.

Чтобы построить проекцию прямой на плоскость, достаточно взять две точки. Одной из них будет точка пересечения прямой и плоскости – точка A. Второй – проекция точки D_1 – точка D, т. к. боковое ребро куба перпендикулярно плоскости основания.

$DD_1 \perp ABC$, следовательно, точка D – проекция точки D_1 на плоскость ABC. Значит, искомый угол – это угол D_1AD, а он равен 45^0, так как это угол между диагональю и стороной квадрата.

Ответ: 45^0.



Обратите внимание, что если взять вместо AD другую прямую из плоскости основания, например, AC, то угол будет другим – в данном случае 60^0, так как треугольник D_1AC равносторонний (все стороны – диагонали граней).

Так что угол между прямой и плоскостью – это совсем не угол между прямой и любой прямой в плоскости.

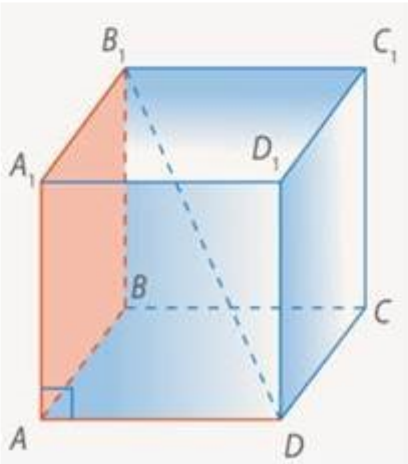
б) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. $AB=8$, $AD=6$, $AA_1=\frac{10}{\sqrt{3}}$. Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью ABC.

Ответ: 30^0.

в) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=3$, $AD=4$, $AA_1=5$. Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью ABC.

Ответ: 45^0.

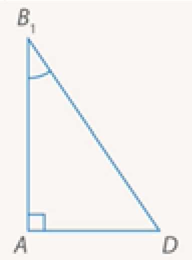
82. а) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямой B_1D и плоскостью ABB_1.



Как мы знаем, искомый угол – это угол между самой прямой и ее проекцией.

Чтобы построить проекцию прямой на плоскость, достаточно взять две точки. Одной из них будет точка пересечения прямой и плоскости – точка B_1. Второй – проекция точки D – точка A, т. к. боковое ребро куба перпендикулярно плоскости основания $DA \perp AA_1B_1$, следовательно, точка A – проекция точки D на плоскость AA_1B_1.

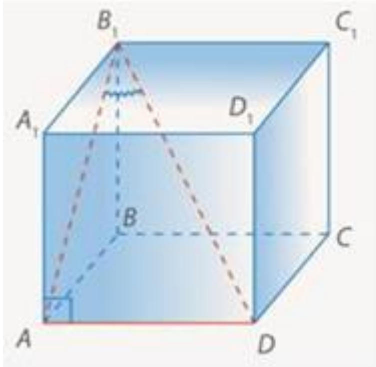
Значит, искомый угол – AB_1D.



Его можно найти из треугольника AB_1D.

Он прямоугольный, т.к. $DA \perp AA_1B_1$, $AB_1 \in AA_1B_1$, значит, $DA \perp AB_1$.

Выносной рисунок треугольника AB_1D.



Если взять сторону куба за 1, тогда $AD=1$, $AB_1=\sqrt{2}$ и $\angle AB_1D = arctg\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\angle AB_1D = arctg\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

б) Из точки O к плоскости α проведена наклонная, длина которой равна 17 см, проекция наклонной равна 15 см. На каком расстоянии от плоскости находится точка O?

Ответ: 8 см.

в) В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью DAB_1.

Ответ: 45^0.

83. а) В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой DB_1 и плоскостью CC_1D_1.

Ответ: $arctg\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

б) В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью AB_1D_1.

Ответ: $arctg\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

в) В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите синус угла между прямой AC_1 и плоскостью DCC_1.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

84. а) Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Найдите угол между прямой CD и плоскостью ABD.

Ответ: $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

б) Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Точка M – середина ребра AB. Найдите угол между прямой DM и плоскостью ADC.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$.

в) Дан правильный тетраэдр *ABCD*. Точки *K* и *N* – середины рёбер *BD* и *AC* соответственно. Найдите угол между прямой *KN* и плоскостью *ADC*.

Ответ: $arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$.

85. а) Дана правильная четырёхугольная пирамида *SABCD* с вершиной *S*. Все рёбра пирамиды равны. Найдите угол между прямой *AC* и плоскостью *ASB*.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

б) Дана правильная четырёхугольная пирамида *SABCD* с вершиной *S*. Все рёбра пирамиды равны, *K* – середина бокового ребра *SC*. Найдите угол между прямой *AK* и плоскостью *BSC*.

Ответ: $\arcsin\frac{2\sqrt{30}}{15}$.

в) Дана правильная четырёхугольная пирамида *SABCD* с вершиной *S*. Все рёбра пирамиды равны. Найдите угол между прямой *SA* и плоскостью *CSD*.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$.

86. а) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1. Точка *M* – середина ребра *BC*. Найдите угол между прямой A_1M и плоскостью *ABC*.

Ответ: $arctg\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

б) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1. Точка *M* – середина ребра *BC*. Найдите угол между прямой C_1M и плоскостью ABB_1.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{10}$.

в) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1. Точка *M* – середина ребра *BC*. Найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью A_1C_1M.

Ответ: $arctg\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Занятие 15. Углы между прямой и плоскостью

<u>Повторяем теорию</u>

Проекция – это геометрическое изображение на плоскости, полученное проведением перпендикуляров из всех точек фигуры на плоскость.

Под углом между прямой и плоскостью в пространстве мы подразумеваем угол между прямой и её отображением на плоскость (Рис 33).

Определение. Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.

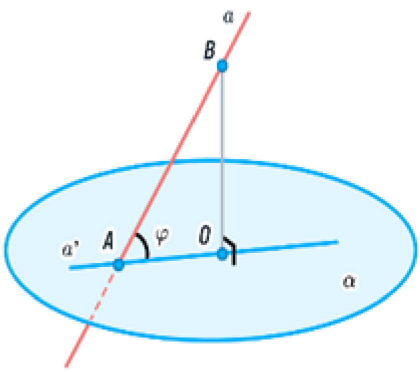


Рис. 33

Важное уточнение

1. Угол между прямой и плоскостью берется наименьший из двух углов между прямой и её проекцией на эту плоскость.

2. Если прямая перпендикулярна плоскости, то можно считать, что угол между ними равен 90°, что следует из определения перпендикулярности прямой и плоскости.

3. Если прямая параллельна плоскости, то у них нет ни одной общей точки, а значит, угол между ними не определяется.

Свойство угла между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью меньше любого из углов между прямой и произвольной прямой в плоскости.

<u>Проверяем себя</u>

Т47. Заполните пропуски:

а) Угол между прямой и плоскостью – это угол между ______________ и её _______________на эту плоскость.

Ответ: прямой, проекцией

б) *Проекция* — это геометрическое изображение на плоскости, полученное проведением ______________ из всех точек ____________ на плоскость.

Ответ: перпендикуляров, фигуры.

Т48. Укажите верные утверждения:

а) если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между прямой и плоскостью не определяется;

б) угол между прямой и плоскостью меньше любого из углов между прямой и произвольной прямой в плоскости;

в) угол между прямой и плоскостью больше любого из углов между прямой и произвольной прямой в плоскости.

Ответ: б).

Т49. Укажите неверные утверждения:

а) из двух углов между прямой и плоскостью выбираем больший из углов между данной прямой и её проекцией на эту плоскость;

б) если прямая параллельна плоскости, то угол между ними не определяется;

в) если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ними равен 90°.

Ответ: а).

Решаем задачи

87. а) Дан единичный тетраэдр *ABCD*. Найдите косинус угла между прямой *DC* и плоскостью *ABC*.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

б) В правильной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой *SA* и плоскостью *SBD*.

Ответ: 45^0.

в) В правильной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой *AB* и плоскостью *SAD*.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

88. а) Высота правильной треугольной пирамиды равна стороне основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 60^0.

б) Высота основания правильной треугольной пирамиды в 1,5 раза больше высоты пирамиды. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 45^0.

в) Высота правильной треугольной пирамиды втрое меньше стороны основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 30^0.

89. а) Боковые рёбра правильной треугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45^0 и равны $2\sqrt{6}$. Найдите сторону основания.

Ответ: 6.

б) Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол, равный 30^0. Найдите сторону основания, если высота пирамиды равна 5.

Ответ: 15.

в) Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол, равный 60^0. Найдите высоту пирамиды, если сторона основания равна 6.

Ответ: 6.

90. а) В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны. Найдите угол наклона бокового ребра к основанию. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 45^0.

б) В правильной четырёхугольной пирамиде диагональ основания равна боковому ребру. Найдите угол между прямой, содержащей боковое ребро, и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 60^0.

в) В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна половине ребра основания. Найдите угол между плоскостью основания и прямой, проходящей через середину ребра основания и вершину пирамиды, Ответ дайте в градусах.

Ответ: 45^0.

Задачи с развернутым ответом

91. а) В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Боковое ребро AS перпендикулярно к плоскости основания и равно $\sqrt{11}$. Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

Ответ: 30.

б) В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$ и $BC = 12$. Боковое ребро AS перпендикулярно к плоскости основания и равно $\sqrt{27}$. Найдите синус угла между прямой SC и плоскостью ASB.

Ответ: $\frac{6}{7}$.

в) В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Боковое ребро AS перпендикулярно к плоскости основания и равно $\sqrt{21}$. Найдите косинус угла между прямой SC и плоскостью ASD.

Ответ: $\frac{\sqrt{57}}{11}$.

Занятие 16. Проверочная работа

1 вариант

1. Основание AD трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α. Через точки B и C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках E и F соответственно.

а) Каково взаимное положение прямых EF и AB?

б) Чему равен угол между прямыми EF и AB, если $\angle ABC=150^0$? Ответ поясните.

Ответ: а) скрещивающиеся; б) 30^0.

2. Плоскость β пересекает стороны MP и KP треугольника MPK соответственно в точках N и E, причём $MK \parallel \beta$. Найдите NE, если $MN:NP=3:5$ и $MK=12$ см.

Ответ: 7,5.

3. Через вершину A квадрата $ABCD$ проведена прямая KA, не лежащая в плоскости квадрата. Найдите угол между KA и CD, если $\angle AKB=85^0$, $\angle ABK=45^0$.

Ответ: 50^0.

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $DB_1=21$ см, $CD=16$ см, $B_1C_1=11$ см. Найти длину ребра BB_1 и синус угла между диагональю DB_1 и плоскостью $ABCD$.

Ответ: 8; 8/21.

5. Через вершину равностороннего треугольника проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Найдите расстояние между этой прямой и противоположной стороной треугольника, если его площадь равна $12\sqrt{3}$.

Ответ: 6.

2 вариант

1. Треугольники ABC и ADC лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону AC. Точка P – середина стороны AD, а K – середина стороны DC.

а) Каково взаимное положение прямых PK и AB?

б) Чему равен угол между прямыми PK и AB, если $\angle ABC=40^0$ и $\angle BCA=80^0$? Ответ поясните.

Ответ: а) скрещивающиеся; б) 60^0.

2. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D такая, что $BD:BA$=1:3. Плоскость, параллельная прямой AC и проходящая через точку D, пересекает отрезок BC в точке D_1. Найдите AC, если DD_1= 4 см.

Ответ: 12.

3. Точка M не лежит в плоскости ромба $ABCD$. Найдите угол между MC и AD, если $\angle MBC=70^0$, $\angle BMC=65^0$.

Ответ: 45^0.

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, CA_1=11 см, C_1D_1=2 см, A_1D_1=6 см. Найти длину ребра CC_1 и синус угла между диагональю CA_1 и плоскостью $ABCD$.

Ответ: 9; 9/11.

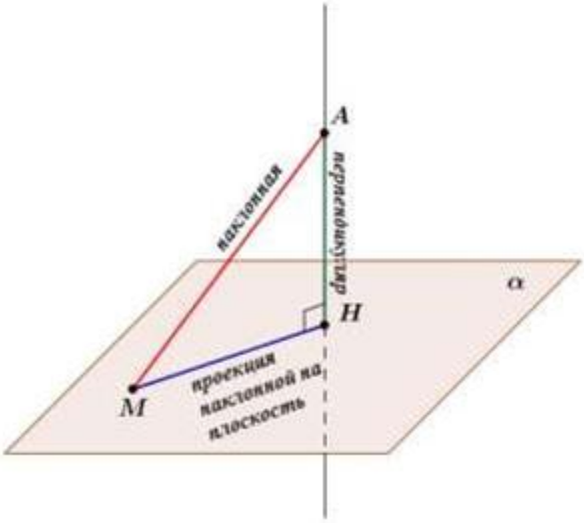
5. Через вершину равностороннего треугольника проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Найдите расстояние между этой прямой и противоположной стороной треугольника, если его периметр равен $42\sqrt{3}$.

Ответ: 21.

Занятие 17. Расстояние от точки до плоскости

Повторяем теорию

Проведем через точку A, не лежащую в данной плоскости прямую, перпендикулярную к этой плоскости и обозначим буквой H точку пересечения этой прямой с плоскостью. Отрезок AH называется *перпендикуляром*, проведенным из точки A к плоскости, а точка H – *основанием перпендикуляра.*



Отметим в плоскости какую-нибудь точку M, отличную от H, и проведем отрезок AM. Он называется *наклонной,* проведенной из точки A к плоскости, а точка M – *основанием наклонной*. Отрезок HM – называется *проекцией наклонной* на плоскость.

Перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости.

Наклонная, ее проекция и перпендикуляр образуют прямоугольный треугольник ABC, и длины этих отрезков по теореме Пифагора связаны отношением $AC^2=BC^2+AB^2$.

Длина перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости α, называется *расстоянием от точки A до плоскости α.*

Если из одной точки к плоскости проведены две наклонные, то равным наклонным соответствуют равные проекции, и наоборот: если проекции наклонных равны, то и сами наклонные равны.

Отсюда следует, что, *если в пирамиде боковые рёбра равны, то высота попадает в центр описанной вокруг основания окружности* (Рис. 34).

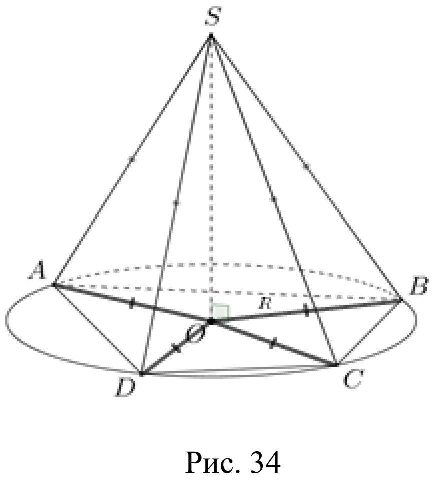


Рис. 34

З а м е ч а н и е 1. Если две плоскости параллельны, то все точки одной плоскости равноудалены от другой плоскости. Т.е. расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется *расстоянием между параллельными плоскостями* (Рис. 35).

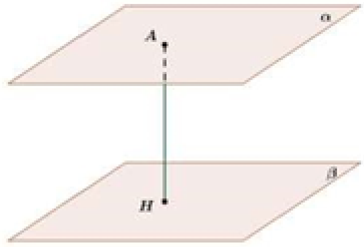


Рис. 35

З а м е ч а н и е 2. Если прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от этой плоскости. Т.е. расстояние от произвольной точки этой прямой до плоскости называется *расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью* (Рис. 36).

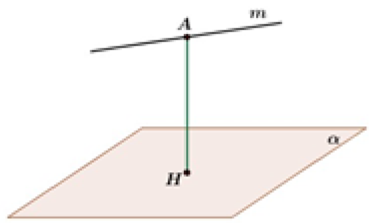


Рис. 36

З а м е ч а н и е 3. *Расстоянием между скрещивающимися прямыми* называется расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую, параллельно первой (Рис. 37).

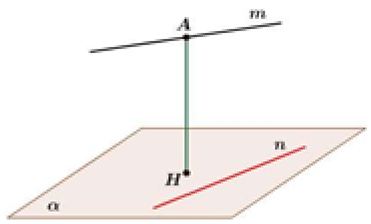


Рис. 37

<u>Проверяем себя</u>

Т50. Заполните пропуски:

а) Отрезок, проведенный из точки, не лежащей в плоскости, под прямым углом к этой плоскости, называется ___________.

Ответ: перпендикуляром.

б) Любой, отличный от перпендикуляра, отрезок, проведённый из точки к плоскости, называется ___________.

Ответ: наклонной.

в) Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки к плоскости, называется ____________.

Ответ: проекцией наклонной.

Т51. Укажите верные утверждения:

а) наклонная, ее проекция и перпендикуляр образуют тупоугольный треугольник;

б) если проекции наклонных равны, то равны и сами наклонные;

в) перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, больше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости.

Ответ: б).

Т52. Укажите неверные утверждения:

а) расстояние от точки A до плоскости α – это длина перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости α;

б) если из одной точки к плоскости проведены две наклонные, то больше та наклонная, проекция которой меньше;

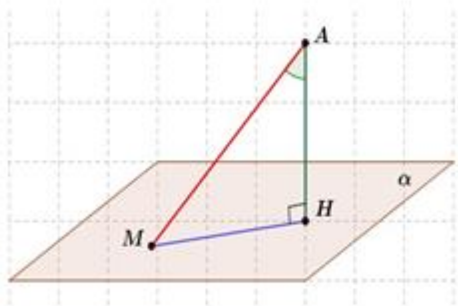
в) расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью – *это* расстояние от произвольной точки этой прямой до плоскости.

Ответ: б).

Решаем задачи

92. а) Найдите длину проекции наклонной AM, проведённой к плоскости α, если длина перпендикуляра AH к этой плоскости равна 5, а длина самой наклонной – 15.

Ответ: $10\sqrt{2}$.



б) Найдите длину перпендикуляра AH, проведённого из точки A к плоскости α, если длина наклонной AH и её проекции на эту плоскость равны соответственно 13 и 12.

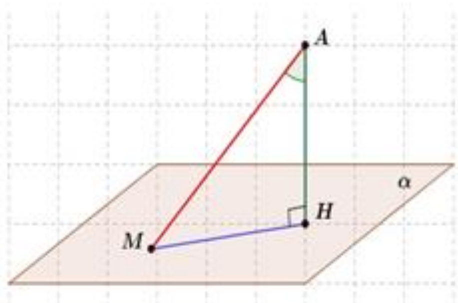
Ответ: 5.

в) Найдите длину наклонной AM, проведённой из точки A к плоскости α, если длина проекции наклонной и перпендикуляра AH к этой плоскости равны соответственно 35 и 12.

Ответ: 37.

93. а) Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AH и наклонная AM. AM=27, угол между наклонной и перпендикуляром равен 60^0. Найдите длину перпендикуляра AH.

Ответ: 13,5.



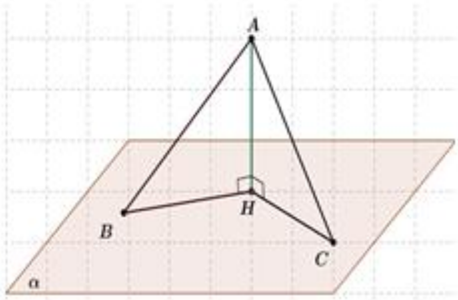
б) Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AH и наклонная AM. AH=21, угол между наклонной и её проекцией на плоскость равен 30^0. Найдите длину наклонной AM.

Ответ: 42.

в) Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AH и наклонная AM. MH=13, угол между наклонной и её проекцией на плоскость равен 60^0. Найдите длину наклонной AM.

Ответ: 26.

94. а) Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AH и наклонные AB и AC. Известно, что AB=10, AC=12, BH=8. Найдите проекцию наклонной AC.



Ответ: $6\sqrt{3}$.

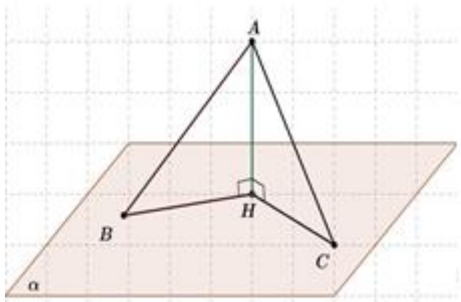
б) Из точки A, не лежащей в плоскости α, проведены к этой плоскости перпендикуляр AH и наклонные AB и AC так, что AB=17, AC=20, AH=10. Найдите проекции наклонных AB и AC.

Ответ: $\sqrt{189}$; $10\sqrt{3}$.

в) Из точки A, не лежащей в плоскости α, проведены к этой плоскости перпендикуляр AH=8 и наклонные AB и AC, длины которых равны соответственно 10 и 17. Найдите проекции наклонных AB и AC.

Ответ: 6; 15.

95. а) Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AH и наклонные AB и AC. AB=12, AC=$12\sqrt{2}$, угол между наклонной AB и её проекцией на плоскость равен 45^0. Найдите угол, образованный перпендикуляром и наклонной AC.



Ответ: 60^0.

б) Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AH и наклонные AB и AC. Углы, образованные перпендикуляром и наклонными равны соответственно 60^0 и 45^0. Найдите проекции наклонных на эту плоскость.

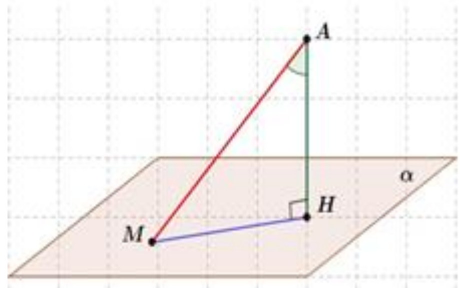
Ответ: $20\sqrt{3}$; 20.

в) Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AH и наклонные AB и AC. Углы, образованные перпендикуляром и наклонными равны соответственно 60^0 и 45^0. Длина перпендикуляра равна 30. Найдите длины наклонных на эту плоскость.

Ответ: 60; $30\sqrt{2}$.

96. а) Угол между перпендикуляром AH и наклонной AM, проведёнными из точки A к плоскости α равен 60^0. Проекция наклонной на эту плоскость равна $8\sqrt{3}$. Найдите AM.

Ответ: 16.



б) Угол между наклонной AM и её проекцией MH на плоскость α равен 60^0. Длина проекции равна $\sqrt{3}$. Найдите длину перпендикуляра AH к этой плоскости.

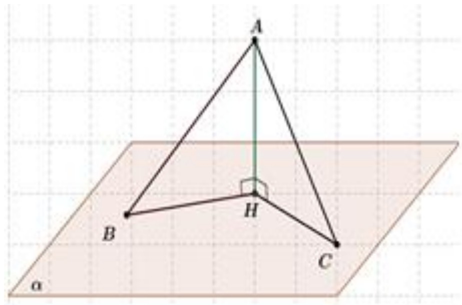
Ответ: 3.

в) Угол между перпендикуляром AH и наклонной AM, проведёнными из точки A к плоскости α, равен 30^0. $AH=\sqrt{3}$, найдите длину проекции наклонной на эту плоскость.

Ответ: 1.

97. а) Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AH и наклонные AB и AC. Длины наклонных равны соответственно 15 и 41. Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если проекции наклонных на эту плоскость пропорциональны числам 3 и 10.

Ответ: 9.



б) Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AH и наклонные AB и AC. Длины наклонных равны соответственно 10 и 17. Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если проекции наклонных на эту плоскость пропорциональны числам 2 и 5.

Ответ: 8.

в) Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AH и наклонные AB и AC. Длины наклонных равны соответственно 12 и 18. Найдите проекции наклонных на эту плоскость, если одна из них на 10 больше другой.

Ответ: 4; 14.

98. а) Один конец данного отрезка лежит в плоскости α, а другой находится от неё на расстоянии 12 см. Найдите расстояние от середины данного отрезка до плоскости α.

Ответ: 6 см.

б) Один конец данного отрезка лежит в плоскости α, а другой находится на некотором расстоянии от неё. Найдите это расстояние, если расстояние от середины данного отрезка до плоскости α равно 3,5 см.

Ответ: 7 см.

в) Угол между перпендикуляром и наклонной, проведёнными из одной и той же точки к плоскости α, равен 30°. Найдите расстояние от середины наклонной до плоскости, если проекция наклонной на эту плоскость равна 10 см.

Ответ: $5\sqrt{3}$ *см.*

99. а) Концы отрезка отстоят от плоскости α на расстояниях 2 см и 9 см. Найдите расстояние от середины отрезка до плоскости α.

Ответ: 5,5 см.

б) Расстояние от одного из концов отрезка до плоскости α равно 3 см. Найдите расстояние от другого конца отрезка до плоскости, если расстояние от его середины до этой плоскости равно 5 см.

Ответ: 7 см.

в) Концы отрезка отстоят от плоскости α на расстояниях 3,25 см и 7,25 см. Найдите расстояние от середины отрезка до плоскости α.

Ответ: 5,25 см.

Задачи с развернутым ответом

100. Расстояние от точки D до каждой из вершин правильного треугольника MNP равно 16 см. Найдите расстояние от точки D до плоскости MNP, если MN=12 см.

Ответ: $4\sqrt{13}$ *см.*

101. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Из точки O проведён к плоскости квадрата перпендикуляр OP. Найти расстояние от точки P до стороны BC, если AD=6 см, OP=4 см.

Ответ: $3\sqrt{5}$ *см.*

Занятие 18. Перпендикуляр и наклонная к плоскости

<u>Повторяем теорию</u>

Теорема о трёх перпендикулярах: прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной (Рис. 38).

Важно отметить, что прямая b не обязана проходить через точку B.

Обратная теорема: прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к её проекции.

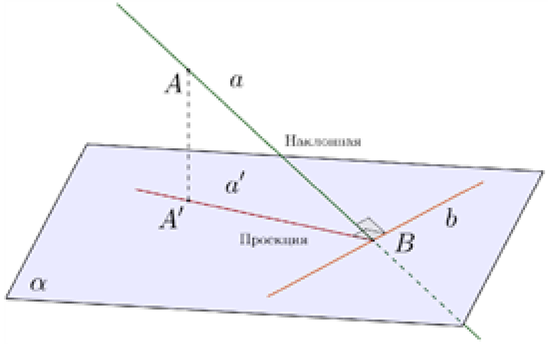


Рис. 38

Прямоугольной или ортогональной проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, проведённого из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости.

Чтобы построить *проекцию фигуры* на плоскость, нужно построить проекции всех точек этой фигуры на данную плоскость.

Пусть на плоскость α мы спроецировали многоугольник, тогда верна формула: *отношение площади проекции фигуры $S_{пр}$ к площади фигуры S равно косинусу угла γ между плоскостью α и плоскостью, в которой лежит многоугольник* (Рис. 39).

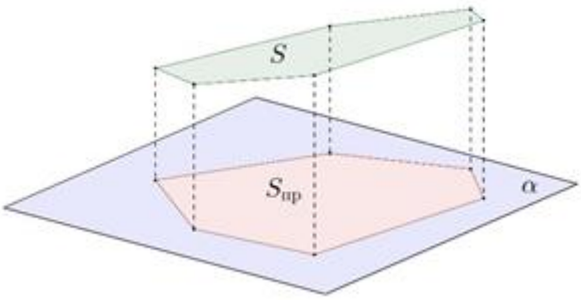


Рис. 39

Проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, *является прямая.*

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и её проекцией на плоскость. Угол φ_0 между данной прямой AM и плоскостью α – *наименьший из всех углов φ,* которые данная прямая образует с

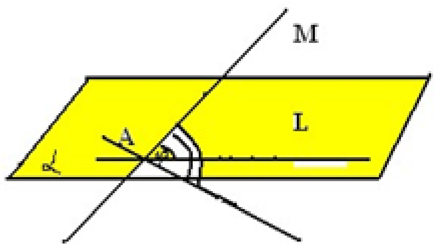


Рис. 40

прямыми, проведёнными в плоскости α
через точку A (Рис. 40).

Если прямая перпендикулярна к плоскости, то ее проекцией на эту плоскость является точка пересечения этой прямой с плоскостью. В таком случае *угол между прямой и плоскостью равен* $90°$. *Если данная прямая параллельна плоскости*, то ее проекцией на плоскость является прямая, параллельная данной. В этом случае считают, что *угол между прямой и плоскостью равен* 0^0.

Проверяем себя

Т53. Заполните пропуски:

а) Если две плоскости параллельны, то все точки одной плоскости _____________ от другой плоскости.

Ответ: равноудалены.

б) *Расстоянием между скрещивающимися прямыми* называется _____________ между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, _____________ через другую прямую, параллельно первой.

Ответ: расстояние, проходящей.

в) Расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется _____________ *между параллельными плоскостями*.

Ответ: *расстоянием.*

Т54. Восстановите утверждение о соотношении перпендикуляра и наклонной из частей:

1) проведённый из данной точки к плоскости; 2) проведённой из той же точки; 3) меньше любой наклонной; 4) перпендикуляр.

а) 4231;

б) 4132;

в) 2134

Ответ: б).

Т55. Укажите неверные утверждения:

а) если в пирамиде боковые рёбра равны, то высота попадает в центр описанной вокруг основания окружности;

б) если из одной точки к плоскости проведены две наклонные, то больше та наклонная, проекция которой больше;

в) расстояние от точки A до плоскости α – это длина наклонной, проведённой из точки A к плоскости α.

Ответ: *в).*

<u>Решаем задачи</u>

102. а) Из точки *O* к плоскости α проведена наклонная, длина которой равна 17 см, проекция наклонной равна 15 см. На каком расстоянии от плоскости находится точка *O*?

Ответ: 8 см.

б) Точка *O* находится на расстоянии 12 дм от плоскости α. Найдите длину наклонной, проведённой из точки *O* к этой плоскости, если длина её проекции равна 35 дм.

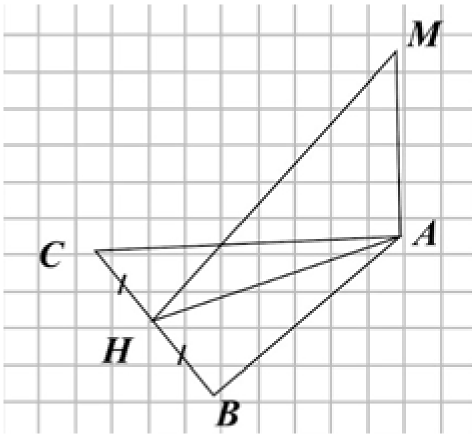
Ответ: 37 дм.

в) Найдите длину проекции наклонной, проведённой из точки *O* к плоскости α, если длина наклонной равна 29 см, а расстояние от точки *O* до этой плоскости равно 21 см.

Ответ: 20 см.

103. а) Прямая *AM* перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника *ABC*, точка *H* - середина стороны *BC*. Найдите угол между прямой *MH* и плоскостью *ABC*, если *AM*=*a*, *HB*=*a*.

Ответ: 30^0.



б) Прямая *AM* перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника *ABC*, точка *H* – середина стороны *BC*. Найдите угол между прямой *MH* и плоскостью *ABC*, если *AM*=5, *HB*=5.

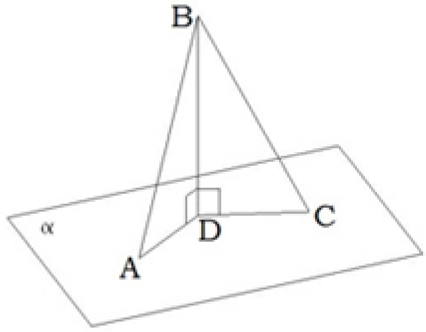
Ответ: 30^0.

в) Прямая *AM* перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника *ABC*, точка *H* – середина стороны *BC*. Найдите угол между прямыми *MH* и *MA*, если *AM*=*a*, *HB*=*a*.

Ответ: 60^0.

104. а) Известно, что отрезок *BD* перпендикулярен плоскости *α*, $\angle BAD=30^0$, $\angle BCD=60^0$. Укажите меньшую из проекций наклонных на плоскость *α*.

Ответ: *CD*.



б) Известно, что отрезок *BD* перпендикулярен плоскости α, $\angle BAD=30^0$, $\angle BCD=60^0$. Укажите большую из наклонных, проведённых из точки B к плоскости *α*.

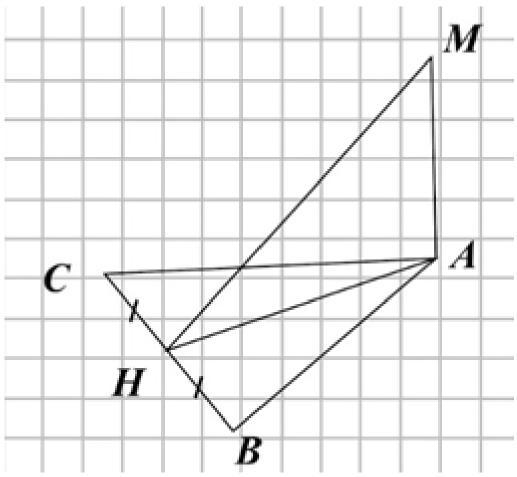
Ответ: *AB*.

в) Известно, что отрезок *BD* перпендикулярен плоскости α, $\angle BAD=30^0$, $\angle BCD=60^0$, и *AD* большая из проекций наклонных, проведённых из точки B к плоскости *α*. Укажите меньшую из наклонных.

Ответ: *BC*.

105. а) Прямая *AM* перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника *ABC*, точка *H* середина стороны *BC*. Найдите угол *MHB*.

Ответ: 90^0.



б) Прямая *AM* перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника *ABC*, точка *H* середина стороны *BC*. Назовите все прямые углы.

Ответ: $\angle MHB$, $\angle MHC$, $\angle AHB$, $\angle AHC$, $\angle MAH$, $\angle MAB$, $\angle MAC$.

в) Прямая *AM* перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника *ABC*, точка *H* середина стороны *BC*. Постройте и назовите все острые углы.

Ответ: $\angle MHA$, $\angle MCH$, $\angle MCA$, $\angle MBH$, $\angle MBA$, $\angle CAH$, $\angle BAH$, $\angle ACH$, $\angle ABH$, $\angle CAB$.

106. а) Из точки *M* к плоскости *α* проведены две наклонные, длины которых 101 см и 29 см. Расстояние от точки *M* до плоскости α равно 20 см. Найдите отношение проекций наклонных на эту плоскость (меньшей к большей).

Ответ: 7:33.

б) Из точки M к плоскости α проведены две наклонные, длины которых 13 см и 15 см. Расстояние от точки M до плоскости α равно 12 см. Найдите отношение проекций наклонных на эту плоскость (меньшей к большей).

Ответ: 5:9.

в) Из точки M к плоскости α проведены две наклонные, длины которых 41 см и 15 см. Расстояние от точки M до плоскости α равно 9 см. Найдите отношение проекций наклонных на эту плоскость (меньшей к большей).

Ответ: 3:10.

Задачи с развернутым ответом

107. Отрезок AB длины 16 см пересекает плоскость α в точке O. Расстояния от концов отрезка до плоскости α соответственно равны 3 см и 5 см. Найдите острый угол, который образует отрезок AB с плоскостью α.

Ответ: 30^0.

108. Дан треугольник ABC. $\angle ACB=90^0$. Точка O – центр окружности, описанной около этого треугольника. $AM=MC$. Отрезок OD перпендикулярен плоскости треугольника. AB=10, AC=6, $DO=2\sqrt{3}$. Найдите MD.

Ответ: $2\sqrt{7}$.

Занятие 19. Двугранный угол, линейный угол двугранного угла

Повторяем теорию

Определение 1. *Двугранным углом* называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a, не принадлежащими одной плоскости.

Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются *гранями*. Прямая a – общая граница полуплоскостей – называется *ребром* двугранного угла.

Определение 2. *Линейным углом двугранного угла* называется угол, образованный лучами с вершиной на граничной прямой, стороны которого лежат на гранях двугранного угла и перпендикулярны граничной прямой.

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

Все линейные углы двугранного угла равны друг другу (Рис. 41).

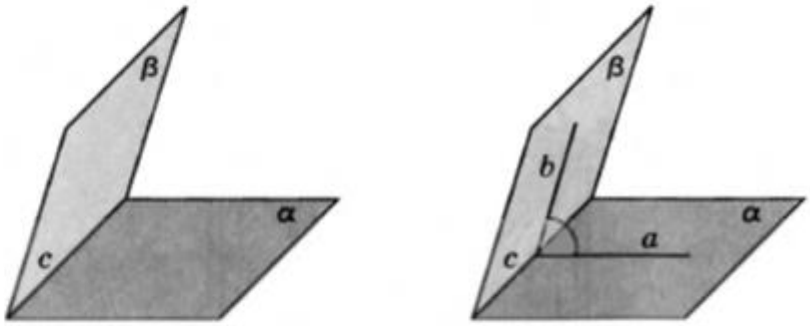


Рис. 41

Величина двугранного угла принадлежит интервалу $0^0<\alpha<180^0$. Величина угла между пересекающимися плоскостями принадлежит промежутку $0^0<\alpha<90^0$. Угол между двумя параллельными плоскостями считается равным нулю.

Чтобы построить линейный угол между двумя плоскостями, часто находят отрезок, перпендикулярный к одной из плоскостей, и концы которого лежат в этих плоскостях. Затем, из основания этого перпендикуляра проводят прямую перпендикулярно к линии пересечения этих двух плоскостей, и тогда перпендикуляр из другого конца отрезка к линии пересечения плоскостей автоматически попадет в ту же точку (по теореме о трех перпендикулярах).

В некоторых задачах является эффективным метод, при котором вместо угла между пересекающимися плоскостями ищется угол *между плоскостями, параллельными рассматриваемым* (или между одной из данных плоскостей и плоскостью, параллельной другой из них).

Также не следует забывать, что *угол между двумя плоскостями равен углу между прямыми, которые к этим плоскостям перпендикулярны*, т.е. нахождение угла между плоскостями можно свести к нахождению угла между прямыми.

<u>Проверяем себя</u>

Т56. Вставьте пропущенные слова:

а) Общая граница полуплоскостей называется ______________ ______________ угла.

Ответ: ребром двугранного.

б) Гранями двугранного угла являются ______________, не лежащие в одной плоскости.

Ответ: полуплоскости.

в) Все линейные углы двугранного угла ____________ друг другу.

Ответ: равны.

г) Величиной двугранного угла называется ____________ ____________ угла.

Ответ: величина линейного.

Т57. Выберите верное утверждение:

а) Верно ли, что угол BAC – линейный угол двугранного угла, если лучи AB, AC перпендикулярны его ребру?

б) Верно ли, что угол BAC – линейный угол двугранного угла, если лучи AB, AC лежат на гранях двугранного угла?

в) Верно ли, что угол BAC – линейный угол двугранного угла, если лучи AB, AC перпендикулярны его ребру, а точки B и C лежат на его гранях?

Ответ: в).

Т58. Выберите верное утверждение:

а) Угол ABC – линейный угол двугранного угла с ребром a. Тогда прямая a перпендикулярна плоскости ABC?

б) Линейный угол двугранного угла равен 80^0. Тогда в одной из граней угла существует прямая, перпендикулярная другой грани.

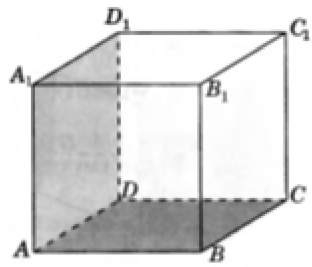
в) Все прямые, перпендикулярные данной плоскости и пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости.

Ответ: а), в).

Решаем задачи

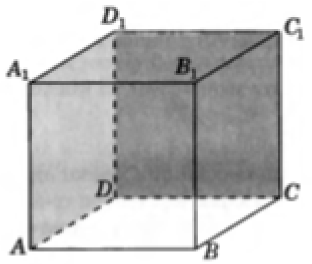
109. а) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и ADD_1.

Ответ: 90⁰.



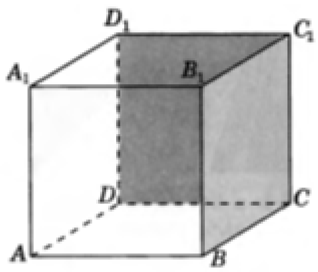
б) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол плоскостями CDD_1 и ADD_1.

Ответ: 90^0.



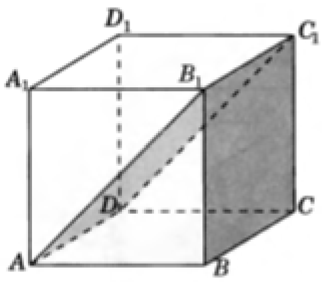
в) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями CDD_1 и BCC_1.

Ответ: 90^0.



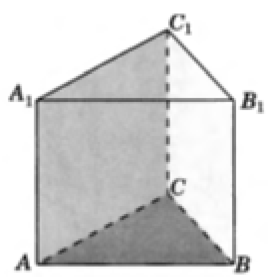
110. а) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями BCC_1 и AB_1C_1.

Ответ: 45^0.



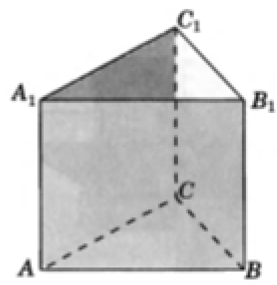
б) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ найдите угол между плоскостями ABC и ACC_1.

Ответ: 90^0.



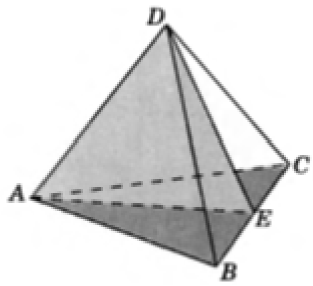
в) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ найдите угол между плоскостями ABB_1 и ACC_1.

Ответ: 60^0.



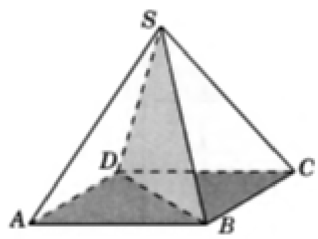
111. а) В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E – середина ребра BC. Найдите угол между плоскостями ABC и ADE.

Ответ: 90°.



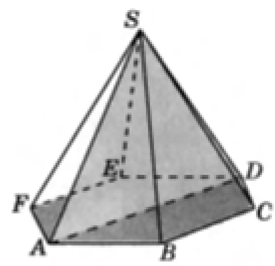
б) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ найдите угол между плоскостями ABC и SBD.

Ответ: 90°.



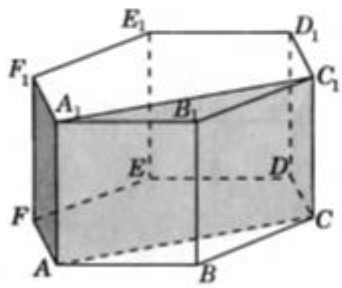
в) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ найдите угол между плоскостями ABC и SAD.

Ответ: 90°.



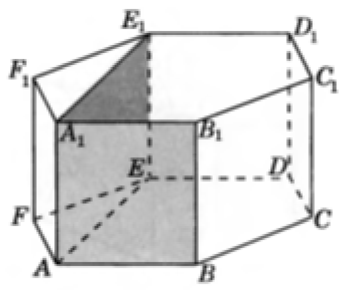
112. а) В правильной шестиугольной призме $ABC....F_1$ найдите угол между плоскостями AFF_1 и ACC_1.

Ответ: 90°.



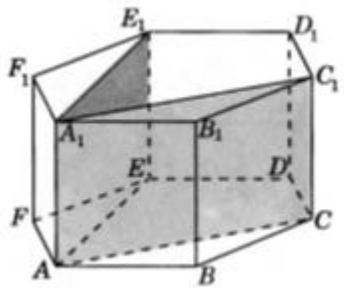
б) В правильной шестиугольной призме $ABC....F_1$ найдите угол между плоскостями ABB_1 и AEE_1.

Ответ: 90°.



в) В правильной шестиугольной призме $ABC....F_1$ найдите угол между плоскостями ACC_1 и AEE_1.

Ответ: 60^0.



Задачи с развернутым ответом

113. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка S – вершина. Точка M – середина ребра SA, точка K – середина ребра SB. Найдите угол между плоскостями CMK и ABC, если SC=6, AB=4.

Ответ: $arctg\,\frac{\sqrt{23}}{5}$.

114. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Все рёбра пирамиды равны. Найдите угол между плоскостями SAD и SBC.

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

Занятие 20. Двугранный угол, линейный угол двугранного угла

Повторяем теорию

Угол между двумя плоскостями равен углу между прямыми, которые к этим плоскостям перпендикулярны, т.е. нахождение угла между плоскостями можно свести к нахождению угла между прямыми (Рис. 42).

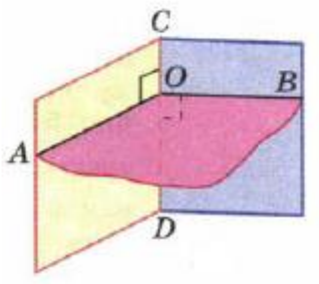


Рис. 42

Для нахождения угла между двумя плоскостями можно использовать *теорему о площади ортогональной проекции многоугольника.*

При применении этого метода угол φ между плоскостями α и β можно вычислить, используя формулу $S_{пр} \cos\varphi = S$, где S – площадь многоугольника, лежащего в плоскости α, $S_{пр}$ – площадь его ортогональной проекции на плоскость β (Рис. 43).

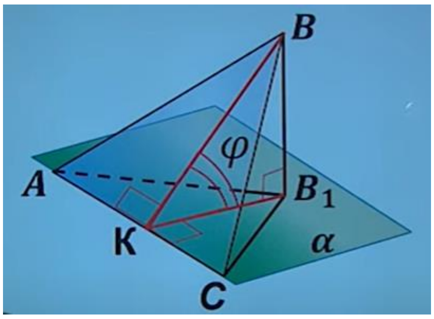


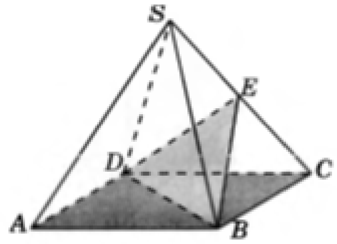
Рис. 43

Обычно этот метод применяют при вычислении угла между плоскостью сечения и плоскостью какой-либо грани многогранника (часто в качестве такой грани выступает основание пирамиды или призмы). Этот метод применяют, когда нахождение площадей является более простой задачей, чем непосредственное вычисление двугранного угла.

Нахождение угла между плоскостями координатным методом. Так как угол между двумя плоскостями равен углу между прямыми, которые к этим плоскостям перпендикулярны, то можно сказать, что угол между плоскостями равен углу между нормальными векторами этих плоскостей. Поэтому если удалось найти нормальные вектора этих плоскостей n_1 и n_2, то используя скалярное произведение находят косинус угла между ними, который будет являться косинусом угла между плоскостями. Если косинус получился равен отрицательному значению, то берем это значение по модулю.

Проверяем себя

Т59. На чертеже изображена правильная пирамида $SABCD$, все рёбра которой равны 1, точка E – середина ребра SC. Вставьте пропущенные слова.



а) Плоскости ABC и BED пересекаются по прямой ____________.

Ответ: BD.

б) По условию пирамида правильная, значит ΔSBC _____________ ΔSDC, медианы BE и DE ________________ .

Ответ: *равен, равны*.

в) Треугольник BED ______________________________.

Ответ: *равнобедренный*.

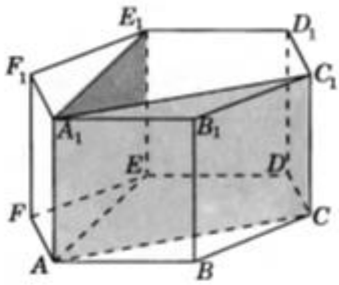
г) Высота из вершины E ΔBED пересекает BD в __ ____________. Диагонали основания AC и BD пересекаются под _____________ ______ и точкой пересечения _______ _________.

Ответ: *его середине*; *прямым углом; делятся пополам*.

д) Пусть точка пересечения диагоналей – точка O. Тогда угол EOC – _____ ________ ______________ угла между плоскостями ABC и _____.

Ответ: *линейный угол двугранного*; BED.

Т60. На чертеже изображена правильная шестиугольная призма. Выберите неверное утверждение:



а) Четырёхугольник ACC_1A_1 является параллелограммом.

б) AC перпендикулярно AA_1.

в) AE перпендикулярно AF.

г) Угол CAE – линейный угол двугранного угла между плоскостью CAA_1E и плоскостью основания.

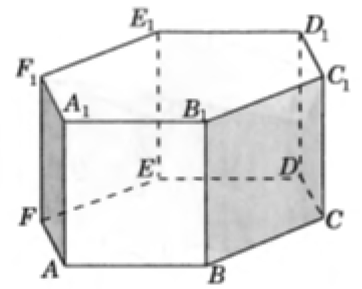
д) Угол CAE равен 60^0.

Ответ: а), в).

Решаем задачи

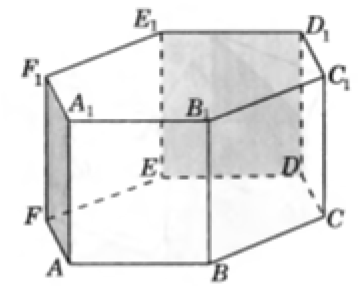
115. а) В правильной шестиугольной призме $ABC....F_1$ найдите угол между плоскостями AFF_1 и BCC_1.

Ответ: 60^0.



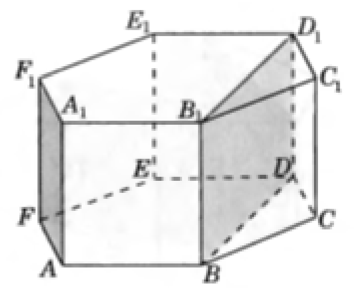
б) В правильной шестиугольной призме $ABC....F_1$ найдите угол между плоскостями AFF_1 и DEE_1.

Ответ: 60^0.



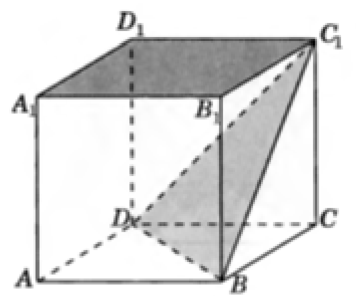
в) В правильной шестиугольной призме $ABC....F_1$ найдите угол между плоскостями AFF_1 и BDD_1.

Ответ: 30^0.



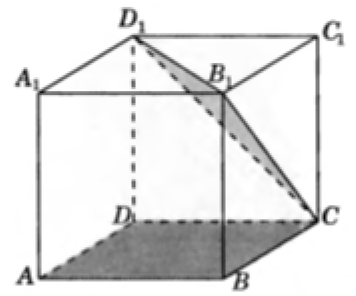
116. а) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и BDC_1.

Ответ: $\sqrt{2}$.



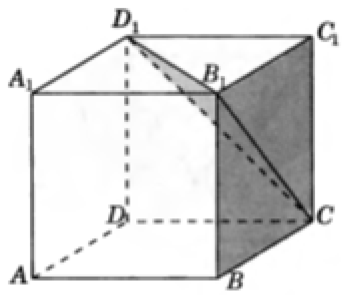
б) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями ABC и B_1D_1C.

Ответ: $\sqrt{2}$.



в) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями BCC_1 и B_1D_1C.

Ответ: $\sqrt{2}$.



117. а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: AB=8, AD=6, CC_1=6. Найдите угол между плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1.

Ответ: $\arccos\frac{9}{41}$.

б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: AB=8, AD=6, CC_1=5. Найдите угол между плоскостями BDD_1 и AD_1B_1.

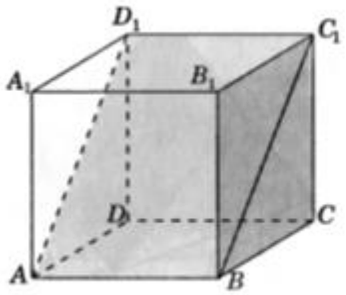
Ответ: $arctg\frac{24}{25}$.

в) Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Боковое ребро AA_1 равно стороне основания $ABCDEF$. Найдите угол между плоскостями ABC и DB_1F_1.

Ответ: $arctg\frac{2}{3}$.

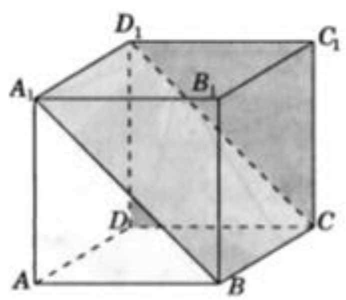
118. а) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями ABC_1 и BCC_1.

Ответ: 90^0.



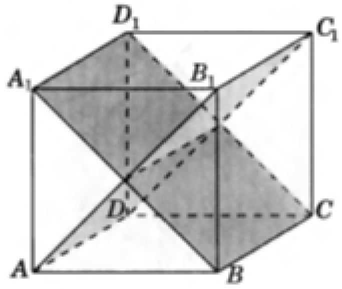
б) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями BCD_1 и CDD_1.

Ответ: 90^0.



в) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и BCD_1.

Ответ: 90^0.



Задачи с развернутым ответом

119. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые ребра 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1=3:2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Ответ: $arctg\frac{\sqrt{13}}{2}$.

120. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S. Боковое ребро вдвое больше стороны основания. Найдите угол между плоскостями SAF и SBC.

Ответ: $\arccos\frac{1}{5}$.

Занятие 21. Перпендикулярность плоскостей

Повторяем теорию

Определение: две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90^0 (Рис. 44).

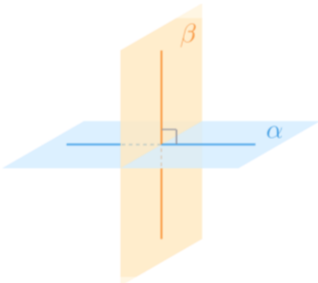


Рис. 44

Признак перпендикулярности плоскостей: если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Следствие из признака перпендикулярности плоскостей: плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.

Проверяем себя

Т61. Какое утверждение верно?

а) Ребро двугранного угла не может быть не перпендикулярным любой прямой, лежащей в плоскости его линейного угла.

б) Две плоскости, перпендикулярные третьей, не могут быть непараллельными.

в) Две плоскости, перпендикулярные одной плоскости, не могут быть параллельными.

Ответ: а).

Т62. Какое утверждение верно?

а) Через произвольную точку пространства нельзя провести три плоскости, каждые две из которых взаимно перпендикулярны.

б) Не существует прямой, пересекающей две данные скрещивающиеся прямые и перпендикулярной каждой из них.

в) Плоскость не может быть не перпендикулярной данной плоскости, если она проходит через прямую, перпендикулярную данной плоскости.

Ответ: в).

Т63. Какое утверждение неверно?

а) Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

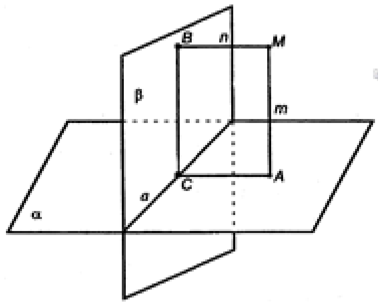
б) Если плоскости перпендикулярны, то линия их пересечения перпендикулярна любой прямой, лежащей в одной из данных плоскостей.

в) Плоскость, перпендикулярная линии пересечения двух данных плоскостей, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей

Ответ: б).

Решаем задачи

121. а) Плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой a. Из точки M проведены перпендикуляры MA и MB к этим плоскостям соответственно. Прямая a пересекает плоскость AMB в точке C. Найдите расстояние от точки M до прямой a, если AM=3, BM=4.



Ответ: 5

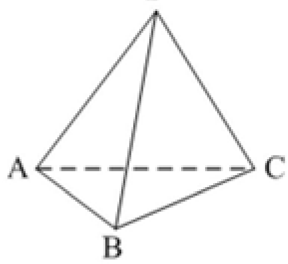
б) Плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой a. Из точки M проведены перпендикуляры MA и MB к этим плоскостям соответственно. Прямая a пересекает плоскость AMB в точке C. Найдите расстояние от точки M до прямой a, если AM=6, BM=8.

Ответ: 10.

в) Плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой a. Из точки M проведены перпендикуляры MA и MB к этим плоскостям соответственно. Прямая a пересекает плоскость AMB в точке C. Найдите расстояние от точки M до прямой a, если AM=12, BM=5.

Ответ: 13.

122. а) Общая сторона AC треугольников ABC и ACD равна 10 см. Плоскости этих треугольников взаимно перпендикулярны. Найдите BD, если эти треугольники равносторонние.



Ответ: $5\sqrt{6}$ *см.*

б) Общая сторона AC треугольников ABC и ACD равна 20 см. Плоскости этих треугольников взаимно перпендикулярны. Найдите BD, если эти треугольники равносторонние.

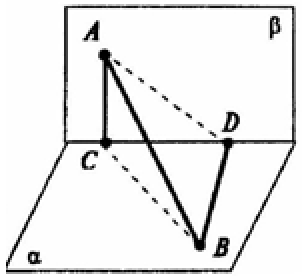
Ответ: $10\sqrt{6}$ *см.*

в) Общая сторона AC треугольников ABC и ACD равна 14 см. Плоскости этих треугольников взаимно перпендикулярны. Найдите BD, если эти треугольники равносторонние.

Ответ: $7\sqrt{6}$ *см.*

123. а) На двух перпендикулярных плоскостях лежат две точки A и B, из которых опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB, если AC=6 см, BD=7 см, CD=6 см.

Ответ: 11 см.



б) На двух перпендикулярных плоскостях лежат две точки A и B, из которых опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB, если AC=3 см, BD=4 см, CD=12 см.

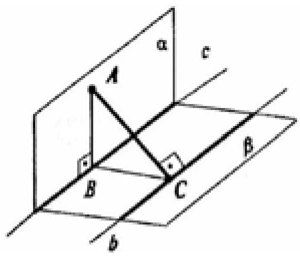
Ответ: 13 см.

в) На двух перпендикулярных плоскостях лежат две точки A и B, из которых опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB, если AC=15 см, BD=17,5 см, CD=15 см.

Ответ: 27,5 см.

124. а) Плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости α взята точка A, расстояние от которой до прямой c (линии пересечения плоскостей) равно 4 м. В плоскости β проведена прямая b, параллельная прямой c и отстоящая от неё на расстоянии 9,6 м от неё. Найдите расстояние от точки A до прямой b.

Ответ: 10,4 м.



б) Плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости α взята точка A, расстояние от которой до прямой c (линии пересечения плоскостей) равно 12 м. В плоскости β проведена прямая b, параллельная прямой c и отстоящая н от неё на расстоянии 16 м.. Найдите расстояние от точки A до прямой b.

Ответ: 20 м.

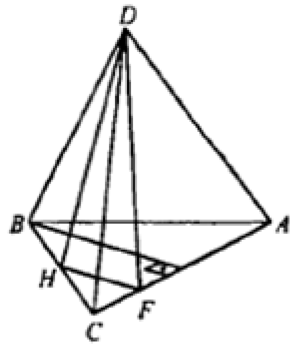
в) Плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости α взята точка A, расстояние от которой до прямой c (линии пересечения плоскостей) равно 15 м.

В плоскости β проведена прямая b, параллельная прямой c и отстоящая от неё на расстоянии 8 м. Найдите расстояние от точки A до прямой b.

Ответ: 17 м.

125. а) Сторона правильного треугольника ABC равна 4. Треугольник DBC – равнобедренный (DB=DC). Их плоскости взаимно перпендикулярны. Плоскость ADC составляет с плоскостью ABC угол 60^0. Найдите площадь треугольника DBC.

Ответ: 6.



б) Сторона правильного треугольника ABC равна 10. Треугольник DBC – равнобедренный (DB=DC). Их плоскости взаимно перпендикулярны. Плоскость ADC составляет с плоскостью ABC угол 60^0. Найдите площадь треугольника DBC.

Ответ:37,5.

в) Сторона правильного треугольника ABC равна 14. Треугольник DBC – равнобедренный (DB=DC). Их плоскости взаимно перпендикулярны. Плоскость ADC составляет с плоскостью ABC угол 60^0. Найдите площадь треугольника DBC.

Ответ: 73,5.

Занятие 22. Теорема о трёх перпендикулярах

Повторяем теорию

Определение: прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой из этой плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости (Рис. 45).

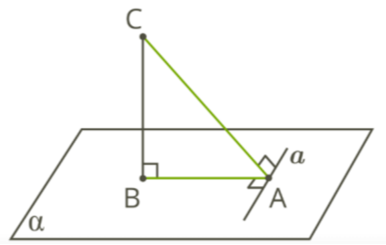


Рис. 45

Перпендикуляр к плоскости CB – отрезок прямой, перпендикулярной плоскости, один из концов которого лежит на плоскости (основание перпендикуляра).

Наклонная к плоскости CA – отрезок прямой, не перпендикулярной плоскости, один из концов которого лежит на плоскости (основание наклонной).

Проекция наклонной BA – отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной (Рис. 46).

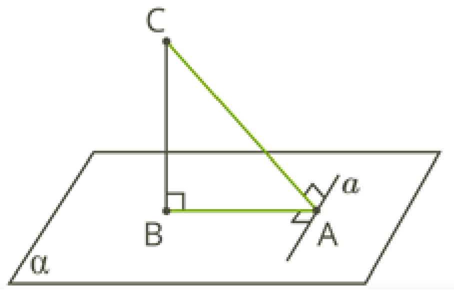


Рис. 46

Теорема о трех перпендикулярах (ТТП):	*Обратная ТТП:*
Если прямая, проведённая на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна её проекции, то она перпендикулярна и самой наклонной. $a \in \alpha, a \perp BA, BC \perp BA \Rightarrow a \perp CA$	Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной. $a \in \alpha, a \perp CA, BC \perp BA \Rightarrow a \perp BA$

Проверяем себя

Т64. Укажите верный ответ:

1) Расстояние от точки до прямой равно длине ________________

а) наклонной; б) биссектрисы; в) проекции; г) перпендикуляра.

Ответ: г).

2) Прямая, проведенная в плоскости и перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и ____________________.

а) самой себе; б) самой наклонной; в) самой проекции;

г) самому перпендикуляру.

Ответ: б).

Т65. Заполните пропуски:

а) Из двух наклонных, исходящих из одной точки, не лежащей на данной плоскости, больше та, у которой________________.

Ответ: проекция больше.

б) Если равны проекции наклонных к плоскости, проведённых из одной точки, то равны и__________.

Ответ: сами наклонные.

Т66. Какое из следующих утверждений неверно?

а) перпендикуляр и наклонная, выходящие из одной точки, имеют разную длину;

б) расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной плоскости;

в) равные наклонные, проведенные к плоскости из одной точки, имеют разные проекции;

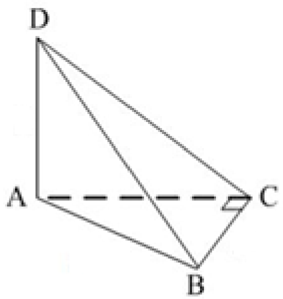
г) проекцией точки на плоскость является точка.

Ответ: в).

Решаем задачи

126. а) В треугольнике ABC известно, что $\angle ACB = 90^0$, AB=15 см, BC=9 см, $AD \perp (ABC)$, AD=5 см. Найдите расстояние от точки D до прямой BC.

Ответ: 13 см.



б) В треугольнике ABC известно, что $\angle ACB = 90^0$, AB=10 см, BC=6 см, $AD \perp (ABC)$, AD=6 см. Найдите расстояние от точки D до прямой BC.

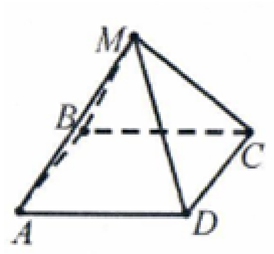
Ответ: 10.

в) В треугольнике ABC известно, что $\angle ACB = 90^0$, AB=20 см, BC=16 см, $AD \perp (ABC)$, AD=5 см. Найдите расстояние от точки D до прямой BC.

Ответ: 13 см.

127. а) $ABCD$ – квадрат. $M \notin (ABC)$, $MA=MB=MC=MD=5$ см. Расстояние от точки M до DC равно 4 см. Найдите площадь квадрата $ABCD$.

Ответ: 36 см².



б) $ABCD$ – квадрат. $M \notin (ABC)$, $MA=MB=MC=MD=10$ см. Расстояние от точки M до DC равно 8 см. Найдите площадь квадрата $ABCD$.

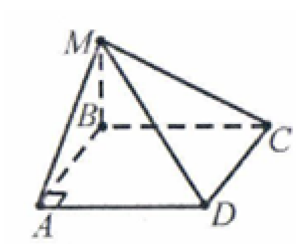
Ответ: 144 см².

в) $ABCD$ – квадрат. $M \notin (ABC)$, $MA=MB=MC=MD=13$ см. Расстояние от точки M до DC равно 12 см. Найдите площадь квадрата $ABCD$.

Ответ: 100 см².

128. а) $ABCD$ – прямоугольник. $MB \perp (ABC)$, $MA=13$, $MD=20$, $MC=16$. Найдите MB.

Ответ: 5.



б) $ABCD$ – прямоугольник. $MB \perp (ABC)$, $MA=13$, $MD=15$, $MC=9$. Найдите MB.

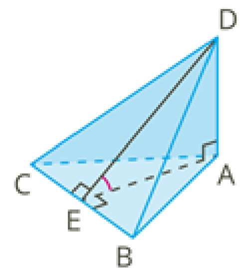
Ответ: 5

в) $ABCD$ – прямоугольник. $MB \perp (ABC)$, $MA=10$, $MD=17$, $MC=15$. Найдите MB.

Ответ: 6.

129. а) Отрезок AD перпендикулярен плоскости треугольника ABC и имеет длину 12 см. Найдите расстояние от точки D до прямой BC, если $AB=AC=20$ см, $BC=24$ см.

Ответ: 20 см.



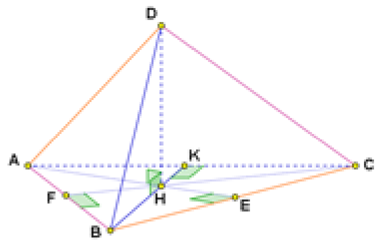
б) Отрезок AD перпендикулярен плоскости треугольника ABC и имеет длину 8 см. Найдите расстояние от точки D до прямой BC, если $AB=AC=25$ см, $BC=40$ см.

Ответ: 17 см.

в) Отрезок AD перпендикулярен плоскости треугольника ABC и имеет длину 45 см. Найдите расстояние от точки D до прямой BC, если $AB=AC=30$ см, $BC=36$ см.

Ответ: 57 см.

130. а) В правильном треугольнике ABC точка H – центр. DH – перпендикуляр к плоскости ABC. Найдите расстояние от точки D до стороны AB, если AB=10 см, DH=5 см. В ответ запишите число, умноженное на $\sqrt{3}$.



Ответ: 10 см.

б) В правильном треугольнике ABC точка H – центр. DH – перпендикуляр к плоскости ABC. Найдите расстояние от точки D до стороны AB, если AB=12 см, DH=6 см. В ответ запишите число, умноженное на $\sqrt{3}$.

Ответ: 12 см.

в) В правильном треугольнике ABC точка H – центр. DH – перпендикуляр к плоскости ABC. Найдите расстояние от точки D до стороны AB, если AB=14 см, DH=7 см. В ответ запишите число, умноженное на $\sqrt{3}$.

Ответ: 14 см.

Раздел 3. Многогранники

Занятие 23. Многогранники. Призма

Повторяем теорию

Многогранник – геометрическое тело, ограниченное конечным числом плоских многоугольников.

Грани многогранника – многоугольники, ограничивающие многогранники.

Ребра многогранника – стороны граней многогранника.

Вершины многогранника – концы ребер многогранника (вершины граней многогранника).

Диагональ многогранника – отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани.

Выпуклый многогранник – многогранник, расположенный по одну сторону от плоскости его любой грани.

Невыпуклый многогранник – многогранник, у которого найдется по крайней мере одна грань такая, что плоскость, проведенная через эту грань, делит данный многогранник на две или более частей.

Призма – многогранник, составленный из равных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов.

Боковые грани – все грани, кроме оснований.

Боковые ребра – общие стороны боковых граней.

Основания призмы – равные многоугольники, расположенные в параллельных плоскостях.

Прямая призма – призма, боковые ребра которой перпендикулярны основаниям.

Правильная призма – прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник.

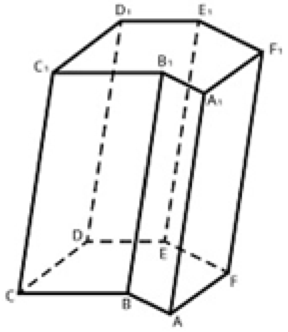
Боковая поверхность призмы состоит из параллелограммов. Вместе с основаниями боковая поверхность составляет полную поверхность призмы.

Диагональ призмы – это отрезок, соединяющий две её вершины, не принадлежащие одной грани.

Расстояние между основаниями призмы называется *высотой* призмы.

Проверяем себя

Т67. Заполните пропуски в тексте:
У данного многогранника количество вершин ___, ребер ___, граней ___. Количество боковых ребер равно ___, а количество боковых граней – ____.



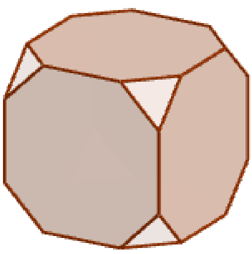
Ответ: вершин- 12, ребер -18, граней – 8, боковых ребер – 6, боковых граней – 6.

Т68. Заполните пропуски:
а) В основании призмы лежат______________________________
Ответ: многоугольники.
б) Боковые рёбра призмы _____________ и __________________.
Ответ: параллельны, равны.
в) Призма имеет 20 граней. В её основании лежит (какой многоугольник) _____________.
Ответ: 18-угольник.

Т69. Заполните пропуски:
а) _______, ограничивающие многогранник, называются его гранями.
Ответ: многоугольники.
б) Стороны граней называются _________.
Ответ: ребрами.
в) Концы ребер многогранника называются _________.
Ответ: вершинами.
г) Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется _______ многогранника.
Ответ: диагональю.

Решаем задачи

131. а) От деревянного кубика отпилили все его вершины. Сколько ребер у получившегося многогранника (невидимые рёбра на рисунке не изображены)?
Ответ: 36.



б) От деревянного кубика отпилили все его вершины. Сколько граней у получившегося многогранника (невидимые ребра на рисунке не обозначены)?

Ответ: 14.

в) От деревянного кубика отпилили все его вершины. Сколько вершин у получившегося многогранника (невидимые рёбра на рисунке не изображены)?

Ответ: 24.

132. а) В основании прямой призмы лежит прямоугольник со сторонами 12 см и 5 см. Диагональ призмы образует с плоскостью основания угол в 30^0. Найдите боковое ребро призмы.

Ответ: $\frac{13\sqrt{3}}{3}$ *см.*

б) В основании прямой призмы лежит прямоугольник со сторонами 24 см и 10 см. Диагональ призмы образует с плоскостью основания угол в 45^0. Найдите боковое ребро призмы.

Ответ: 26 см.

в) В основании прямой призмы лежит прямоугольник со сторонами 24 см и 18 см. Диагональ призмы образует с плоскостью основания угол в 60^0. Найдите боковое ребро призмы.

Ответ: $30\sqrt{3}$ *см.*

133. а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро AB=2 см, ребро $AD=\sqrt{5}$ см, ребро AA_1=2 см. Точка K – середина ребра BB_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки A_1, D_1 и K.

Ответ: 5 см^2.

б) В прямоугольном параллелепипеде $MNPRM_1N_1P_1R_1$ ребро MN = 4 см, ребро $MR=\sqrt{20}$ см, ребро MM_1=4 см. Точка K – середина ребра NN_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки M_1, R_1 и K.

Ответ: 20 см^2.

б) В прямоугольном параллелепипеде $ASDFA_1S_1D_1F_1$ ребро AS=6 см, ребро $AF=5\sqrt{5}$ см, ребро AA_1=6 см. Точка K – середина ребра SS_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки A_1, F_1 и K.

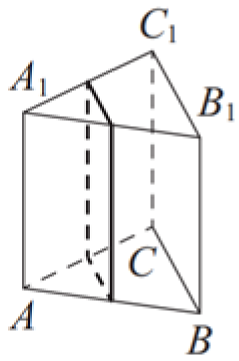
Ответ: 75 см^2.

134. а) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 6 см, боковые рёбра равны 8 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр основания призмы.

Ответ: 32 см^2.

б) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 2 см, боковые рёбра равны 3 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1.

Ответ: 3 см^2.

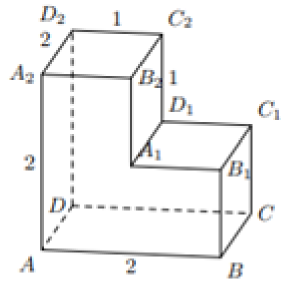


в) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 13 см, боковые рёбра равны 6 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1.

Ответ: 39 см^2.

135. а) На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите расстояние между вершинами A и C_2.

Ответ: 3.



б) На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите расстояние между вершинами A и C_1.

Ответ: 3.

в) На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и D_1.

Ответ: 6.

136. а) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известно, что $AB = \sqrt{3}AA_1$. Найдите угол между прямыми AB_1 и CC_1. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 60^0.

б) В правильной треугольной призме $GHFG_1H_1F_1$ известно, что $GG_1 = \sqrt{3}GH$. Найдите угол между прямыми GH_1 и GG_1. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 30^0.

в) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известно, что $AB_1 = \sqrt{2}AB$. Найдите угол между прямыми AB_1 и CC_1. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 45^0.

137. а) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны $2\sqrt{3}$, боковые рёбра равны 5. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB и A_1B_1 и точку C.

Ответ: 15.

б) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны $6\sqrt{3}$, боковые рёбра равны 7. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB и A_1B_1 и точку C.

Ответ: 63.

в) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 8, боковые рёбра равны $\sqrt{3}$. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB и A_1B_1 и точку C.

Ответ: 12.

138. а) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 3. Найдите расстояние между точками A и E_1.

Ответ: 6.

б) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3. Найдите расстояние между точками B и E_1.

Ответ: 5.

в) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 2. Найдите расстояние между точками A и C_1.

Ответ: 4.

Занятие 24. Многогранники. Призма

Повторяем теорию

Призма – многогранник, составленный из равных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов (Рис. 47).

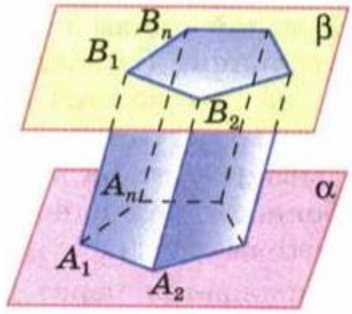


Рис. 47

Боковые грани – все грани, кроме оснований.

Боковые ребра – общие стороны боковых граней.

Основания призмы – равные многоугольники, расположенные в параллельных плоскостях.

Прямая призма – призма, боковые ребра которой перпендикулярны основаниям. В противном случае – *наклонная* (Рис. 48).

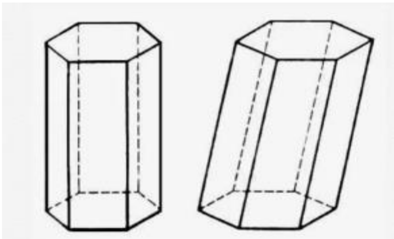


Рис.48

Правильная призма – прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник (Рис. 49).

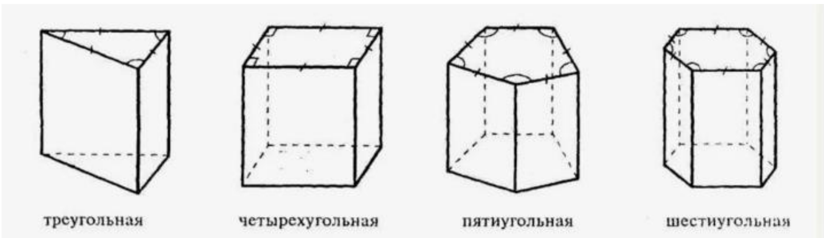


Рис.49

Площадь боковой поверхности призмы – сумма площадей ее боковых граней.

Площадь полной поверхности призмы – сумма площадей всех ее граней.

$$S_{\text{пол.п.}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$$

Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда

$S=2(ab+bc+ac)$, где a, b, c измерения прямоугольного параллелепипеда.

Площадь поверхности куба $S=6a^2$.

Проверяем себя

Т70. Выберите правильное определение правильной призмы.

а) Прямая призма называется правильной, если в основании лежит правильный многоугольник.

б) Призма называется правильной, если в основании лежит правильный многоугольник.

в) Прямая призма называется правильной, если в основании лежит многоугольник.

г) Призма называется правильной, если в основании лежит многоугольник.

Ответ: а.

Т71. Какая фигура не может быть в основании призмы?

а) Трапеция.

б) Круг.

в) Треугольник.

г) Квадрат.

Ответ: б.

Т72. Площадь полной поверхности призмы:

а) $2S_{\text{осн}} + 2S_{\text{бок}}$.

б) $S_{\text{осн}} + 2S_{\text{бок}}$

в) $S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$

Ответ: в).

Решаем задачи

139. а) Основанием прямой треугольной призмы является прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, боковое ребро призмы равно 10. Найдите площадь боковой поверхности.

Ответ: 240.

б) Основанием прямой треугольной призмы является прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4, боковое ребро призмы равно 12. Найдите площадь боковой поверхности.

Ответ: 144.

в) Основанием прямой треугольной призмы является прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Площадь боковой поверхности равна 288. Найдите боковое ребро призмы.

Ответ: 12.

140. а) Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8, и боковым ребром, равным 10.

Ответ: 248.

б) Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 20 и 48, и боковым ребром, равным 5.

Ответ: 1480.

в) В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными10 и 24. Площадь её поверхности равна 396. Найдите боковое ребро этой призмы.

Ответ: 3.

141. а) Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна 5, высота равна 10. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Ответ: 300.

б) Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна 12, высота равна 5,5. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

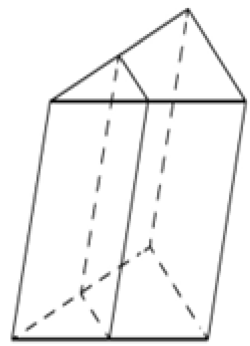
Ответ: 396.

б) Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна 16, площадь боковой поверхности призмы 480. Найдите высоту призмы.

Ответ: 5.

142. а) Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 126. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.

Ответ: 63.



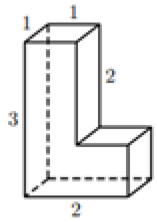
б) Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 252. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.

Ответ: 126.

в) Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 132. Через центр основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.

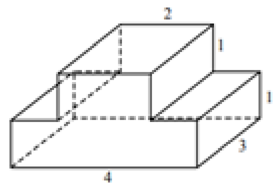
Ответ: 88.

143. а) Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



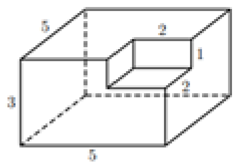
Ответ: 18.

б) Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Ответ: 48.

в) Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Ответ: 110.

144. а) Основание прямой призмы – ромб со стороной 5 и тупым углом 120^0. Боковая поверхность призмы имеет площадь 240. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.

Ответ: 60.

б) Основание прямой призмы – ромб со стороной 5 и тупым углом 120^0. Боковая поверхность призмы имеет площадь 300. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.

Ответ: 75.

в) Основание прямой призмы – ромб с острым углом 60^0. Боковое ребро призмы равно 10, а площадь боковой поверхности – 240. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.

Ответ: 60.

145. а) Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетами 15 и 20. Большая боковая грань и основание призмы равновелики. Найдите площадь полной поверхности призмы.

Ответ: 660.

б) Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетами 18 и 24. Большая боковая грань и основание призмы равновелики. Найдите площадь полной поверхности призмы.

Ответ: 950,4.

в) Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с гипотенузой 25 и катетом 20. Меньшая боковая грань и основание призмы равновелики. Найдите площадь полной поверхности призмы.

Ответ: 900.

<u>Задачи с развернутым ответом</u>

<u>146.</u> Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

а) Докажите, что $AA_1 = AC$.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 6$, $BC = 3$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Занятие 25. Многогранники. Пирамида

<u>Повторяем теорию</u>

Многогранник, одна грань которого n-угольник, а остальные грани – треугольники, имеющие общую вершину, называют *n-угольной пирамидой* (Рис. 50).

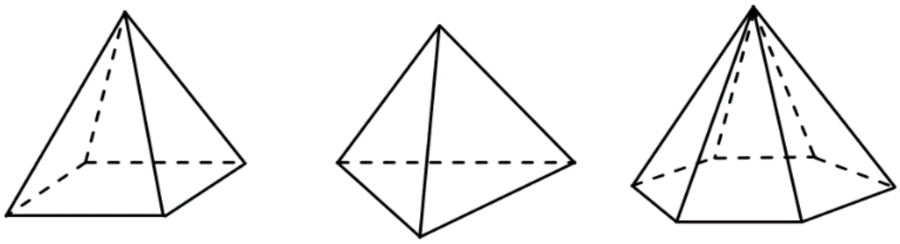


Рис. 50

Треугольники, имеющие общую вершину, называют *боковыми гранями пирамиды*; общую вершину – *вершиной пирамиды*; n-угольник – *основанием пирамиды*; отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания – *боковыми рёбрами пирамиды*.

В зависимости от количества сторон основания пирамиды она бывает *треугольной, четырехугольной, пятиугольной* и т.д.

Высотой пирамиды называют перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания (Рис. 51).

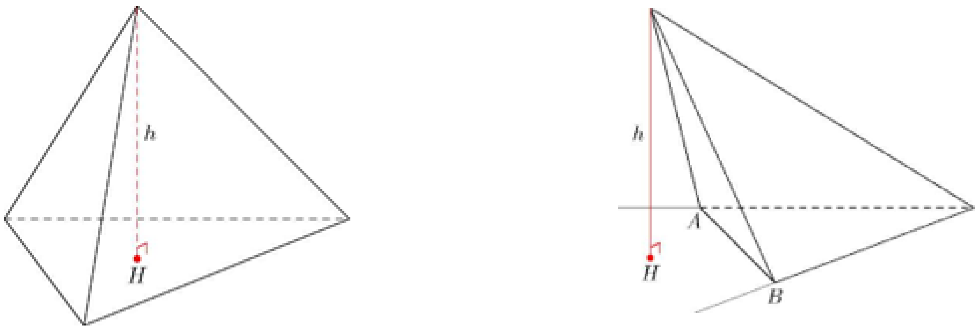


Рис. 51

Основные свойства пирамиды

1. Если все боковые ребра равны, то вокруг основания пирамиды можно описать окружность, а центр основания совпадает с центром окружности. Также перпендикуляр, опущенный из вершины, проходит через центр основания (круга).

2. Если все боковые ребра равны, то они наклонены к плоскости основания под одинаковыми углами.

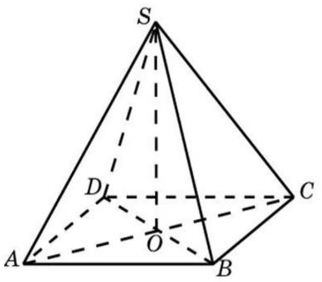
3. Боковые ребра равны тогда, когда они образуют с плоскостью основания равные углы или, если вокруг основания пирамиды можно описать окружность.

4. Если боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом, то в основание пирамиды можно вписать окружность, а вершина пирамиды проектируется в ее центр.

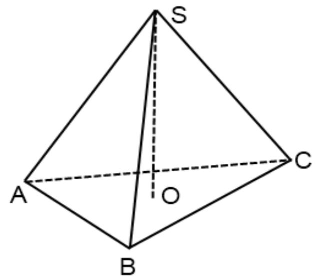
5. Если боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом, то апофемы боковых граней равны.

6. Если боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом, то в основание пирамиды можно вписать окружность, а центр основания совпадает с центром окружности.

Пирамиду называют *правильной*, если в её основании лежит правильный многоугольник и основание высоты пирамиды является центром этого многоугольника (Рис. 52).



SABCD – правильная четырехугольная пирамида, в основании лежит квадрат *ABCD*



SABC – правильная треугольная пирамида, в основании лежит равносторонний $\triangle ABC$

Рис. 52

Важно: в правильной треугольной пирамиде боковое ребро может быть не равно стороне основания; иными словами, боковые грани правильной треугольной пирамиды – равнобедренные, но не обязательно равносторонние треугольники. В правильном тетраэдре все шесть граней – равносторонние треугольники.

Апофема – это высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из её вершины.

Свойства правильной пирамиды.

1. Все боковые рёбра правильной пирамиды равны.

2. Все боковые ребра наклонены под одинаковыми углами к основанию.

3. Все боковые грани правильной пирамиды – равные равнобедренные треугольники.

4. Все апофемы правильной пирамиды равны.

5. Площади всех боковых граней равны.

6. Все грани имеют одинаковые двугранные (плоские) углы.

7. Вокруг пирамиды можно описать сферу. Центром описанной сферы будет точка пересечения перпендикуляров, которые проходят через середину ребер.

8. В пирамиду можно вписать сферу. Центром вписанной сферы будет точка пересечения биссектрис, исходящие из угла между ребром и основанием.

9. Если центр вписанной сферы совпадает с центром описанной сферы, то сумма плоских углов при вершине равна π или наоборот, один угол равен π/n, где n – это количество углов в основании пирамиды.

Площадью боковой поверхности пирамиды называют сумму площадей всех ее боковых граней.

Теорема. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра её основания и апофемы.

$$S_{бок}=\frac{1}{2}pd\ ,$$

где p – периметри основания пирамиды, а d – длина апофемы правильной пирамиды.

Площадь полной поверхности правильной пирамиды равна сумме площадей боковой поверхности и основания

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}.$$

Пересечем произвольную пирамиду плоскостью, параллельной основанию пирамиды, эта плоскость разбивает данную пирамиду на два многогранника:один многогранникявляется пирамидой, другой называется *усечённой пирамидой.*

$A_1A_2A_3\ldots A_nB_1B_2B_3\ldots B_n$ – усечённая пирамида.

$A_1A_2A_3\ldots A_n$ и $B_1B_2B_3\ldots B_n$ – основания усечённой пирамиды.

$A_1B_1B_2A_2$ – боковые грани усеченной пирамиды (трапеция) (Рис. 53).

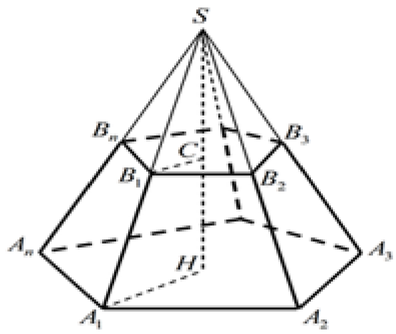


Рис. 53

Высотой усечённой пирамиды называют перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки плоскости одного основания на плоскость другого.

Апофемой правильной усечённой пирамиды называют отрезок, соединяющий середины рёбер оснований, принадлежащих одной боковой грани.

Теорема. Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды равна полусумме периметра ее оснований и апофемы

$$S_{бок}=\frac{1}{2}\,(P_{осн}+p_{осн})\,d.$$

Проверяем себя

Т73. Что представляет собой боковая грань пирамиды?

а) треугольник;

б) параллелограмм;

в) прямоугольник.

Ответ: а).

Т74. Апофема – это:

а) высота боковой грани пирамиды;

б) высота боковой грани правильной пирамиды;

в) высота грани пирамиды.

Ответ: б).

Т75. Сколько оснований имеет правильная пирамида?

а) одно;

б) два;

в) три;

г) много.

Ответ: а).

Т76. Боковые рёбра пирамиды – это…

а) отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания;

б) отрезки, соединяющие вершину с серединами сторон снования;

в) отрезки, соединяющие вершины основания.

Ответ: а).

Т77. Пирамида называется правильной, если…

а) её основание правильный многоугольник;

б) основание высоты совпадает с центром основания пирамиды;

в) её основание правильный многоугольник и основание высота совпадает с центром этого многоугольника.

Ответ: в).

Т78. Что представляет собой боковая грань усеченной пирамиды?

а) прямоугольник;

б) треугольник;

в) параллелограмм;

г) трапеция;

д) другое.

Ответ: г).

Т79. Боковая поверхность правильной пирамиды равна…

а) произведению периметра основания на апофему;

б) произведению полупериметра основания на апофему;

в) произведению полупериметра основания на высоту пирамиды.

Ответ: б)

Решаем задачи

147. а) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 9, боковое ребро равно 6. Найдите угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 30^0.

б) Апофема правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{7}$, боковое ребро равно 7. Найдите угол между плоскостью боковой грани пирамиды и плоскостью ее основания. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 60^0.

в) Апофема правильной треугольной пирамиды равна $\sqrt{6}$, сторона основания равна 6. Найдите угол между плоскостью боковой грани пирамиды и плоскостью ее основания. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 45^0.

148. а) Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно $2\sqrt{13}$, а сторона основания равна $6\sqrt{3}$. Найдите высоту пирамиды.

Ответ: 4.

б) В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро равно 17, а сторона основания равна 8. Найдите высоту пирамиды.

Ответ:15.

в) В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно 5, а высота пирамиды равна 4. Найдите сторону основания пирамиды.

Ответ: $3\sqrt{2}$.

149. а) В правильной четырёхугольной пирамиде боковое ребро равно 22, а тангенс угла между боковой гранью и плоскостью основания равен $\sqrt{14}$. Найдите сторону основания пирамиды.

Ответ:11.

б) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ высота SO равна 13, диагональ основания BD равна 8. Точки K и M − середины ребер CD и BC соответственно. Найдите тангенс угла между плоскостью SMK и плоскостью основания ABC.

Ответ: 6,5

в) В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 1. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.

Ответ:0,25

150. а) Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 10, а боковое ребро равно 13.

Ответ:180

б) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка M − середина ребра AB, S − вершина. Известно, что BC=3, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 45. Найдите длину отрезка SM.

Ответ:10.

в) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ Q − середина ребра AB, S − вершина. Известно, что BC=7, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 42. Найдите длину отрезка SQ.

Ответ: 4.

151. а) Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 14, боковые ребра равны 25. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

Ответ: 1008.

б) Во сколько раз уменьшится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его рёбра уменьшить в 1,6 раза?

Ответ: 2,56.

в) Площадь боковой поверхности пятиугольной пирамиды равна 13. Чему будет равна площадь боковой поверхности пирамиды, если все ее ребра уменьшить в 2 раза?

Ответ: 3,25.

<u>Задачи с развернутым ответом</u>

<u>152.</u> В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна боковому ребру SA. Медианы треугольника SBC пересекаются в точке M.

а) Докажите, что $AM=AD$.

б) Точка N – середина AM. Найдите SN, если AD=6.

Ответ: $\sqrt{15}$.

Занятие 26. Многогранники. Пирамида

Повторяем теорию

Треугольную пирамиду называют *тетраэдром* («тетраэдр» в переводе с греческого означает «четырехгранник»). Любая грань тетраэдра служит его основанием (Рис. 54).

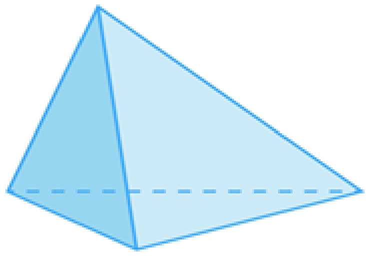


Рис. 54

Правильную треугольную пирамиду, у которой все грани равны называют *правильным тетраэдром.*

Если прямые, содержащие высоты тетраэдра, пересекаются в одной точке, то такой тетраэдр называют *ортоцентрическим*.

Отрезок, соединяющий середины скрещивающихся ребер тетраэдра, называют *средней линией тетраэдра*.

Теорема. Средние линии тетраэдра пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани, называют *медианой тетраэдра.*

Теорема. Медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 3:1, считая от вершины тетраэдра.

Объем пирамиды равен одной трети, произведения площади основания на высоту.

$$V=\frac{1}{3}\ S_{осн}\,h,$$

где $S_{осн}$ – площадь основание, а h – высота пирамиды.

Объем усеченной пирамиды равен произведению трети её высоты на сумму площадей оснований и квадратного корня из произведения площадей оснований.

$$V=\frac{1}{3}\cdot h\cdot\left(S_{ниж}+\sqrt{S_{ниж}\cdot S_{верх}}+S_{верх}\right).$$

Проверяем себя

Т80. Из каких геометрических фигур состоит тетраэдр?

а) треугольников; б) параллелограммов; в) прямоугольников.

Ответ: а).

Т81. Какие элементы имеются у тетраэдра?

а) стороны;

б) грани;

в) ребра.

Ответ: б), в).

Т82. Сколько оснований имеет тетраэдр?

а) одно;

б) два;

в) три;

г) четыре.

Ответ: г).

Т83. Сколько диагоналей у тетраэдра?

а) 2;

б) 3;

в) не имеет диагоналей.

Ответ: в).

Т84. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 9, а сторона основания 4. Чему равен объём?

а) 36;

б) 48;

в) 12.

Ответ: б).

Т85. Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?

а) в 2 раза;

б) в 8 раз;

в) в 4 раза.

Ответ: б).

Решаем задачи

153. а) Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4. Ее объем равен 16. Найдите высоту этой пирамиды.

Ответ: 4.

б) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 2, объем пирамиды равен 4. Найдите длину отрезка OS.

Ответ: 6.

в) Ребра тетраэдра равны 12. Найдите объём тетраэдра.

Ответ: $144\sqrt{2}$.

154. а) Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60^0. Высота пирамиды равна 6. Найдите объем пирамиды.

Ответ:48.

б) Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 4,5.

в) Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 12. Точка E – середина ребра SB. Найдите объем треугольной пирамиды $EABC$.

Ответ: 3.

155. а) Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2, боковое ребро равно 4. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 12.

б) Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а высота равна $\sqrt{3}$.

Ответ: 0,25.

в) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания пересекаются в точке M. Площадь треугольника ABC равна 3, MS=1. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 1.

156. а) В правильном тетраэдре $SABC$ медианы основания пересекаются в точке P. Объем пирамиды равен 1, PS=1. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: 3

б) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка L – середина ребра BC, S – вершина. Известно, что $SL=2$, а площадь боковой поверхности равна 3. Найдите длину отрезка AB.

Ответ: 1.

в) Найдите расстояние между скрещивающимися рёбрами правильного тетраэдра, если его рёбра равны $\sqrt{2}$.

Ответ: 1.

157. а) От треугольной пирамиды, объем которой равен 12, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.

Ответ: 3.

б) Объем треугольной пирамиды равен 15. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 1:2, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объемов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.

Ответ: 10.

в) Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 9. Найдите объем треугольной пирамиды $ABCA_1$.

Ответ: 1,5.

Задачи с развернутым ответом

158. Правильные треугольники ABC и MBC лежат в перпендикулярных плоскостях, $BC = 8$. Точка P – середина CM, а точка T делит отрезок BM так, что $BT:TM = 1:3$.

а) Докажите, что $CT > BP$.

б) Вычислите объём пирамиды $MPTA$.

Ответ: 24.

159. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

Ответ: $\frac{80\sqrt{3}}{3}$.

160. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 6. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM=2$, $CN=1$.

а) Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.

б) Найдите объём тетраэдра $MNBB_1$.

Ответ: $18\sqrt{3}$.

Занятие 27. Практическая работа. «Развертки многогранников»

Форма проведения практической работы – групповая.

По окончании предполагается обсуждение ответов.

Развёрткой называют плоскую фигуру, полученную путем совмещения всей поверхности, ограничивающей предмет, с одной плоскостью.

Правильные многогранники или *платоновы тела* – это выпуклые многогранники, грани которых являются равными правильными многоугольниками.

Работа в группах.

Рассмотреть многогранники, у которых:

1 группа: грани – равносторонние треугольники;

2 группа: грани – правильные четырехугольники.

Задание на карточке 1 группе:

- Чему равен угол правильного треугольника?
- Вычислить сумму плоских углов при вершине, в которой сходится 3, 4, 5 равносторонних треугольников и сделать вывод о возможности существования таких многогранников.

Задание на карточке 2 группе:

- Чему равен угол правильного четырехугольника?
- Вычислить сумму плоских углов при вершине, в которой сходится 3, 4 правильных четырехугольника, сделать вывод о возможности существования таких многогранников.

Отчет о работе групп, введение названий правильных многогранников.

Грани многогранника – равносторонние треугольники. Поскольку угол равностороннего треугольника равен 60°, каждая вершина правильного многогранника может быть вершиной трех, четырех или пяти равносторонних треугольников. Получим тетраэдр, октаэдр и икосаэдр.

Если грани – квадраты, то развертка из трех квадратных граней имеет угол $3 \cdot 90^0 = 270^0$ – получается куб, который также называют гексаэдром.

Совместные обсуждения и выводы.

Для шестиугольников уже три грани дают угол $3 \cdot 120^0 = 360^0$, поэтому правильного выпуклого многогранника с шестиугольными гранями не существует. Если же грань имеет еще больше углов, то развертка будет иметь еще больший угол. Значит, правильных выпуклых многогранников с гранями, имеющими шесть и более углов, не существует.

Вывод.

Существует лишь пять выпуклых правильных многогранников – тетраэдр, октаэдр и икосаэдр с треугольными гранями, куб (гексаэдр) с квадратными гранями и додекаэдр с пятиугольными гранями.

Историческая справка

Все правильные многогранники были известны еще в Древней Греции, и им посвящена заключительная, 13-я книга знаменитых «Начал» Евклида.

Правильные многогранники иногда называют *Платоновыми телами*, поскольку именно Платон (ок. 428 – ок. 348 до н.э.), великий мыслитель Древней Греции, разработал философскую картину мира, где правильные многогранники занимали видное место.

Платон считал, что мир строится из четырех «стихий» – огня, земли, воздуха и воды, а атомы этих «стихий» имеют форму четырех правильных многогранников.

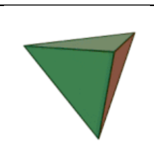
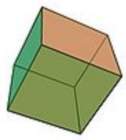
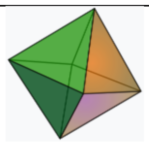
Тетраэдр олицетворял огонь, поскольку его вершина устремлена вверх, как у разгоревшегося пламени. Икосаэдр – как самый обтекаемый – воду. Куб – самая «устойчивая» из фигур – землю. Октаэдр – воздух – как самый «воздушный» многогранник. Пятый многогранник – додекаэдр – воплощал в себе «всё сущее», «Вселенский разум», символизировал весь мир и считался главной геометрической фигурой мироздания. В наше время эту систему можно сравнить с четырьмя состояниями вещества – твёрдым, жидким, газообразным и плазменным.

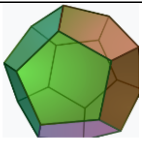
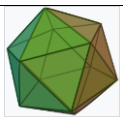
Это была одна из первых попыток ввести в науку идею систематизации.

Введение теоремы Эйлера.

Установим взаимосвязь между элементами правильных многогранников (табл. 2).

Таблица 2.

Изображение	Правильный многогранник	Число вершин	Число ребер	Число граней
	Тетраэдр	4	6	4
	Гексаэдр	8	12	6
	Октаэдр	6	12	8

	Додекаэдр	20	30	12
	Икосаэдр	12	30	20

Рассматривая таблицу, зададимся вопросом: «нет ли закономерности в возрастании чисел в каждом столбце?» Очевидно, нет. Рассмотрим новую таблицу подсчетов (табл. 3).

Таблица 3.

Правильный многогранник	**Число**	
	граней и вершин (*Г* + *В*)	**рёбер (*Р*)**
Тетраэдр	4+4=8	6
Куб	6+8=14	12
Октаэдр	8+6=14	12
Додекаэдр	12+20=32	30
Икосаэдр	20+12=32	30

Теперь закономерность видна. Сформулируем ее так: «Сумма числа граней и вершин больше числа ребер на два»

$$Г + В – Р = 2.$$

Итак, получена формула, которая была подмечена уже Декартом в 1640 г., а позднее переоткрыта Эйлером (1752), имя которого с тех пор она и носит. Формула Эйлера верна для *любых выпуклых многогранников.*

Практическая работа.

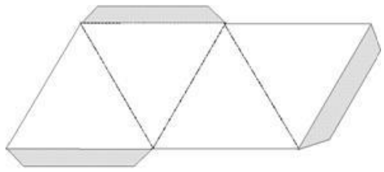
Работу выполняют в парах. Каждая парта работает с одной моделью правильного многогранника (тетраэдр, октаэдр)

- Сколько граней имеет ваш многогранник?
- Что представляет собой каждая грань многогранника?
- Как найти площадь поверхности многогранника?
- Выведите формулу для вычисления площади поверхности вашего многогранника.
- Склейте модель вашего многогранника

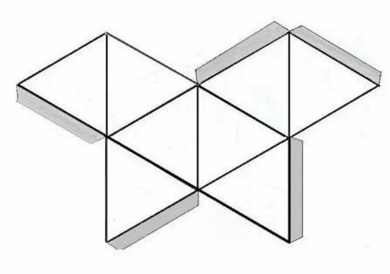
$$S_{тетр.} = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$$

$$S_{окт.} = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}$$

Развертка тетраэдра



Развертка октаэдра



Домашнее задание. Склеить модель более сложного многранника по выбору учащегося.

Занятие 28. Объемы многогранников. Призма

Повторяем теорию

Призма – это многогранник, составленный из двух равных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов (Рис. 55).

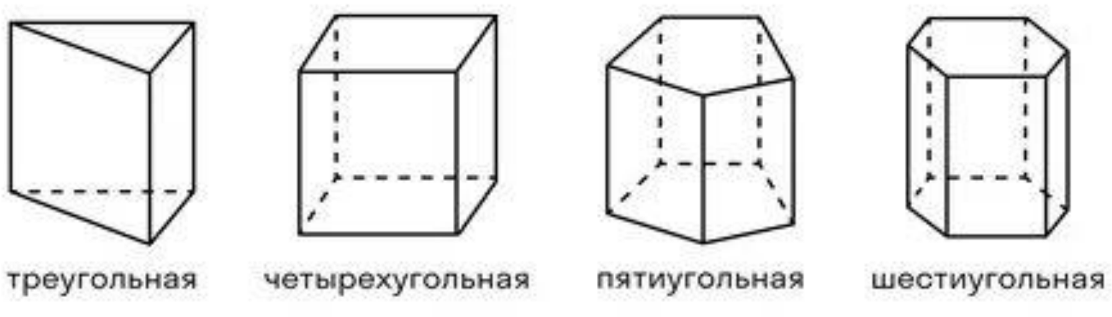


Рис. 55

Многоугольники, расположенные в параллельных плоскостях, называются *основаниями*. Боковые грани являются параллелограммами (Рис. 56).

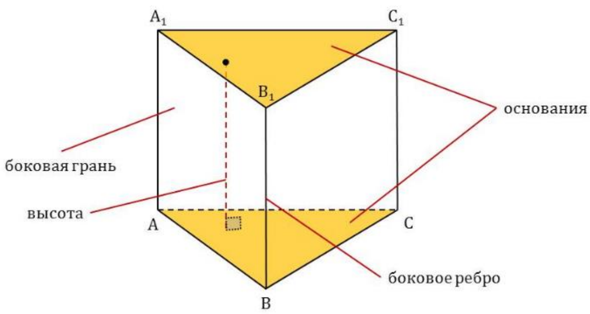


Рис. 56

Отрезки, соединяющие соответственные вершины многоугольников называют *боковыми ребрами.*

Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называют *высотой* призмы (Рис. 57).

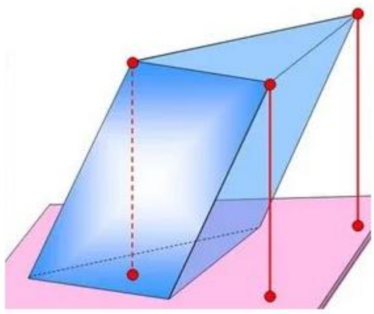


Рис. 57

Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется *прямой*, в противном случае – *наклонной*. Высота прямой призмы равна ее боковому ребру.

Прямая призма называется *правильной*, если ее основания – правильные многоугольники. Все боковые ребра правильной призмы равны. Все боковые грани правильной призмы – равные прямоугольники (Рис. 58).

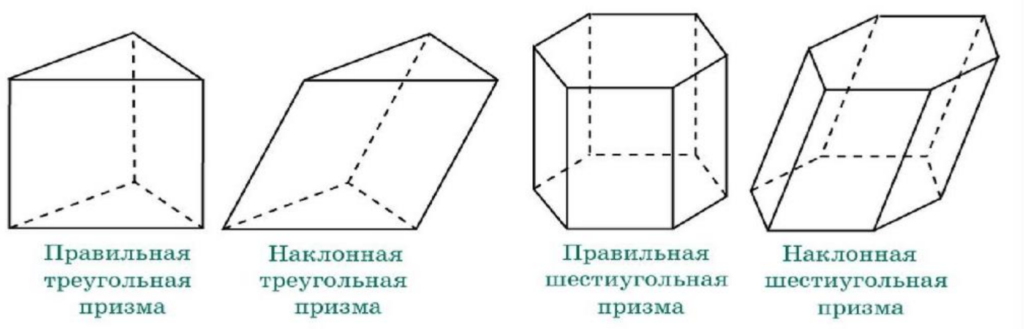


Рис. 58

Площадь боковой поверхности призмы – это сумма площадей боковых граней.

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

Площадь полной поверхности призмы – сумма площадей всех ее граней.

Объем призмы равен произведению площади основания на высоту.

Проверяем себя

Т86. Заполните пропуски:

а) *Призма* – это __________, основаниями которого являются __________, а боковые грани представляют собой __________.

Ответ: многогранник, равные многоугольники, параллелограммы.

б) *Правильная призма* – призма, основаниями которой являются __________, а боковые ребра ____________ основаниям.

Ответ: правильные многоугольники, перпендикулярны.

Т87. Укажите верные утверждения:

а) все боковые грани призмы - квадраты;

б) боковые грани призмы - параллелограммы;

в) боковые ребра призмы равны.

Ответ: б), в).

Т88. Укажите неверные утверждения:

а) все боковые грани призмы - треугольники;

б) боковые грани прямой призмы – равные прямоугольники;

в) боковые ребра правильной призмы не равны.

Ответ: а), в).

Решаем задачи

161. а) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины D, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 12, а боковое ребро равно 2.

Ответ: 8.

б) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины D, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 10, а боковое ребро равно 3.

Ответ: 10.

в) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины D, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 7.

Ответ: 14.

162. а) Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 919. Найдите ребро куба.

Ответ: 17.

б) Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 127. Найдите ребро куба.

Ответ: 6.

в) Если каждое ребро куба уменьшить на 1, то его объем увеличится на 61. Найдите ребро куба.

Ответ: 5.

163. а) Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, D, E, A_1, B_1, D_1, E_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 2.

Ответ: 8.

б) Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, D, E, A_1, B_1, D_1, E_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ площадь основания которой равна 14, а боковое ребро равно 3.

Ответ: 28.

в) Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, D, E, A_1, B_1, D_1, E_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 12.

Ответ: 48.

164. а) Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 5. Объем призмы равен 30. Найдите ее боковое ребро.

Ответ: 4.

б) Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 4 и 6. Объем призмы равен 48. Найдите ее боковое ребро.

Ответ: 4.

в) Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Объем призмы равен 48. Найдите ее боковое ребро.

Ответ: 2.

165. а) Объём куба равен 12. Найдите объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.

Ответ: 1,5.

б) Объём куба равен 8. Найдите объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.

Ответ: 1.

в) Объём куба равен 24. Найдите объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.

Ответ: 3.

Занятие 29. Объемы многогранников. Призма

Повторяем теорию

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ и n параллелограммов $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, …, $A_nA_1B_1B_n$, называется n-угольной призмой, которая обозначается $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ (Рис. 59).

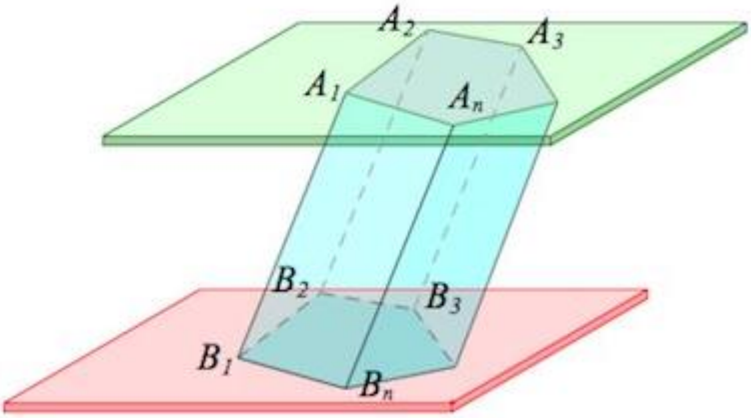


Рис. 59

Прямая призма – призма, в которой все боковые грани перпендикулярны основанию. Высота прямой призмы равна длине бокового ребра.

Наклонная призма – призма, в которой боковые грани не перпендикулярны основанию. Высота наклонной призмы меньше длины бокового ребра.

Диагональное сечение призмы – пересечение призмы плоскостью, проходящей через диагональ основания призмы и боковое ребро. Треугольная призма не имеет диагональных сечений (Рис. 60).

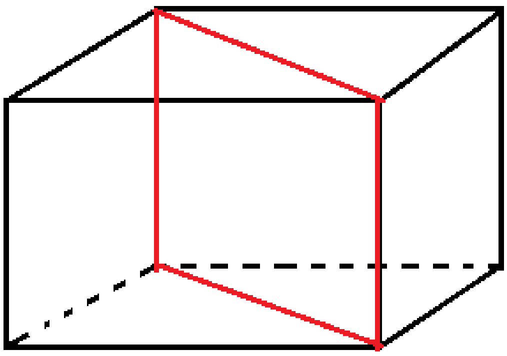


Рис. 60

Перпендикулярное сечение – пересечение призмы плоскостью, пересекающей боковые ребра под прямым углом. Перпендикулярное сечение перпендикулярно всем боковым ребрам и боковым граням (Рис. 61).

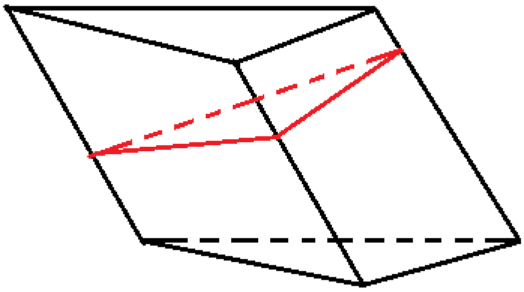


Рис. 61

Формула для нахождения *объема призмы* $V=S_{осн}H$.

Формула для нахождения ***объема наклонной призмы***, где S_n – площадь перпендикулярного сечения и L – длина бокового ребра $V=S_nL$.

Объём правильной прямой призмы через высоту h, длину боковой стороны a, и количество сторон n

$$V=\frac{n}{4}ha^2 ctg\frac{\pi}{n}.$$

Объём призмы, усеченной плоскостью, не параллельной основанию равен $V=Sh$, где S – площадь перпендикулярного сечения, h – расстояние между центрами тяжести верхнего и нижнего оснований (Рис. 62).

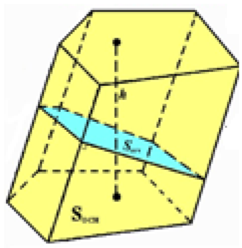


Рис. 62

Объём треугольной призмы, усеченной плоскостью, не параллельной основанию равен $V=\frac{1}{3}(a+b+c)S$, где S – площадь сечения, перпендикулярного сечения, a, b, c – длины боковых ребер.

Проверяем себя

Т89. Заполните пропуски:

а) *Перпендикулярное сечение* – пересечение призмы плоскостью, пересекающей боковые ребра под __________ углом.

Ответ: прямым.

б) *Прямая призма* – призма, боковые грани которой ___________ основанию.

Ответ: перпендикулярны.

Т90. Укажите верные утверждения:

а) треугольная призма имеет 3 диагональных сечения;

б) высота прямой призмы равна длине бокового ребра;

в) треугольная призма не имеет диагональных сечений.

Ответ: б), в).

Решаем задачи

166. а) Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем этой призмы, если объем отсечённой треугольной призмы равен 6.

Ответ: 24.

б) Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем этой призмы, если объем отсечённой треугольной призмы равен 8.

Ответ: 32.

в) Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной призмы, если объем исходной треугольной призмы равен 48.

Ответ: 12.

167. а) Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 2, а боковые ребра равны $10\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30^0.

Ответ: 90.

б) Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 3, а боковые ребра равны $10\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30^0.

Ответ: 202,5.

в) Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 4, а боковые ребра равны $10\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30^0.

Ответ:360.

168. а) Если каждое ребро куба увеличить на 3, то его площадь поверхности увеличится на 162. Найдите ребро куба.

Ответ: 3.

б) Если каждое ребро куба увеличить на 3, то его площадь поверхности увеличится на 234. Найдите ребро куба.

Ответ: 5.

в) Если каждое ребро куба уменьшить на 1, то его площадь поверхности уменьшится на 114. Найдите ребро куба.

Ответ: 10.

169. а) Площадь поверхности куба равна 54. Найдите его объем.

Ответ: 27.

б) Площадь поверхности куба равна 24. Найдите его объем.

Ответ: 8

в) Объем куба равен 125. Найдите площадь его поверхности.

Ответ: 150.

170. а) Площадь перпендикулярного сечения призмы равна 20, боковое ребро 10. Найдите объем призмы.

Ответ: 200

б) Найдите площадь перпендикулярного сечения призмы, если объем призмы равен 28, а боковое ребро 4.

Ответ: 7

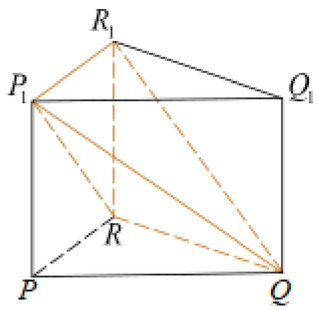
в) Объем призмы равен 125. Найдите боковое ребро, если площадь перпендикулярного сечения равна 25.

Ответ: 5.

Задачи с развернутым ответом

171. Основанием прямой треугольной призмы $PQRP_1Q_1R_1$ является прямоугольный треугольник PQR с прямым углом R. Диагонали боковых граней PP_1Q_1Q и PP_1R_1R равны 17 и 15 соответственно, $PQ = 10$.

Найдите объем пирамиды P_1QRR_1.



Решение. а) Заметим, что прямые RQ и PR перпендикулярны, прямые RQ и RR_1 перпендикулярны. Следовательно, прямая RQ перпендикулярна плоскости PRR_1. Тогда прямые RQ и RP_1 также перпендикулярны, и треугольник P_1QR – прямоугольный.

$$V_{P_1QRR_1} = \frac{1}{3} S_{P_1RR_1} \cdot RQ$$

$$P_1R_1 = PR = \sqrt{PQ^2 - RQ^2} = 6$$

$$RQ = \sqrt{P_1Q^2 - P_1R^2} = 8$$

$$RR_1 = \sqrt{P_1R^2 - P_1R_1^2} = 3\sqrt{21}$$

$$S_{P_1RR_1} = \frac{1}{2} P_1R_1 \cdot RR_1 = 9\sqrt{21}$$

$$V_{P_1QRR_1} = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{21} \cdot 8 = 24\sqrt{21}$$

Ответ: $24\sqrt{21}$.

172. Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.

а) Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны.

б) Найдите объем призмы, если $A_1C=BD=2$.

Решение.

а) Поскольку $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая призма, прямая AA_1 перпендикулярна плоскости ABC, то есть AC – проекция A_1C на плоскость ABC. Так как $ABCD$ – ромб, прямые AC и BD перпендикулярны. Тогда по теореме о трех перпендикулярах прямая A_1C перпендикулярна прямой BD.

б) Пусть $AB = AA_1 = a$, $AC \cap DB = O$. По теореме Пифагора в треугольнике A_1AC имеем:

$$A_1C^2 = AA_1^2 + AC^2 \Leftrightarrow 4 = a^2 + AC^2 \Leftrightarrow AC = \sqrt{4 - a^2}$$

По теореме Пифагора в треугольнике DOC имеем:

$$CD^2 = OC^2 + OD^2 \Leftrightarrow a^2 = 1 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 \Leftrightarrow AC = 2\sqrt{a^2 - 1}$$

Найдем a:

$$\sqrt{4 - a^2} = 2\sqrt{a^2 - 1} \underset{a>1}{\Leftrightarrow} 4 - a^2 = 4(a^2 - 1) \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{8}{5}}$$

Тогда AC равно:

$$AC = 2\sqrt{\frac{8}{5} - 1} = 2\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Отсюда объём призмы равен:

$$V = AA_1 \cdot S_{ABCD} = \sqrt{\frac{8}{5}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{6}}{5}$.

Занятие 30. Объемы многогранников. Пирамида

Повторяем теорию

Пирамида – это многогранник, основанием которого является многоугольник, а остальные грани представляют собой треугольники с общей вершиной (Рис. 63).

У пирамиды есть *основание* и *боковые грани* с общей вершиной – *вершиной пирамиды*.

Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называют *ребрами.*

Рис. 63

Перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания – *высота* пирамиды. Высота может лежать внутри пирамиды, вне пирамиды, может быть одним из боковых ребер (Рис. 64).

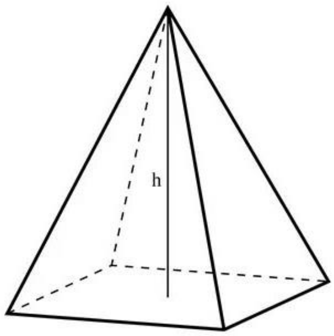


Рис. 64

Правильная пирамида – пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является высотой.

Все боковые ребра правильной пирамиды равны.

Боковые грани правильной пирамиды являются равными равнобедренными треугольниками (Рис. 65).

Рис. 65

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется *апофемой* (Рис. 66).

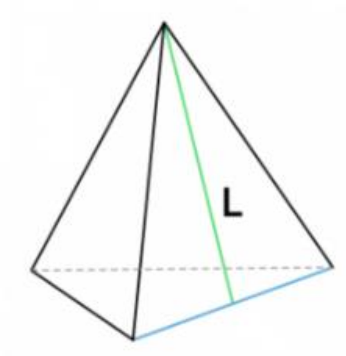


Рис. 66

Треугольная пирамида – это *тетраэдр* (Рис. 67).

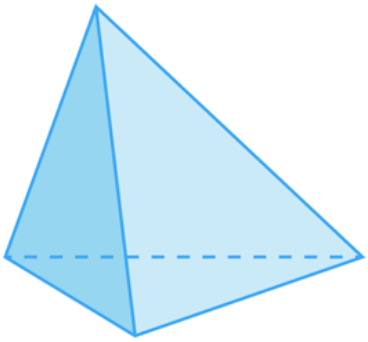


Рис. 67

Площадь боковой поверхности пирамиды – это сумма площадей боковых граней.

Площадь полной поверхности пирамиды – сумма площадей всех ее граней.

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

<u>Проверяем себя</u>

Т91. Заполните пропуски:

а) *Пирамида* – это ___________, основанием которого является ___________, а остальные грани представляют собой ___________ с общей вершиной.

Ответ: многогранник, многоугольник, треугольники.

б) *Правильная пирамида* – пирамида, в основании которой лежит ___________, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ____________.

Ответ: правильный многоугольник, высотой.

Т92. Укажите верные утверждения:

а) все боковые грани пирамиды - квадраты;

б) боковые грани пирамиды - треугольники;

в) боковые ребра пирамиды равны.

Ответ: б).

Т93. Укажите неверные утверждения:

а) все боковые грани пирамиды – треугольники;

б) боковые грани пирамиды – равные треугольники;

в) боковые ребра правильной пирамиды не равны.

Ответ: б), в).

Решаем задачи

173. а) В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, SO=15, BD=16. Найти боковое ребро SA.

Ответ: 17.

б) В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, SO=4, BD=6. Найти боковое ребро SA.

Ответ: 5.

в) В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, SO=6, BD=16. Найти боковое ребро SA.

Ответ: 10.

174. а) Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 48, а высота равна 7.

Ответ: 2400.

б) Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6, а высота равна 4.

Ответ: 60.

в) Найдите площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 16, а высота равна 6.

Ответ: 576.

175. а) Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в десять раз?

Ответ: 10.

б) Во сколько раз уменьшится объем пирамиды, если ее высоту уменьшить в десять раз?

Ответ: 10.

в) Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в 2 раза?

Ответ: 2.

176. а) Найдите объем пирамиды, высота которой равна 4, а основание – прямоугольник со сторонами 8 и 3.

Ответ: 32.

б) Найдите объем пирамиды, высота которой равна 6, а основание – квадрат со стороной 9.

Ответ: 162.

в) Найдите объем пирамиды, высота которой равна $4\sqrt{3}$, а основание – равносторонний треугольник со стороной 4.

Ответ: 16.

177. а) Найдите объём правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 48, а высота равна 9.

Ответ: 6912.

б) Найдите объём правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6, а высота равна 4.

Ответ: 48.

в) Найдите объём правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 16, а высота равна 6.

Ответ: 512.

Занятие 31. Объемы многогранников. Пирамида

Повторяем теорию

Рассмотрим многоугольник $A_1A_2...A_n$, лежащий в плоскости α, и точку P, не лежащую в этой плоскости. Если соединить точку P отрезками с вершинами многоугольника, то образуется n треугольников PA_1A_2, PA_2A_3, …, PA_nA_1. Многогранник, составленный из n-угольника $A_1A_2...A_n$ и этих треугольников, называется n-угольной пирамидой $PA_1A_2…A_n$ (Рис. 68).

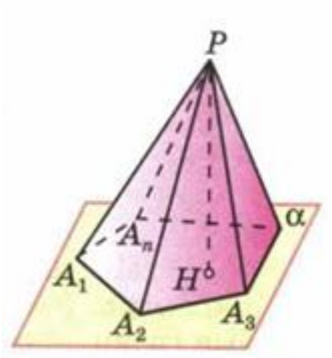


Рис. 68

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Часть пирамиды, заключенная между двумя плоскостями – плоскостью основания и секущей плоскостью, проведенной параллельно основанию, называют *усеченной пирамидой* (Рис. 69).

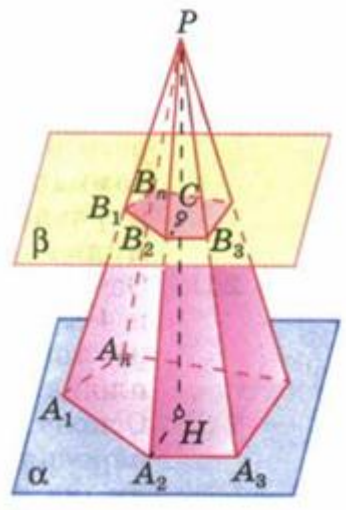


Рис. 69

Основание пирамиды и сечение пирамиды параллельной плоскостью называются *основаниями* усеченной пирамиды. Остальные грани называют *боковыми*. Расстояние между плоскостями оснований называют *высотой* усеченной пирамиды. Ребра, которые не принадлежат основаниям, называются *боковыми*.

Основания усеченной пирамиды *подобные n-угольники*. Если основания усеченной пирамиды – правильные многоугольники, а все боковые ребра равны между собой, то такая усеченная пирамида называется *правильной*. *Объём усечённой пирамиды* равен суме объёмов трёх пирамид, которые имеют высоту, одинаковую с высотой усечённой пирамиды, а основания: одно – нижнее основание данной пирамиды, второе – верхнее, а третья – основание, площадь которого равна среднему геометрическому площадей верхнего и нижнего основания.

Пусть площади оснований усечённой пирамиды равны S_1 и S_2, а высота равна h, тогда объём: $V = \frac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})$.

Проверяем себя

Т94. Заполните пропуски:

а) *Усеченная* п*ирамида* – это часть __________, заключенная между двумя плоскостями – плоскостью основания и ___________, проведенной параллельно основанию.

Ответ: пирамиды, секущей плоскостью.

б) *Правильная пирамида* – пирамида, в основании которой лежит __________, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ___________.

Ответ: правильный многоугольник, высотой.

Т95. Укажите верные утверждения:

а) все боковые грани усеченной пирамиды – квадраты;

б) боковые грани усеченной пирамиды – трапеции;

в) боковые ребра усеченной пирамиды равны.

Ответ: б).

Решаем задачи

178. а) Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 5, а объем равен $6\sqrt{3}$.

Ответ: 2,88.

б) Найдите объём правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 8, а высота равна $6\sqrt{3}$.

Ответ: 96.

в) Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 6, а объем равен $6\sqrt{3}$.

Ответ: 2.

179. а) Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 6, а угол между боковой гранью и основанием равен 45^0. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 162.

б) Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 8, а угол между боковой гранью и основанием равен 45^0. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 384.

в) Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2, а угол между боковой гранью и основанием равен 45^0. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 6.

180. а) Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 4 и 5. Ее объем равен 80. Найдите высоту этой пирамиды.

Ответ: 12.

б) Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 6 и 5. Ее объем равен 90. Найдите высоту этой пирамиды.

Ответ: 9.

в) Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 14 и 3. Ее объем равен 420. Найдите высоту этой пирамиды.

Ответ: 30.

181. а) Объем треугольной пирамиды *SABC*, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF* равен 1. Найдите объем шестиугольной пирамиды.

Ответ: 6.

б) Объем треугольной пирамиды *SABC*, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF* равен 3. Найдите объем шестиугольной пирамиды.

Ответ: 18.

в) Объем треугольной пирамиды *SABC*, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF* равен 5. Найдите объем шестиугольной пирамиды.

Ответ: 30.

182. а) В треугольной усеченной пирамиде с высотой, равной 10, стороны одного из оснований равны 27, 29 и 52. Определите объем усеченной пирамиды, если периметр другого основания равен 72.

Ответ: 1900.

б) В треугольной усеченной пирамиде с высотой, равной 10, стороны одного из оснований равны 4, 13 и 15. Определите объем усеченной пирамиды, если периметр другого основания равен 64.

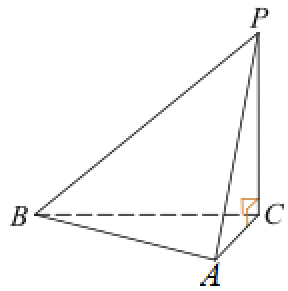
Ответ: 560.

в) В треугольной усеченной пирамиде с высотой, равной 5, стороны одного из оснований равны 26, 28 и 30. Определите объем усеченной пирамиды, если периметр другого основания равен 42.

Ответ: 980.

Задачи с развернутым ответом

183. В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что AB=13, PB=15, $\cos\angle PBA=\frac{48}{65}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C. Прямые PA и BC перпендикулярны.



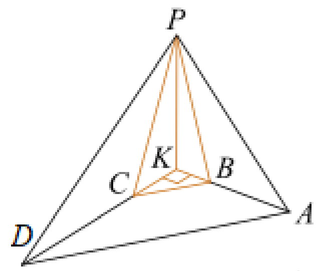
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите объем пирамиды $PABC$.

Решение. а) Прямая BC перпендикулярна плоскости APC, поскольку она перпендикулярна прямым PA и PC. Значит, прямые AC и BC перпендикулярны.

б) По теореме косинусов

$$PA=\sqrt{PB^2+BA^2-2PB\cdot BA\cdot\cos\angle PBA}=\sqrt{106}.$$



По теореме Пифагора:

$$AC^2+BC^2=169, AC^2+PC^2=106, BC^2+PC^2=225,$$

$$PC^2=81, BC^2=144, AC^2=25$$

$$PC=9, BC=12,\ AC=5$$

Значит, объем пирамиды равен $V=\frac{1}{3}\cdot PC\cdot\frac{AC\cdot BC}{2}=90$.

Ответ: б) 90.

184. В основании четырехугольной пирамиды $PABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD. Известно, что сумма углов BAD и ADC равна 90^0, плоскости PAB и PCD перпендикулярны основанию, прямые AB и CD пересекаются в точке K.

а) Докажите, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PDC.

б) Найдите объем $PKBC$, если AB=3, BC=5, CD=4, а высота пирамиды $PABCD$ равна 7.

Решение. а) Заметим, что PK – линия пересечения плоскостей PAB и PCD, $\angle AKD=180^0-(\angle BAD+\angle ACD)=90^0$.

Заметим, что KD – линия пересечения плоскостей ABC и PCD, и при этом прямые AK и KD перпендикулярны, следовательно, прямая AK перпендикулярна плоскости PCD и, в частности, прямая AK перпендикулярна прямой PK. Аналогично прямые DK и PK перпендикулярны. Таким образом, угол AKD –

линейный угол двугранного угла между плоскостями PAB и PCD, и, следовательно, плоскости перпендикулярны.

б) Из п. а) следует, что PK – высота пирамид $PABCD$ и $PKBC$, а в основании пирамиды $PKBC$ лежит прямоугольный треугольник KBC. Заметим, что треугольники KBC и KAD – подобны. Пусть коэффициент подобия равен k, $BK=x$, $CK=y$, тогда

$$AK = x+3 = kx \Leftrightarrow x = \frac{3}{k-1}, DK = y+3 = ky \Leftrightarrow y = \frac{4}{k-1}.$$

Поскольку $x^2+y^2=5$, тогда

$$(x+3)^2+(y+4)^2 = k^2\cdot 5^2$$

$$x^2+6x+9+y^2+8y+16=25k^2$$

$$2\cdot 25+\frac{2\cdot 9}{k-1}+\frac{2\cdot 16}{k-1}=25k^2$$

$$2+\frac{2}{k-1}=k^2$$

$$k^3-k^2-2k=0$$

$$k=2$$

Отсюда $x=3$, $y=4$. Теперь найдём объём $PKBC$:

$$V_{PKBC}=\frac{1}{3}PK\cdot S_{KBC}=14$$

Ответ: б) 14.

Занятие 32. Подобные тела в пространстве

Повторяем теорию

Два тела называются *подобными,* если одно из них получено путем уменьшения или увеличения всех его линейных размеров в одном и том же отношении (Рис.70).

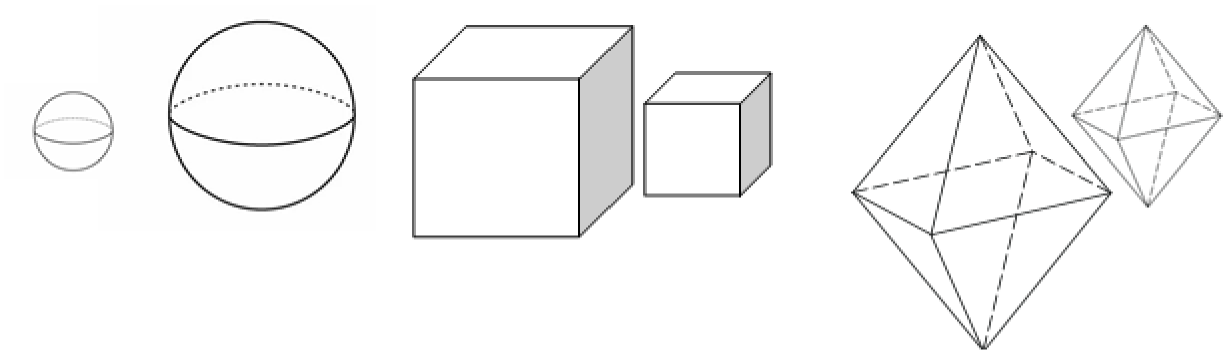


Рис.70

Две правильные пирамиды с одним и тем же числом граней подобны, если радиусы окружностей, описанных около оснований, пропорциональны их высотам.

Два конуса подобны, если радиусы их оснований пропорциональны их радиусам (Рис. 71).

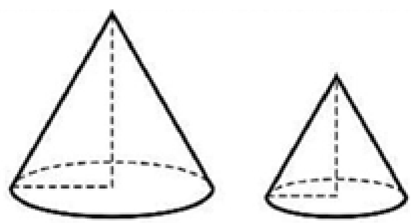


Рис. 71

Все равные тела равновелики, но не все равновеликие тела равны.

Отношение объёмов подобных тел равно кубу коэффициента подобия.

Если в пирамиде (конусе или усеченном конусе) проведем секущую плоскость параллельно основанию, то она отсечет от нее другую пирамиду (конус, усеченный конус), подобную данной.

Два цилиндра, конуса или усеченных конуса называют подобными, если подобны их осевые сечения.

Проверяем себя

Т96. Заполните пропуски:

а) Тела называют __________, если одно из них получено путем уменьшения или увеличения всех его линейных размеров в одном и том же отношении.

Ответ: подобными.

б) Все _______ тела равновелики, но не все _________ тела равны.

Ответ: равные, равновеликие.

Т97. Укажите верные утверждения:

а) Отношение объёмов подобных тел равно квадрату коэффициента подобия;

б) Отношение объёмов подобных тел равно кубу коэффициента подобия;

в) Отношение объёмов подобных тел равно коэффициенту подобия.

Ответ: б).

Решаем задачи

185. а) Даны два шара с радиусами 2 и 4. Чему равно отношение площади поверхности большего шара к площади поверхности меньшего шара?

Ответ: 4.

б) Даны два шара с радиусами 1 и 5. Чему равно отношение площади поверхности меньшего шара к площади поверхности большего шара?

Ответ: 0,04.

в) Даны два шара с радиусами 3 и 1,5. Чему равно отношение площади поверхности большего шара к площади поверхности меньшего шара?

Ответ: 4.

186. а) Во сколько раз площадь поверхности куба со стороной 5 больше площади поверхности куба со стороной 2?

Ответ: 6,25.

б) Во сколько раз площадь поверхности куба со стороной 10 больше площади поверхности куба со стороной 2?

Ответ: 25.

в) Во сколько раз площадь поверхности куба со стороной 7 больше площади поверхности куба со стороной 2?

Ответ: 12,25.

187. а) Высота конуса равна 5 см. На расстоянии 2 см от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объём исходного конуса, если объём меньшего конуса, отсекаемого от исходного, равен 24 см^3.

Ответ: 375.

б) Высота конуса равна 8 см. На расстоянии 4 см от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объём исходного конуса, если объём меньшего конуса, отсекаемого от исходного, равен 26 см^3.

Ответ: 208.

в) Высота конуса равна 10 см. На расстоянии 2 см от основания его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объём отсекаемого от исходного меньшего конуса, если объём исходного конуса равен 500 см^3.

Ответ: 256.

188. а) В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает 0,5 высоты. Объём жидкости равен 28 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?

Ответ: 196.

б) В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает 0,25 высоты. Объём жидкости равен 8 мл. Сколько миллилитров жидкости вмещает в себя полный сосуд?

Ответ: 512.

в) В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает 0,1 высоты. Объём жидкости равен 2 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?

Ответ: 1998.

189. а) Дано два шара. Радиус первого шара в 45 раз больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

Ответ: 2025.

б) Дано два шара. Радиус первого шара в 5 раз больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

Ответ: 25.

в) Дано два шара. Радиус первого шара в 10 раз меньше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара меньше площади поверхности второго?

Ответ: 100.

190. а) Радиусы двух шаров равны 32 и 60. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

Ответ: 68.

б) Радиусы двух шаров равны 6 и 8. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

Ответ: 10.

в) Радиусы двух шаров равны 12 и 16. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

Ответ: 20.

191. а) Объем второго шара в 1331 раз больше объема первого. Во сколько раз площадь поверхности второго шара больше площади поверхности первого?

Ответ: 121.

б) Объем второго шара в 512 раз больше объема первого. Во сколько раз площадь поверхности второго шара больше площади поверхности первого?

Ответ: 64.

в) Объем второго шара в 3375 раз больше объема первого. Во сколько раз площадь поверхности второго шара больше площади поверхности первого?

Ответ: 225.

192. а) Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?

Ответ: 27.

б) Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в 5 раза?

Ответ: 125.

в) Во сколько раз уменьшится объем шара, если его радиус уменьшить в три раза?

Ответ: 27.

193. а) В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 10. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.

Ответ: 25.

а) В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 22. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.

Ответ: 121.

а) В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.

Ответ: 16.

194. а) Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 919. Найдите ребро куба.

Ответ: 17.

б) Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 37. Найдите ребро куба.

Ответ: 3

в) Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 217. Найдите ребро куба.

Ответ: 8.

195. а) Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в десять раз?

Ответ: 1000.

б) Во сколько раз уменьшится объем шара, если его радиус уменьшить в пять раз?

Ответ: 125.

в) Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в два раза?

Ответ: 8.

196. а) Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 43. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.

Ответ: 86.

б) Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 4. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.

Ответ: 8.

в) Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 28. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.

Ответ: 56.

197. а) Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в три раза?

Ответ: 27.

б) Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в 10 раза?

Ответ: 1000.

в) Во сколько раз уменьшится объем правильного тетраэдра, если все его ребра уменьшить в три раза?

Ответ: 27.

Занятие 33. Проверочная работа

Проверочная работа состоит из 8 заданий, представленных в двух вариантах. Первая часть содержит задания базового уровня сложности, вторая часть – задания повышенного и высокого уровня сложности.

Ответом на задания №1-2 является последовательность чисел, к остальным заданиям нужно дать развёрнутое решение.

Вариант 1

Часть 1

1. Какие из следующих утверждений верны?

а) Одна из двух параллельных прямых параллельна некоторой плоскости, тогда и вторая прямая параллельна этой плоскости либо лежит в этой плоскости.

б) Через две пересекающиеся прямые можно провести две различные плоскости.

в) Если две стороны треугольника параллельны некоторой плоскости, то третья его сторона параллельна этой плоскости.

г) Если прямая перпендикулярна диагоналям параллелограмма, то она перпендикулярна и плоскости параллелограмма.

д) Если две прямые в пространстве не пересекаются, то они параллельны.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: а), в), г).

2. Установите соответствие между названиями, записанными в левом столбце, и формулами, записанными в правом столбце.

А. Площадь боковой поверхности призмы	1) $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
Б. Объём пирамиды	2) $S=a\cdot b\cdot\sin\alpha$
В. Диагональ прямоугольного параллелепипеда	3) $S=P_{осн}\cdot h$
Г. Площадь параллелограмма	4) $V=\frac{1}{3}\cdot S_{осн}\cdot h$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

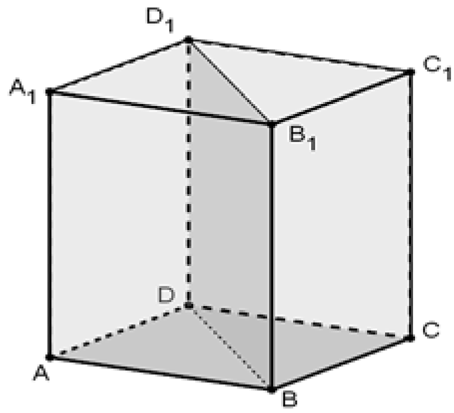
А	Б	В	Г

Ответ: 3412.

3. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 5. Объем призмы равен 30. Найдите ее боковое ребро.

Ответ: 12.

4. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором AD=9, DC=8, DB_1=17. Найдите $S_{BB_1D_1D}$.



Ответ: $12\sqrt{145}$.

5. Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна 5, а высота – 4. Найдите площадь боковой поверхности.

Ответ: $30\sqrt{3}$.

6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известно, что $AB = \sqrt{3}AA_1$. Найдите угол между прямыми AB1 и CC_1. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 60.

<u>Часть 2</u>

7. Найдите площадь полной поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 5, а угол наклона грани к плоскости основания равен 60^0.

Ответ: 75.

8*. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что прямая B_1D перпендикулярна плоскости A_1BC_1.

б) Найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и A_1B_1C.

Ответ: б) 60^0 или $\frac{\pi}{3}$.

Вариант 2

<u>Часть 1</u>

1. Какие из следующих утверждений верны?

а) Если прямая перпендикулярна двум сторонам треугольника, то она перпендикулярна и плоскости треугольника.

б) Любые четыре точки лежат в одной плоскости.

в) Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести две различные плоскости.

г) две стороны трапеции лежат в параллельных плоскостях, то они не могут быть боковыми сторонами.

д) Даны две пересекающиеся плоскости. Существует плоскость, которая пересекает эти плоскости по параллельным прямым.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: а), г), д).

2. Установите соответствие между названиями, записанными в левом столбце, и формулами, записанными в правом столбце.

А. Площадь боковой поверхности пирамиды

Б. Объём призмы

В. Диагональ куба

Г. Площадь треугольника

1) $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha$

2) $d = \sqrt{3a^2}$

3) $V = S_{осн} \cdot h$

4) $S = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot l$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

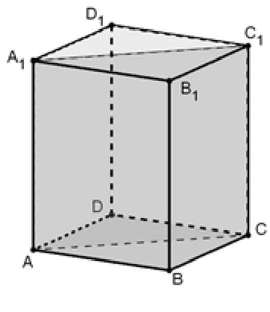
А	Б	В	Г

Ответ: 4321.

3. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, высота призмы равна 10. Найдите площадь ее поверхности.

Ответ: 288.

4. Найдите площадь диагонального сечения AA_1C_1C прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, высота которого равна 12, а стороны основания 9 и 6.



Ответ: $36\sqrt{13}$.

5. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45^0. Найдите объём пирамиды.

Ответ: 18.

6. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AC_1=2BC$. Найдите угол между диагоналями BD_1 и CA_1. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 60^0.

Часть 2

7. Найдите площадь полной поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 2, а угол наклона грани к плоскости основания равен 60^0.

Ответ: 12.

8.* Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что сечение куба плоскостью, проходящей через центр куба перпендикулярно диагонали AC_1, является правильным шестиугольником.

б) Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1.

Ответ: б) $arctg\,\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Занятие 34. Итоговое занятие

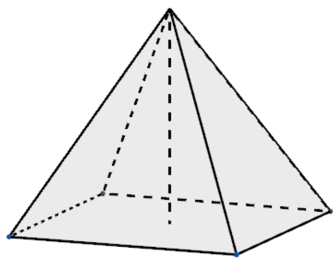
На занятии предполагается проведение практикума с делением класса на разноуровневые группы (две – базового уровня, две – углубленного уровня) с последующим обсуждением ответов. В заданиях каждой группы содержится 7 задач по трем направлениям: задачи по готовым чертежам, прикладная геометрия, повышенный уровень сложности. К каждому заданию группа должна представить развёрнутое решение. На усмотрение учителя количество групп может быть меньше.

Группа 1 (базовый уровень)

Задачи по готовым чертежам

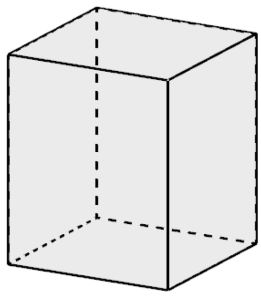
1. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 8, а боковая сторона равна $\sqrt{113}$.

Ответ: 192.



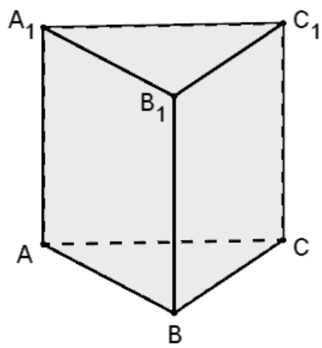
2. Два ребра прямоугольного параллелепипеда равны 4 и 7, а объём параллелепипеда равен 140. Найдите площадь поверхности этого параллелепипеда.

Ответ: 166.



3. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 6, а высота этой призмы равна $8\sqrt{3}$. Найдите объём призмы $ABCA_1B_1C_1$.

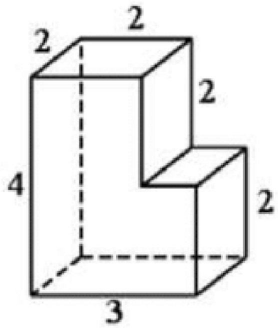
Ответ: 216.



Прикладная стереометрия

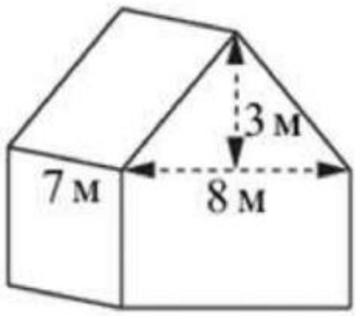
4. Деталь имеет форму изображённого на рисунке многогранника (все двугранные углы прямые). Числа на рисунке обозначают длины рёбер в сантиметрах. Найдите объём этой детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах.

Ответ: 20.



5. Двухскатную крышу дома, имеющего в основании прямоугольник (см. рис.), необходимо полностью покрыть рубероидом. Высота крыши равна 3 м, длины стен дома равны 7 м и 8 м. Найдите, сколько рубероида (в квадратных метрах) нужно для покрытия этой крыши, если скаты крыши равны.

Ответ: 70.



<u>Повышенный уровень сложности</u>

6. Основания прямой призмы – ромб с острым углом 60°. Боковая ребро призмы равно 10 см, а площадь боковой поверхности – 240 см^2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.

Ответ: 60 см^2.

7. Сторона правильной треугольной пирамиды равна 6, а высота $\sqrt{13}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

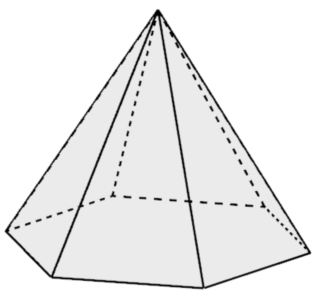
Ответ: 36.

Группа 2 (базовый уровень)

Задачи по готовым чертежам

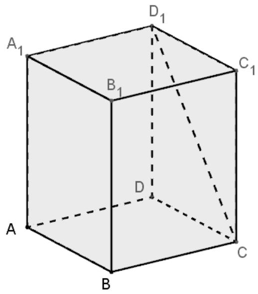
1. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 14, а боковые ребра равны 25. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

Ответ: 1008.



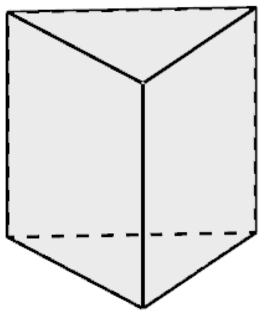
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра CD, CB и диагональ боковой грани CD_1 равны соответственно 3, 6 и $\sqrt{58}$. Найдите объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Ответ: 126.



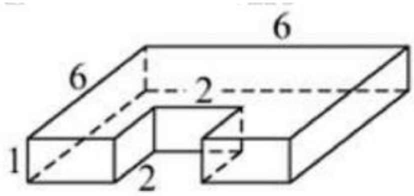
3. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен $4\sqrt{3}$, а гипотенуза равна 8. Найдите объём призмы, высота которой равна $11\sqrt{3}$.

Ответ: 264.



4. Деталь имеет форму изображённого на рисунке многогранника (все двугранные углы прямые). Числа на рисунке обозначают длины рёбер в сантиметрах. Найдите площадь поверхности этой детали. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

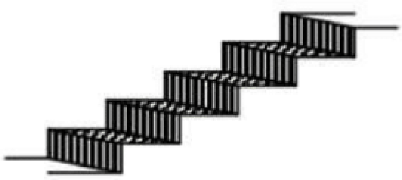
Ответ: 92.



Прикладная стереометрия

5. Ступени лестницы покрасили в тёмный цвет, как показано на рисунке (штриховкой). Найдите площадь окрашенной поверхности, если глубина каждой ступеньки равна 30 см, высота 15 см, а ширина 90 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Ответ: 17550.



<u>Повышенный уровень сложности</u>

6. Основания прямой призмы – ромб со стороной 5 см и тупым углом 120°. Боковая поверхность призмы имеет площадь 240 см^2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.

Ответ: 60 см^2.

7. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 5, а высота равна $\sqrt{13}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

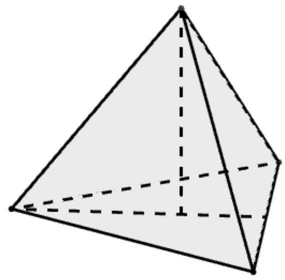
Ответ: 36.

Группа 3 (углубленный уровень)

Задачи по готовым чертежам

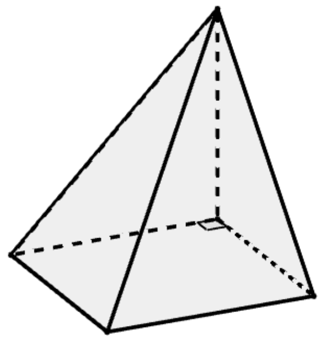
1. Высота правильной треугольной пирамиды равна стороне основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 60.



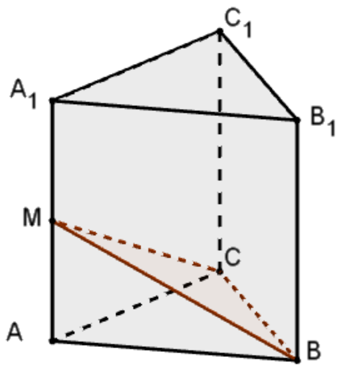
2. В основании пирамиды лежит квадрат, одно из боковых рёбер перпендикулярно основанию и равно стороне основания. Найдите большее боковое ребро, если высота пирамиды равна $4\sqrt{3}$.

Ответ: 12.



3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через сторону BC основания и середину M бокового ребра AA_1 проведено сечение, составляющее угол 45° с плоскостью основания. Найдите объём призмы, если сторона её основания равна 10.

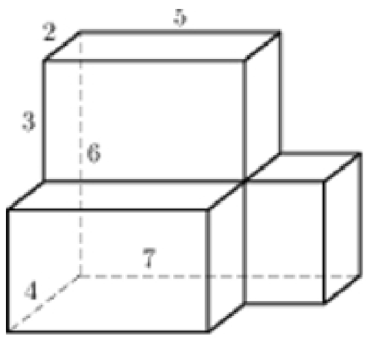
Ответ: 750.



Прикладная геометрия

4. Деталь имеет форму изображённого на рисунке многогранника (все двугранные углы прямые). Числа на рисунке обозначают длины рёбер в сантиметрах. Найдите площадь поверхности этой детали. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Ответ: 156.

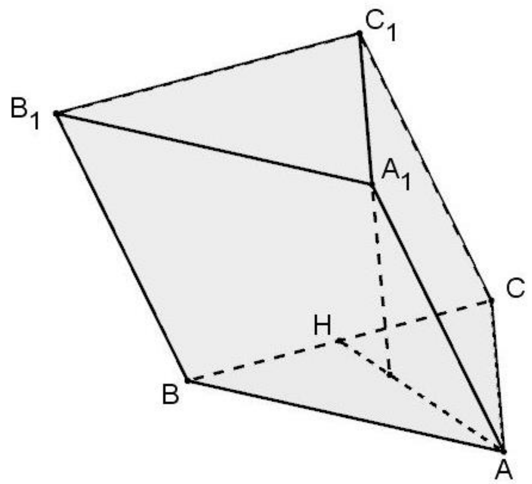


5. Сколько нужно заплатить (в рублях) за покупку минимального количества рулонов виниловых обоев для оклейки комнаты в форме прямоугольного параллелепипеда, с размерами пола 5х4 м^2 и высотой 2 м, если ширина одного рулона 530 мм, а длина – 16 м? Площадь окон и дверей составляет 20% всей плоскости стен. Стоимость одного рулона обоев 860 рублей.

Ответ: 3440.

Повышенный уровень сложности

6. Дана наклонная призма $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежит правильный треугольник ABC. Проекция точки A_1 на плоскость ABC лежит на прямой, содержащей высоту AH треугольника ABC. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости BB_1C, если боковое ребро, наклоненное под углом 60^0 к основанию, равно 12, а сторона основания равна 3.



Ответ: 2,25.

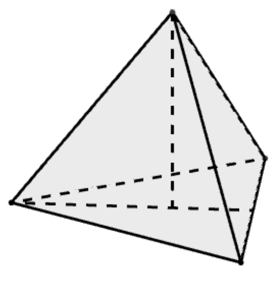
7. Площадь сечения куба плоскостью, проходящей через концы трёх ребер, выходящих из одной вершины, равна $18\sqrt{3}$. Найдите длину ребра куба.

Ответ: 6.

Группа 4 (углубленный уровень)

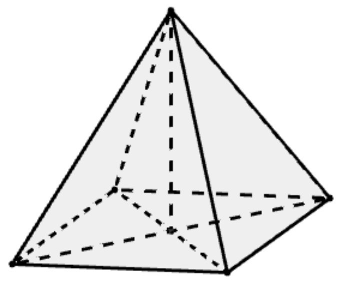
Задачи по готовым чертежам

1. Высота правильной треугольной пирамиды втрое меньше стороны основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.



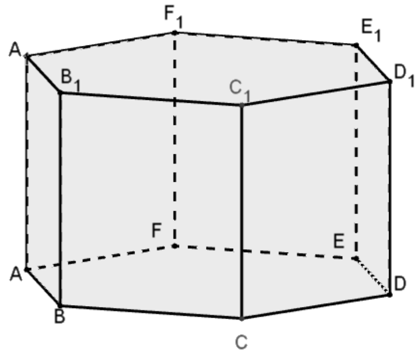
Ответ: 30.

2. В основании пирамиды лежит ромб, большая диагональ которого равна 22. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей и равна $5\sqrt{3}$. Найдите большее боковое ребро.



Ответ: 14.

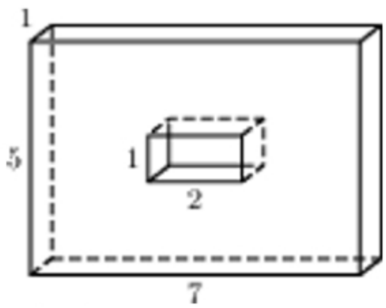
3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ рёбра основания равны 5, а высота равна $10\sqrt{3}$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки B, C, E, B_1, C_1, E_1.



Ответ: 375.

Прикладная геометрия

4. Деталь имеет форму изображённого на рисунке многогранника (все двугранные углы прямые). Числа на рисунке обозначают длины рёбер в сантиметрах. Найдите площадь поверхности этой детали. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



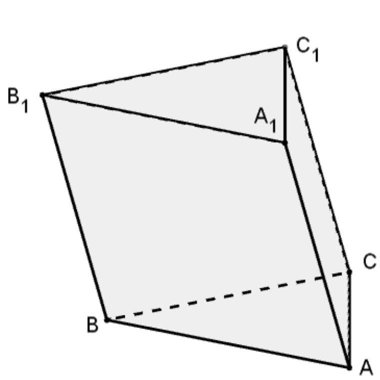
Ответ: 96.

5. Вычислите, минимальную сумму (в рублях), которую нужно потратить на приобретение листов шифера длиной 1,75 м, шириной 1,13 м при покрытии кровли в форме правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 4,2 м и длиной уклона 6 м. Стоимость одного листа шифера 490 рублей.

Ответ: 11760.

<u>Повышенный уровень сложности</u>

6. Дана наклонная призма $ABCA_1B_1C_1$. Найдите расстояние от точки A_1 до прямой BB_1, если в основании призмы лежит правильный треугольник ABC со стороной $9\sqrt{2}$, AA_1=4 и $\angle BAA_1=\angle CAA_1=45^0$.



Ответ: 9.

7. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны $\sqrt{24}$. Найдите расстояние от точки D до прямой A_1C_1.

Ответ: 6.

Список использованных источников

1. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений. 4-е изд. М.: Рос. акад. наук, Рос. акад-. образования, изд-во «Просвещение», 2006. 240 с.

2. Алимов А. Ш. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия: 10-11 е классы: базовый и углубленный уровни / А. Ш. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева. М. : Просвещение, 2016. 463 с.

3. Атанасян Л. С. Геометрия 10-11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профил. уровни / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев. М. : Просвещение, 2018. 255 с.

4. Веселовский С.Б., Рябчинская В.Д. Геометрия: дидактические материалы по геометрии для 10 класса. М.: Просвещение, 2008. 96 с.

5. Геометрия. 10-11 классы: программы общеобразовательных учреждений / Сост.: Т.А. Бурмистрова. М.: Просвещение, 2010. 38 с.

6. Геометрия:задачи на готовых чертежах для подготовки к ЕГЭ 10-11 классы / Э.Н.Балаян.-Ростов/Д:Феникс;2018-208 с.

7. Глазков Ю.А., Юдина И.И., Бутузов В.Ф. Геометрия. Рабочая тетрадь 10 класс: пособие для учащихся общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2009. 100 с.

8. Задачи на готовых чертежах. Стереометрия: практикум для учащихся учреждений общего образования:в 2ч.Ч.2 / А.И.Орехова.-5-е изд.-Мозырь:Белый ветер,2014.-62,с.:ил.-(Дидактический материал).

9. Изучение геометрии в 10-11 классах: метод. рекомендации к учеб. / Кн. для учителя / [С.М. Саакян, В.Ф. Бутузов]. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2003 г.

10. Кисилев А. П. Геометрия: учебное пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 328 с.

11. Ковалева Г.И. Геометрия. Задания на готовых чертежах по стереометрии. 10-11 классы.

12. Костицын В.Н. Практические занятия стереометрии. -М.: Издательство «Экзамен», 2004. 160 с.

13. Погорелов А.В. Геометрия. 10-11 класс. Учебник для общеобразоват. организаций. М.: Просвещение, 2014. 175с.

14. Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ по математике [Электронный ресурс] – URL: https://math100.ru/

15. Поурочные разработки по геометрии: 10 класс / Сост. В.А. Яровенко. – М.: ВАКО, 2010.

16. Рабинович Е.М. Задачи и упражнения на готовых чертежах. 10-11 классы. Геометрия. М.: Илекса, 2014. 80 с.

17. Рыжик В.И. Геометрия: дидакт. материалы для 10 кл. общеобразовательных учреждений. 10-е изд. М.: Просвещение, 2008. 128 с.

18. Рябинович Е.М.Задачи и упражнения на готовых чертежах.10-11 классы.Геометрия.-М.:ИЛЕКСА,2014.-80 с.

19. Саакян С.М., Бутузов В.Ф. Изучение геометрии в 10-11 классах: кн. для учителя. 4-е изд., дораб. М.: Просвещение, 2010. 248 с.

20. Саакян С.М., Бутузов В.Ф. Изучение геометрии в 10-11 классах: Методические рекомендации к учебнику: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 2003.

21. Савченко, В. И. Стереометрия на готовых чертежах и макетах / В.И. Савченко, М.В. Крылович. - Минск: Сэр-Виг, 2014. - 96 с.

22. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике. 2-е изд., дораб. М.: Просвещение, 2005. 255 с.

23. Симонов А.Я., Бакаев Д.С., Эпельман А.Г. и др. Система тренировочных задач и упражнений по математике. – М., Просвещение, 1991.

24. Смирнов В.А. «Геометрия. Стереометрия», пособие для подготовки к ЕГЭ/под редакцией А.Л. Семёнова, И.В. Ященко/Москва, изд-во МЦНМО, 2009 г.

25. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Изображение пространственных фигур. Элективный курс. 10-11 классы: учеб. пособие для общеобразоват. учреждений М.: Мнемозина, 2007. 64 с.

26. Ященко И.В., Шестаков С.А. Я сдам ЕГЭ! Математика. Типовые задания. Учебное пособие для общеобразовательных организаций. Профильный уровень. Часть 3. Геометрия. – М. Просвещение, 2018.

Авторы – составители:

Белай Елена Николаевна, заведующий кафедрой математики, информатики и технологического образования ГБОУ ИРО Краснодарского края

Задорожная Ольга Владимировна, доцент кафедры математики, информатики и технологического образования ГБОУ ИРО Краснодарского края

Кузьмина Карина Александровна, старший преподаватель кафедры математики, информатики и технологического образования ГБОУ ИРО Краснодарского края

Борейко Алла Сергеевна, учитель математики МБОУ СОШ № 6 ст. Каневской

Борщакова Елена Николаевна, учитель математики МОАУ СОШ №4 им. А.И. Миргородского г. Новокубанска Новокубанский район

Волкова Ольга Алексеевна, учитель математики МАОУ СОШ № 34, г. Новороссийск

Голинченко Ольга Николаевна, учитель математики МБОУ СОШ № 5 имени Я.П. Сторчака ст. Октябрьская, Крыловский район

Еременко Ольга Николаевна, учитель математики МАОУ СОШ 2 им Н.В.Богданченко, Усть-Лабинский район

Кобецкая Нелли Александровна, учитель математики МОАНУ СОШ № 17 им. К.В. Навальневой, Кореновский район

Костюченко Анастасия Сергеевна, учитель математики МБОУ СОШ № 43 станицы Северской МО Северский район имени Героя Советского Союза С.Г.Соболева

Пенькова Анастасия Николаевна, учитель математики МБОУ СОШ № 14 им. Д.А. Старикова с. Соколовское, Гулькевичский район

Попова Ирина Николаевна, учитель математики МБОУ СОШ № 6 им. Ю.А. Гагарина, Кавказский район

Прошина Елена Анатольевна, учитель математики МАОУ СОШ 35, г. Краснодар

Роговая Марина Александровна, учитель математики МБОУ СОШ № 15 им. В.П. Михалько с. Отрадо-Кубанского, Гулькевичский район

Рубенкова Ольга Семеновна, учитель математики МБОУ СОШ № 1 г. Тихорецка

Татаркина Ольга Алексеевна, учитель математики МБОУ СОШ № 33 им. Ю.А. Гагарина, Тихорецкий район

Ткачева Елена Васильевна, учитель математики МБОУ СОШ №8 ст. Новорождественской, Тихорецкий район

Чередниченко Инесса Викторовна, учитель математики МОАНУ СОШ № 17 им. К.В. Навальневой, Кореновский район

Шакитько Олеся Ивановна, учитель математики МОАНУ СОШ № 17 им. К.В. Навальневой, Кореновский район

Учебно-методическое пособие

Реализация курса «Практикум по геометрии, 10 класс»

Формат бумаги 60x84/8. Усл. печ. л. 22.52. Тираж 100 экз.
Отпечатано: 350080, г. Краснодар, ул. Сормовская, 167,
ГБОУ ИРО Краснодарского края
Информационно-издательский ресурсный центр