**ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ» КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ**

**КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ, ИНФОРМАТИКИ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

# ПРАКТИКУМ ПО ГЕОМЕТРИИ 11 КЛАСС

**Учебное пособие**

Краснодар, 2024

УДК 372.851
ББК 74.262.21
П 69

*Рекомендовано к изданию решением редакционно-издательского совета ГБОУ ИРО Краснодарского края протоколом № 3 от 21.08.2024 г.*

***Р е ц е н з е н т ы :***
**Васильева Ирина Викторовна**, доцент кафедры функционального анализа и алгебры КубГУ, к.п.н.
**Задорожная Ольга Владимировна,** доцент кафедры математики, информатики и технологического образования ГБОУ ИРО Краснодарского края

**П 69 Практикум по геометрии, 11класс»: учебное пособие.** / под ред. Д.С. Барышенского. – Краснодар : ГБОУ ИРО Краснодарского края. - 2024. - 150 с.

***А в т о р ы-с о с т а в и т е л и:***
***Белай Елена Николаевна***, заведующий кафедрой математики, информатики и технологического образования ГБОУ ИРО Краснодарского края
***Барышенский Дмитрий Сергеевич***, доцент кафедры математики, информатики и технологического образования ГБОУ ИРО Краснодарского края
***Оплачко Галина Федоровна***, учитель математики МБОУ СОШ № 4, Приморско-Ахтарский район
***Тищенко Ольга Юрьевна***, учитель математики МАОУ гимназии № 25, г. Краснодар
***Боклаг Валентина Николаевна***, учитель математики МОБУ СОШ №1 0 г. Сочи
***Халанджян Алла Андрониковна***, учитель математики МОБУ СОШ № 100 г. Сочи
***Самедова Инна Сабировна***, учитель математики МБОУ гимназия № 1, г. Армавир
***Любченко Лариса Александровна***, учитель математики МАОУ СОШ №18, г. Армавир
***Романова Анна Владимировна***, учитель математики МАОУ лицей № 11 г. Армавир
***Селютина Елена Александровна***, учитель математики МАОУ СОШ № 7 г. Армавир
***Шевцова Карина Анатольевна***, учитель математики МАОУ СОШ № 2 Павловский район
***Пшеничная Любовь Александровна***, учитель математики МАОУ СОШ № 10, Павловский район
***Власова Александра Анатольевна,*** старший преподаватель кафедры математики, информатики и технологического образования ГБОУ ИРО Краснодарского края
***Решетилова Татьяна Васильевна***, учитель математики МОУ СОШ № 80 г. Сочи
***Марич Ольга Ивановна***, учитель математики МАОУ СОШ № 4 Абинский район
***Кармазина Маргарита Викторовна***, учитель математики МБОУ СОШ №1, Красноармейский район
***Насонова Татьяна Владимировна,*** учитель математики МБОУ СОШ №3, г. Геленджик
***Колмакова Ольга Александровна***, учитель математики МОБУ СОШ №16 Лабинский район

Данное пособие входит в учебно-методический комплект для преподавания элективного курса для обучающихся 11-х классов «Практикум по геометрии» и предназначено для обучающихся.

# Оглавление

***Дорогой выпускник!***

Ты держишь в руках учебное пособие к курсу «Практикум по геометрии», которое поможет тебе научиться решать различные задачи, хорошо подготовиться к итоговой аттестации по математике. В этом пособии собран краткий теоретический материал, задачи на проверку теоретических знаний и практических умений по геометрии базового и повышенного уровня сложности.

Номера заданий на проверку теоретических знаний обозначены (Т1), номера заданий повышенного уровня сложности подчеркнуты (12). В конце пособия расположен список использованных источников (литература и интернет-ресурсы).

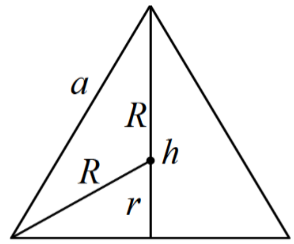
Мы надеемся, что занятия курса «Практикум по геометрии» будут для тебя интересными и полезными. Желаем успехов в изучении геометрии!

# Занятие 1. Треугольники

В **равностороннем треугольнике** имеют место следующие соотношения:

$$h=\frac{a\sqrt{3}}{2},\qquad S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},\qquad R=\frac{a}{\sqrt{3}},\qquad r=\frac{a}{2\sqrt{3}},$$

$$r=\frac{1}{3}h,\qquad R=\frac{2}{3}h,\qquad R=2r,\qquad r+R=h.$$

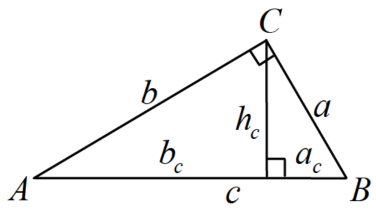



В **прямоугольном треугольнике** имеют место следующие соотношения:

$$a^2+b^2=c^2,$$

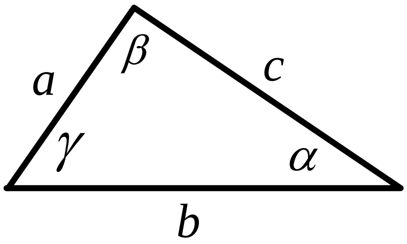
$$a_c=\frac{a^2}{c},\qquad b_c=\frac{b^2}{c},\qquad h_c=\frac{ab}{c},\qquad h_c=\sqrt{a_cb_c},$$

$$\sin A=\frac{a}{c},\qquad \cos A=\frac{b}{c},\qquad \operatorname{tg} A=\frac{a}{b},\qquad \operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}.$$




Теорема косинусов: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$



**Проверяем себя:**

**Т1.** Заполните пропуски:

а) Гипотенуза — это сторона прямоугольного треугольника, лежащая против _______.

б) Если два угла треугольника равны, то треугольник ______

**Т2.** Укажите верные утверждения:

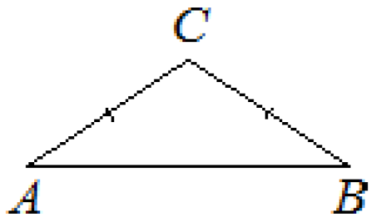
а) биссектрисы треугольника пересекаются в точке, которая является центром окружности, вписанной в этот треугольник;
б) всякий равнобедренный треугольник является остроугольным;
в) любые два равносторонних треугольника подобны.

**Т3.** Укажите неверные утверждения:

а) один из углов треугольника всегда не превышает 60 градусов;
б) все прямоугольные треугольники подобны;
в) центры вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника совпадают.

**Решаем задачи:**

**№1**

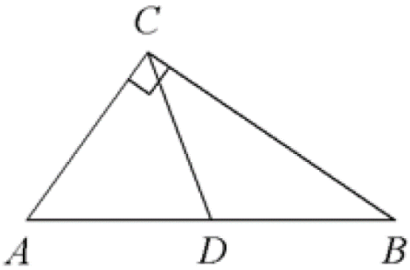



а) В треугольнике ABC угол A равен 37°, стороны AC и BC равны. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

б) В треугольнике ABC угол B равен 41°, стороны AC и BC равны. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

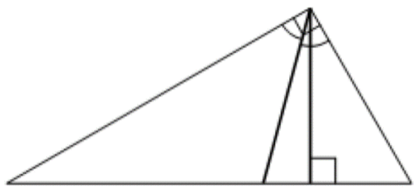
в) В треугольнике ABC угол C равен 114°, стороны AC и BC равны. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

**№2**




а) В треугольнике ABC CD – медиана, угол C равен 90°, угол B равен 35°. Найдите угол ACD. Ответ дайте в градусах.
б) В треугольнике ABC CD – медиана, угол C равен 90°, угол B равен 17°. Найдите угол ACD. Ответ дайте в градусах.
в) В треугольнике ABC CD – медиана, угол C равен 90°, угол B равен 31°. Найдите угол ACD. Ответ дайте в градусах.

**№3**



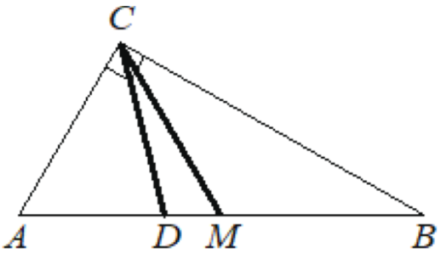
а) В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 14°. Найдите меньший угол прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.

б) В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 34°. Найдите меньший угол прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.

в) В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 9°. Найдите меньший угол прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.

**№4**

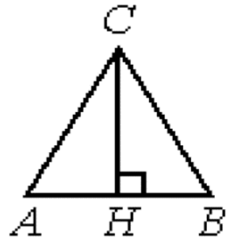
а) Угол между биссектрисой CD и медианой CM прямоугольного треугольника, проведёнными из вершины прямого угла, равен 12°. Найдите меньший угол прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах




б) Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен 21. Найдите величину угла между биссектрисой CD и медианой CM проведёнными из вершины прямого угла C. Ответ дайте в градусах.

в) Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен 16. Найдите величину угла между биссектрисой CD и медианой CM проведёнными из вершины прямого угла C. Ответ дайте в градусах.

**№5**




а) В равностороннем треугольнике ABC высота CH равна $45\sqrt{3}$. Найдите AB.

б) В равностороннем треугольнике ABC высота CH равна $47\sqrt{3}$. Найдите AB.

в) В равностороннем треугольнике ABC высота CH равна $27\sqrt{3}$ . Найдите AB.

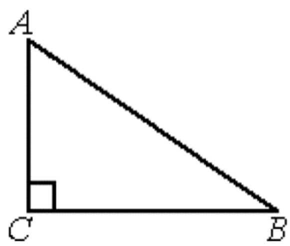
**№6**


а) В треугольнике ABC AC=BC=16, AB=8. Найдите cosA.

б) В треугольнике ABC AC=BC=20, AB=12. Найдите cosA.

в) В треугольнике ABC AC=BC=20, AB=28. Найдите cosA.

**№7**




а) В треугольнике ABC угол C равен 90°, BC=12,

cos B=$\frac{3}{5}$. Найдите AB.

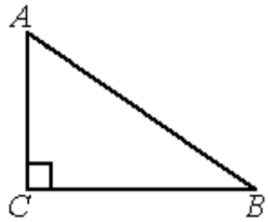
б) В треугольнике ABC угол C равен 90°, AB=15, BC=9. Найдите cosA.

в) В треугольнике ABC угол C равен 90°, BC=12, cosB=$\frac{4}{5}$. Найдите AB.

**№8**

а) В треугольнике ABC угол C равен 90°, BC=6, AB=10.

Найдите sinB.




б) В треугольнике ABC угол C равен 90°, BC=$8\sqrt{6}$ , AB=20.

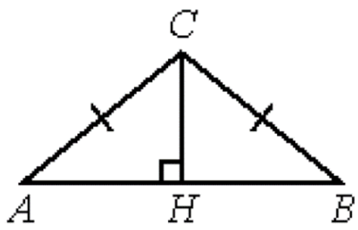
Найдите sinB.

в) В треугольнике ABC угол C равен 90°, BC=$3\sqrt{21}$, AB=15. Найдите sinB.

**№9**

а) В треугольнике ABC AC=BC, высота CH равна

7,2, cosA= $\frac{4}{5}$. Найдите AC.




б) В треугольнике ABC AC=BC, высота CH равна

9,6, cosA= $\frac{7}{25}$. Найдите AC.

в) В треугольнике ABC AC=BC, высота CH равна 19,2, cosA=0,28. Найдите AC.

**№10**

а) В треугольнике ABC AC=BC, AB=5, высота AH равна 4. Найдите синус угла BAC.

б) В треугольнике ABC AC=BC, AB=8, AH – высота, BH=2. Найдите косинус угла BAC.

в) В треугольнике ABC AB=BC, AC=24, высота CH равна 18. Найдите синус угла ACB.


**<u>Задача с развёрнутым решением</u>**

В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $AM$. Прямая, проходящая через вершину $B$ перпендикулярно $AM$, пересекает сторону $AC$ в точке $N$. $AB = 6$; $BC = 5$; $AC = 9$.

а) докажите, что биссектриса угла $C$ делит отрезок $MN$ пополам

б) пусть $P$ — точка пересечения биссектрис треугольника $ABC$. Найдите отношение $AP$:$PN$.

## Занятие 2. Четырёхугольники

*Параллелограммом* называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

- Противоположные углы параллелограмма попарно равны.
- Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

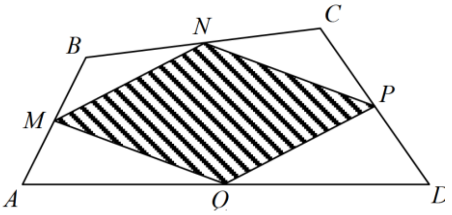
*Прямоугольником* называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

- Диагонали прямоугольника равны.

*Ромбом* называется параллелограмм, все стороны которого равны.

- Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.
- Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Параллелограмм *Вариньона*. Середины сторон произвольного (в том числе невыпуклого или даже пространственного) четырехугольника являются вершинами параллелограмма - *параллелограмма Вариньона*.




- Стороны этого параллелограмма
- параллельны соответствующим диагоналям
- четырехугольника.
- Периметр параллелограмма Вариньона равен сумме длин диагоналей исходного четырехугольника, а площадь параллелограмма Вариньона равна половине площади исходного четырехугольника.
- Если исходный параллелограмм - прямоугольник, то параллелограмм Вариньона - ромб.
- Если исходный параллелограмм - ромб, то параллелограмм Вариньона - прямоугольник. Если исходный параллелограмм - квадрат, то параллелограмм Вариньона - квадрат.

**Трапеция**. *Трапецией* называется четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции называется *средней линией* трапеции. Трапеция обладает следующими свойствами.

- Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.
- Отрезок, соединяющие середины диагоналей трапеции, равен полуразности большего и меньшего оснований.
- У равнобедренной трапеции диагонали равны.
- У равнобедренной трапеции углы при основании равны.
- В равнобедренной трапеции расстояние от вершины одного основания до проекции противоположной вершины на прямую, содержащую это основание, равно средней линии.

**<u>Проверяем себя:</u>**

**Т1**. Заполните пропуски:

*а)* Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны ___________, а две другие ________________.
*б)* Параллелограмм, у которого все стороны равны называется ______.
*в)* Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна _____________.

**Т2.** Укажите верные утверждения:

а) Существует квадрат, который не является прямоугольником;
б) Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны;
в) Диагональ параллелограмма делит его углы пополам.

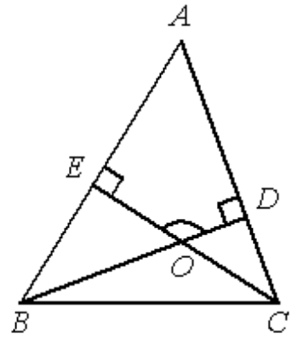
**Т3.** Укажите неверные утверждения:

а) Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 180°;
б) Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм - прямоугольник;
в) В любом прямоугольнике диагонали взаимно перпендикулярны.

**Решаем задачи:**

**№1**

а) В треугольнике ABC угол A равен 44°, углы B и C – острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O. Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах.




б) В треугольнике ABC угол A равен 70°, углы B и C

– острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O.

Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах.

в) В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 59°, BD и CE –

высоты, пересекающиеся в точке O. Найдите угол DOE.

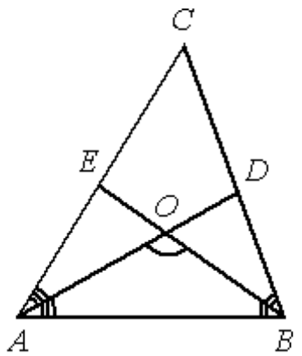
Ответ дайте в градусах.

**№2**

а) В треугольнике ABC угол C равен 58°, биссектрисы

AD и BE пересекаются в точке O. Найдите угол AOB.

Ответ дайте в градусах.




б) В треугольнике ABC угол C равен 66°, биссектрисы

AD и BE пересекаются в точке O. Найдите угол AOB.

Ответ дайте в градусах.

в) В треугольнике ABC угол C равен 74°, биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

**№3**

а) Один угол параллелограмма больше другого на 36°. Найдите меньший угол. Ответ дайте в градусах.

б) Один угол параллелограмма больше другого на 28°. Найдите меньший угол. Ответ дайте в градусах.

в) Один угол параллелограмма больше другого на 52°. Найдите больший угол. Ответ дайте в градусах.

**№4**

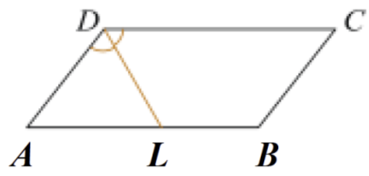
а) Периметр параллелограмма равен 46. Одна сторона параллелограмма на 3 больше другой. Найдите меньшую сторону параллелограмма.

*б)* Периметр параллелограмма равен 94. Одна сторона параллелограмма на 41 больше другой. Найдите меньшую сторону параллелограмма.

*в)* Периметр параллелограмма равен 70. Меньшая сторона равна 16. Найдите большую сторону параллелограмма.

**№5**

а) Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 4 : 3, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88.

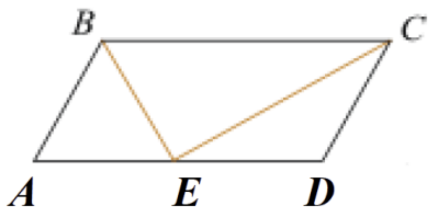



б) Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 2 : 7, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 33.

в) Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 3:4, считая от вершины острого угла. Найдите меньшую сторону параллелограмма, если его периметр равен 55.

**№6**

а) Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 5. Найдите его большую сторону.




б) Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 10. Найдите его большую сторону.

в) Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 9. Найдите его большую сторону.

**№7**

а) Найдите больший угол параллелограмма, если два его угла относятся как 3:7. Ответ дайте в градусах.

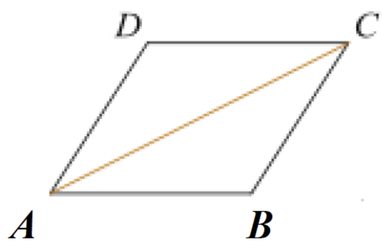
б) Найдите больший угол параллелограмма, если два его угла относятся как 17:19. Ответ дайте в градусах.

в) Найдите больший угол параллелограмма, если два его угла относятся как 1: 71. Ответ дайте в градусах.

**№8**

а) Найдите большую диагональ ромба, сторона которого равна $\sqrt{3}$, а острый угол равен 60°.

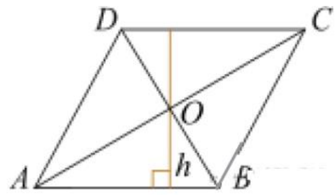
*б)* Найдите большую диагональ ромба, сторона которого равна $11\sqrt{3}$ а острый угол равен 60°.




в) Найдите большую диагональ ромба, сторона которого равна $2{,}5\sqrt{3}$, а острый угол равен 60°.

**№9**

а) Диагонали ромба относятся как 3:4. Периметр ромба равен 200. Найдите высоту ромба.

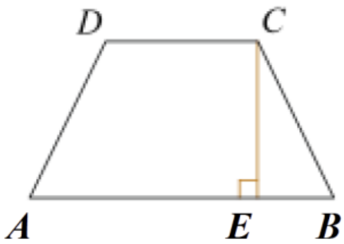



б) Диагонали ромба относятся как $1:9$. Периметр ромба равен 164. Найдите высоту ромба.

в) Диагонали ромба относятся как 4 : 7. Периметр ромба равен 65. Найдите высоту ромба.

**№10**

а) Основания равнобедренной трапеции равны 51 и 65. Боковые стороны равны 25. Найдите синус острого угла трапеции.

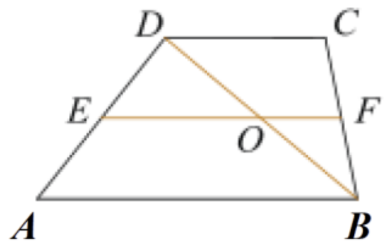



б) Основания равнобедренной трапеции равны 6 и 12. Боковые стороны равны 5. Найдите синус острого угла трапеции.

в) Основания равнобедренной трапеции равны 11 и 41. Боковые стороны равны 25. Найдите синус острого угла трапеции.

**№11**

а) Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.



б) Основания трапеции равны 6 и 8. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.

в) Основания трапеции равны 5 и 9. Найдите меньший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.

**Задача с развёрнутым решением:**

На сторонах $AD$ и $BC$ параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки $M$ и $N$, причём $M$ — середина $AD$, а $BN : NC = 1 : 3$.

а) Докажите, что прямые $AN$ и $AC$ делят отрезок $BM$ на три равные части.

б) Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого находятся в точках $C$, $N$ и точках пересечения прямой $BM$ с прямыми $AN$ и $AC$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 48.

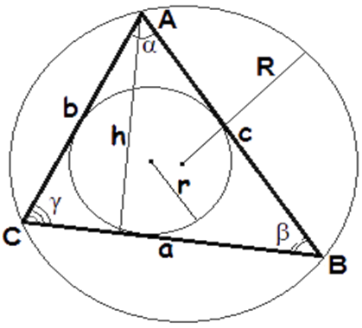
# Занятие 3. Площади многоугольников

Площадь геометрической фигуры - численная характеристика геометрической фигуры, показывающая размер этой фигуры.

Площадь треугольника.

Введем следующие обозначения:

S – площадь треугольника,
a, b, c – длины сторон треугольника,
h – высота треугольника,
γ – угол между сторонами a и b,
r – радиус вписанной окружности,
R – радиус описанной окружности,

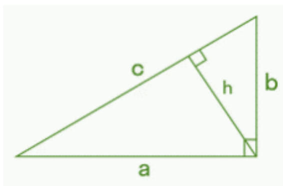


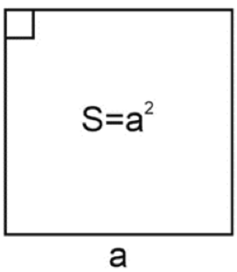

$p = \frac{a+b+c}{2}$ - полупериметр треугольника.

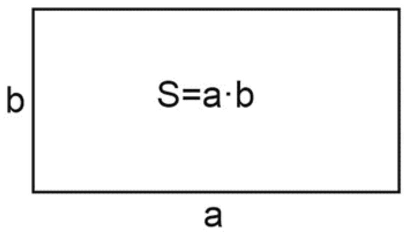
$s = \frac{1}{2} \cdot ah$ $S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$

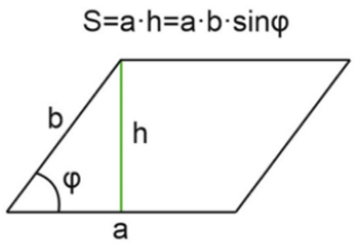
$s = \frac{abc}{4R}$ $S = p \cdot r$

$S = \frac{1}{2} \cdot ab$ $S = \frac{1}{2} \cdot ch$



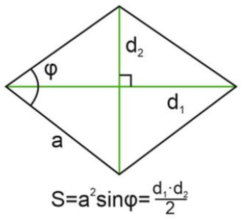



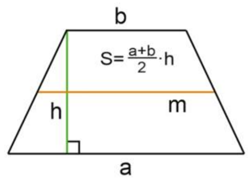



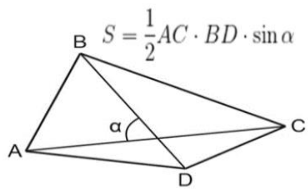



**Проверяем себя:**

**Т1.** Закончите предложение: Площадь треугольника равна…
1) произведению его сторон;
2) половине произведения его смежных сторон на синус угла между ними;
3) произведению его стороны и высоты.




**Т2.** Выберите верные утверждения:

Площадь прямоугольного треугольника равна:
1) половине произведения его катетов;
2) произведению его высот;
3) половине произведения его гипотенузы на высоту, проведенную к ней.

**Т3**. Выберите неверное утверждение:
Площадь квадрата равна:
1) произведению его сторон;
2) квадрату его стороны;
3) произведению его сторон на высоту.

**Т4**. Закончите предложение:
Площадь параллелограмма равна:
1) произведению его смежных сторон;
2) произведению его высоты на сторону;
3) произведению его основания на высоту, проведенную к данному основанию.

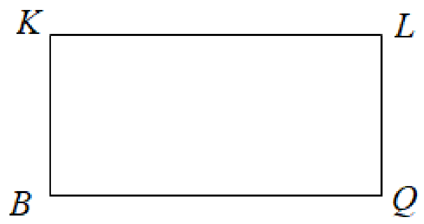
**Т5.** Выберите верные утверждения:
По формуле $S= ab$ можно вычислить площадь:
1) прямоугольника;
2) треугольника;
3) параллелограмма.

**Т6**. Закончите предложение:
Площадь трапеции равна:
1) произведению ее смежных сторон;
2) произведению ее высоты на сумму оснований;
3) произведению полусуммы ее оснований на высоту.

**Решаем задачи:**

**№1**

а) Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 44




и одна сторона на 2 больше другой.

б) Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 60, а отношение соседних сторон равно 4:11.

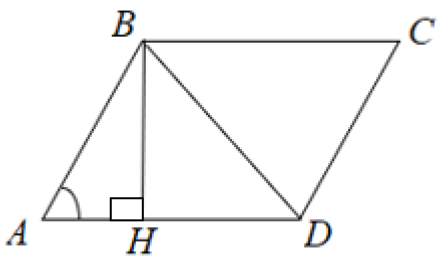
в) Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 92, а отношение соседних сторон равно 3:20.

**№2**

а) Две стороны параллелограмма равны 10 и 12, а один из углов этого параллелограмма равен 30∘. Найдите площадь этого параллелограмма.

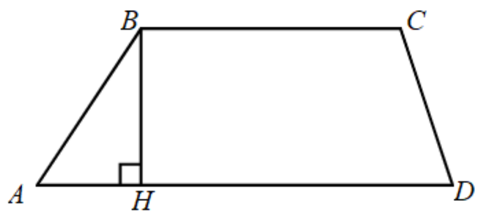
б) Одна из сторон параллелограмма равна 12, другая равна 5, а тангенс одного из углов равен $\frac{\sqrt{2}}{4}$ . Найдите площадь параллелограмма.

в) Высота BH параллелограмма ABCD делит его сторону AD на отрезки AH = 1 и HD = 28. Диагональ параллелограмма BD равна 53. Найдите площадь параллелограмма.




**№3**

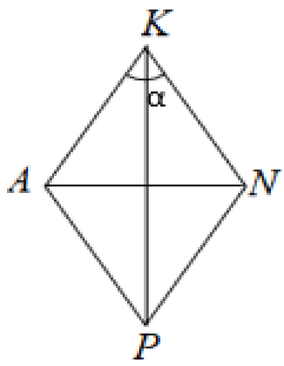
а) Основания трапеции равны 18 и 12, одна из боковых сторон равна 6, а косинус угла между ней и одним из оснований равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите площадь трапеции.




б) Основание трапеции равно 3, высота равна 13, а площадь равна 65. Найти второе основание трапеции.

в) Основания трапеции равны 7 и 49, одна из боковых сторон равна 18, а косинус угла между ней и одним из оснований равен $\frac{2\sqrt{10}}{7}$. Найдите площадь трапеции.

**№4**



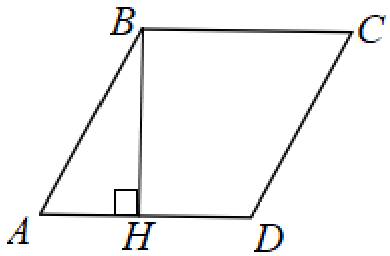

а) Периметр ромба равен 56, а один из углов равен 30°.

Найдите площадь ромба.

б) Сторона ромба равна 5, а диагональ 6. Найдите площадь ромба.

в) Найти диагонали ромба, если одна из них в 1,5 раза больше другой, а площадь ромба равна 27.

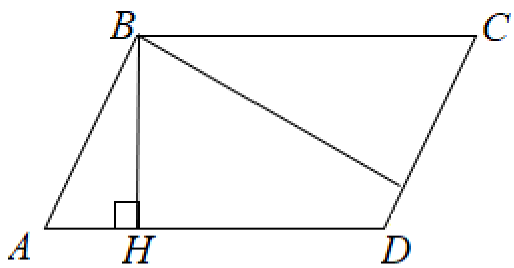
**№5**




а) Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 21 и 6.

б) Высота BH ромба ABCD делит его сторону AD на отрезки AH = 12 и HD = 1. Найдите площадь ромба.

**№6**




а) Площадь параллелограмма равна 54, а две его стороны равны 9 и 18. Найдите его меньшую высоту.

б) Площадь параллелограмма равна 40, а

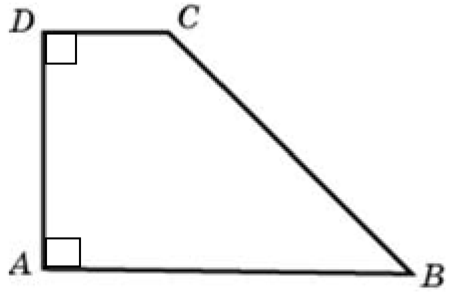
две его стороны равны 5 и 10. Найдите

большую высоту параллелограмма.

в) Площадь параллелограмма равна 16, а

две его стороны равны 4 и 8. Найдите большую высоту параллелограмма.

**№7**




а) Найдите площадь прямоугольной трапеции, если основания равны 8 и 10, а боковая сторона, перпендикулярная

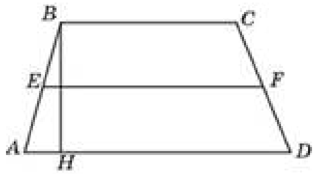
нижнему основанию, равна 5.

б) Найдите площадь прямоугольной трапеции, если основания равны 2 и 14, а большая боковая сторона составляет с основанием угол, равный $45^{0}$.

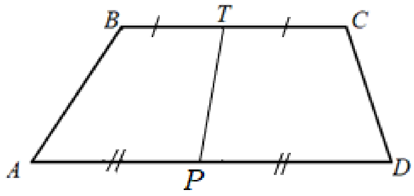
в) В трапеции основания равны 6 см и 10 см, а высота равна полусумме длин оснований. Найдите площадь трапеции.

**№8**

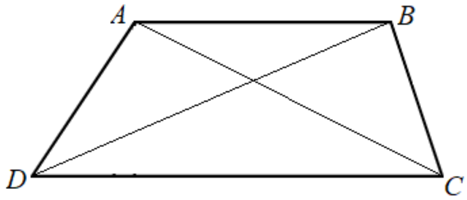
а) Средняя линия и высота трапеции равны соответственно 15 и 2. Найдите площадь трапеции.




б) В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.




в) В трапеции ABCD с основаниями AB и CD известно, что AC = a, BD = $\frac{7a}{5}$, ∠CAB = 2∠DBA Найдите площадь трапеции.



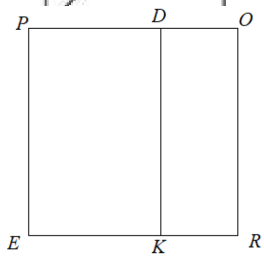

**№9**

а) Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 20.


б) Периметр квадрата равен 36. Найдите его площадь.

в) В прямоугольнике одна сторона меньше другой в 3 раза, его площадь равна 48. Найдите площадь квадрата, построенного на большей стороне

прямоугольника.

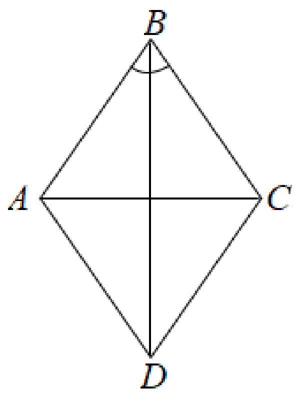



**№10**

а) В ромбе сторона равна 10, одна из диагоналей - $5(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, а угол,

лежащий напротив этой диагонали, равен 30°.

Найдите площадь ромба.




б) Периметр ромба равен 116, а один из углов

равен 30°. Найдите площадь ромба.

в) Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 14 и 6.

**Задача с развёрнутым решением**

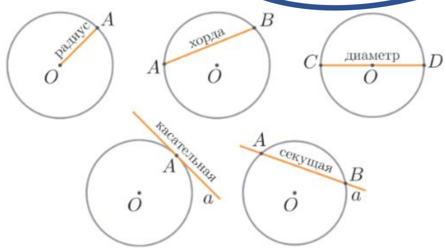
В равнобедренном треугольнике $ABC$ с углом $120°$ при вершине $A$ проведена биссектриса $BD$. В треугольник $ABC$ вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона $FH$ лежит на отрезке $BC$, а вершина $E$ - на отрезке $AB$.

а) Докажите, что $FH = 2DH$.

б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 4$.

# Занятие 4. Окружность

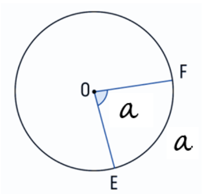
*Окружность* – это замкнутая кривая, все точки которой равноудалены от центра.



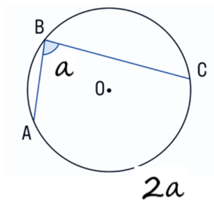

*Длина окружности*: $C = 2\pi R$.

*Площадь круга*: $S = \pi R^2$

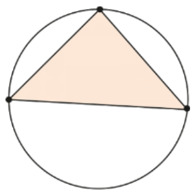
Центральный угол



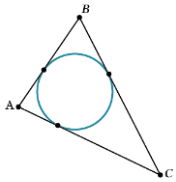

Вписанный угол




Вписанная и описанная окружности.

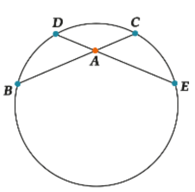


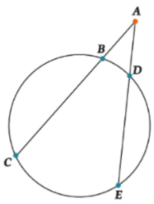
- Формула радиуса описанной окружности около правильного многоугольника: $R = \frac{a}{2sin\frac{\pi}{n}}$ .
- Формула радиуса описанной окружности около треугольника по трём сторонам и углам между ними: $R = \frac{abc}{4S}$ или $2R = \frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$.
- Формула радиуса вписанной окружности в многоугольник по его площади: $r = \frac{S}{p}$.
- Формула радиуса вписанной окружности в правильный многоугольник: $r = \frac{a}{2tg\frac{\pi}{n}}$

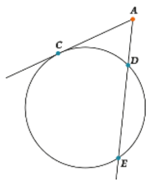



## Различные свойства окружности и её составляющих:

- Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной.
- Угол между касательной и хордой равен половине градусной меры дуги, которая находится внутри угла.
- Отрезки касательных, проведённых из одной точки к одной окружности, равны.
- Прямая, которая касается двух окружностей, называется их общей касательной.
- Для любых двух хорд окружности, проходящих через некоторую точку A, выполняется: AB·AC=AD·AE
- Для любых двух секущих, проходящих через некоторую точку A, выполняется: AB·AC=AD·AE
- Для любых секущей и касательной, проходящих через точку A, верно: $AC^2 = AD \cdot AE$



**<u>Проверяем себя:</u>**

**Т1**. Заполните пропуски:

а) Из двух хорд больше та, которая ______ отдалена от центра.

б) Если основанием дуги является половина окружности или диаметр, то вписанный угол будет ______.

**Т2**. Укажите верные утверждения:

а) касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания;

б) угол, вписанный в окружность, равен соответствующему центральному углу, опирающемуся на ту же дугу;

в) расстояние от точки, лежащей на окружности, до центра окружности равно радиусу.

**Т3**. Укажите неверные утверждения:

а) через любую точку, лежащую вне окружности, можно провести 2 касательные к этой окружности;

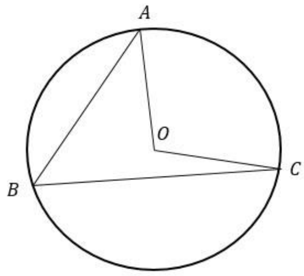
б) общая точка двух окружностей равноудалена от центров этих окружностей;

в) центр описанной около треугольника окружности всегда лежит внутри этого треугольника.

**Решаем задачи**

**№1**

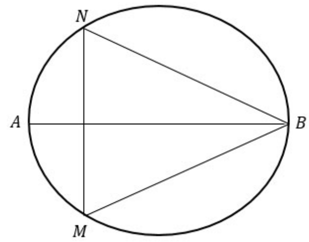
а) Точка O – центр окружности, на которой лежат точки A, B и C. Известно, что ∠ABC = 54° и ∠OAB = 41°. Найдите угол BCO. Ответ дайте в градусах.




б) Точка O – центр окружности, на которой лежат точки A, B и C. Известно, что ∠ABC = 45° и ∠OAB = 36°. Найдите угол BCO. Ответ дайте в градусах.
в) Точка O – центр окружности, на которой лежат точки A, B и C. Известно, что ∠ABC = 69° и ∠OAB = 24°. Найдите угол BCO. Ответ дайте в градусах.

**№2**

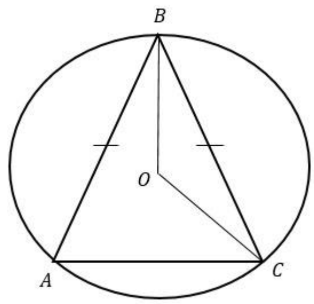
а) На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N. Известно, что ∠NBA = 32°. Найдите угол NMB. Ответ дайте в градусах.




б) На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N. Известно, что ∠NBA = 45°. Найдите угол NMB. Ответ дайте в градусах.
в) На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N. Известно, что ∠NBA = 27°. Найдите угол NMB. Ответ дайте в градусах.

**№3**

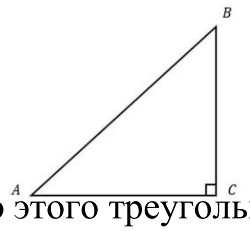
а) Окружность с центром в точке O описана около Равнобедренного треугольника ABC, в котором AB=BC и ∠ABC = 25°. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.




б) Окружность с центром в точке O описана около Равнобедренного треугольника ABC, в котором AB=BC и ∠ABC = 34°. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.
в) Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC, в котором AB=BC и ∠ABC = 48°. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.

**№4**

а) В треугольнике ABC известно, что AC=12, BC=5, угол C равен 90°. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

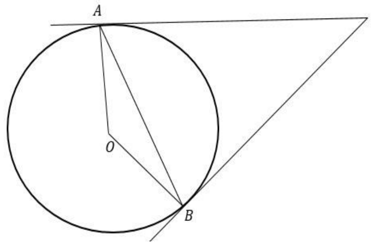



б) В треугольнике ABC известно, что AC=16, BC=12, угол C равен 90°. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

в) В треугольнике ABC известно, что AC=24, BC=7, угол C равен 90°. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

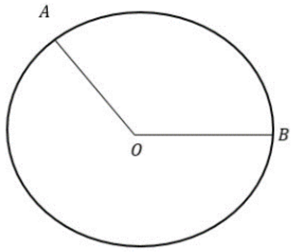
**№5**

а) Касательные в точках A и B к окружности с центром O пересекаются под углом 68°. Найдите угол ABO.
б) Касательные в точках A и B к окружности с центром O пересекаются под углом 52°. Найдите угол ABO.
в) Касательные в точках A и B к окружности с центром O пересекаются под углом 46°. Найдите угол ABO.



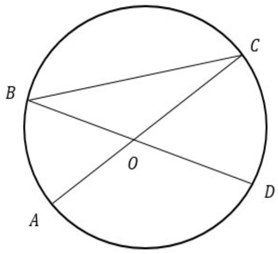

**№6**

а) На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что ∠AOB = 140°. Длина меньшей дуги AB равна 98. Найдите длину большей дуги AB.
б) На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что ∠AOB = 110°. Длина меньшей дуги AB равна 22. Найдите длину большей дуги AB.
в) На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что ∠AOB = 136°. Длина меньшей дуги AB равна 17. Найдите длину большей дуги AB.



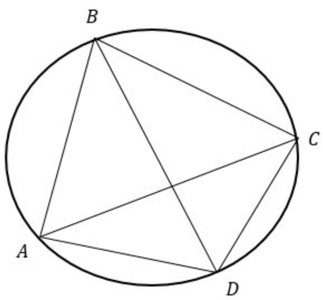

**№7**

а) В окружности с центром O отрезки AC и BD - диаметры. Угол AOD равен 108°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.
б) В окружности с центром O отрезки AC и BD - диаметры. Угол AOD равен 146°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.
в) В окружности с центром O отрезки AC и BD - диаметры. Угол AOD равен 164°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



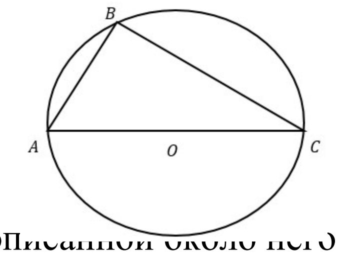

**№8**

а) Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABD равен 16°, угол CAD равен 32°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.
б) Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABD равен 15°, угол CAD равен 25°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.
в) Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABI CAD равен 47°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



**№9**

а) Сторона AC треугольника ABC проходит через центр описанной около него окружности. Найдите угол C, если $\angle A = 74°$. Ответ дайте в градусах.

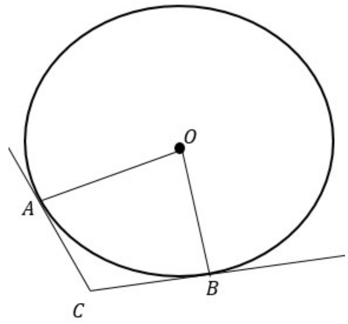



б) Сторона AC треугольника ABC проходит через центр описанной около него окружности. Найдите угол C, если $\angle A = 67°$. Ответ дайте в градусах.

в) Сторона AC треугольника ABC проходит через центр описанной около него окружности. Найдите угол C, если $\angle A = 53°$. Ответ дайте в градусах.

**№10**

а) В угол C величиной 157° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках A и B, где O - центр окружности. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



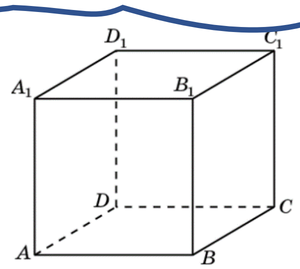

б) В угол C величиной 168° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках A и B, где O - центр окружности. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

в) В угол C величиной 139° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках A и B, где O - центр окружности. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

**<u>Задача с развёрнутым решением</u>**

К двум окружностям с центрами в точках O1, O2, касающимся внешним образом в точке A, проведена общая касательная BC (B и C - точки касания). Докажите, что угол BAC - прямой.

# Занятие 5. Куб




Кубом называется многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов.

Формула диагонали куба AC$_1$: $d = a\sqrt{3}$

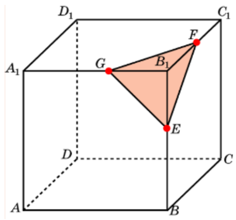
Формула диагонали грани куба: $AC = a\sqrt{2}$

Основные формулы:

$S_{\text{основания}} = a^2$ $\qquad$ $S_{\text{бок.поверхности}} = 4a^2$ $\qquad$ $S_{\text{полной поверхности}} = 6a^2$

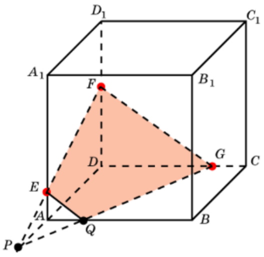
$$V_{\text{куба}} = a^3$$

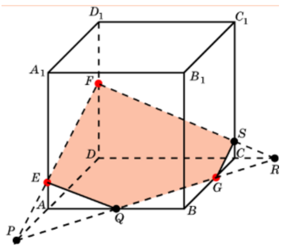
*Виды сечений:*

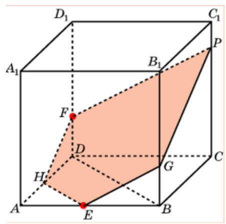


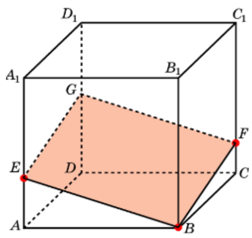
Сечение проходит через три точки куба, лежащих на ребрах куба, выходящих их одной вершины

Сечение проходит через три точки куба, лежащих на ребрах.

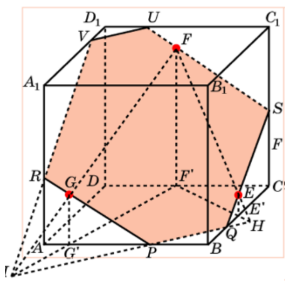








Сечение проходит через вершину и две точки, лежащие на ребрах куба.



Сечение проходит через точки E, F, G, принадлежащие граням $BB_1C_1C$, $CC_1D_1D$, $AA_1B_1B$

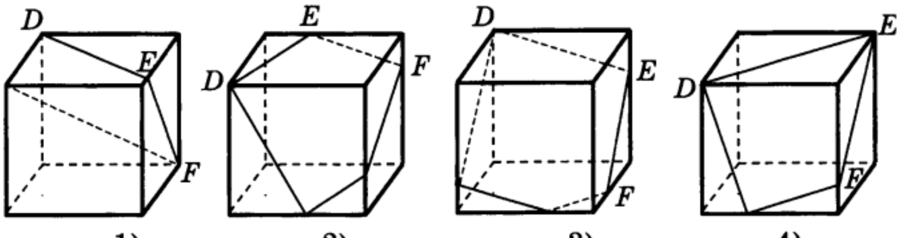
**Проверяем себя**

**Т1**. Заполните пропуски:

а) Куб — это______________, поверхность которого состоит из____квадратов.

б) У куба _____ вершин, _________рёбер, _______ граней.

**Т2**. На каком рисунке изображено сечение куба плоскостью DEF.

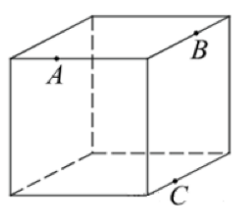



**Т3**. Вычислите:

а) Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в три раза?

б) Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если его ребро увеличить в три раза?

в) Плоскость, проходящая через три точки $A$, $B$ и $C$, разбивает куб на два многогранника. Сколько граней у многогранника, у которого больше граней?



**Решаем задачи**

**№1.** а) Диагональ куба равна $\sqrt{27}$. Найдите его объем.

б) Диагональ куба равна $\sqrt{12}$. Найдите его объем.

в) Диагональ куба равна $\sqrt{3}$. Найдите его объем.

**№2**

а) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми $BC_1$ и $A_1B_1$. Ответ дайте в градусах.

б) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми $CD_1$ и $AD$. Ответ дайте в градусах.

в) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми $AC$ и $BB_1$. Ответ дайте в градусах.

**№3**

а) Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его площадь поверхности увеличится на 54. Найдите ребро куба.
б) Если каждое ребро куба увеличить на 5, то его площадь поверхности увеличится на 270. Найдите ребро куба.
в) Если каждое ребро куба увеличить на 3, то его площадь поверхности увеличится на 162. Найдите ребро куба.

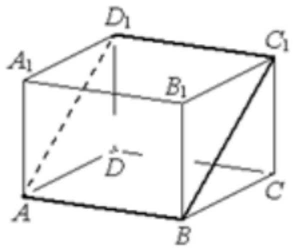
**№4**

а) Объем первого куба в 8 раз больше объема второго куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?

б) Объем первого куба в 729 раз больше объема второго куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?

в) Объем первого куба в 1728 раз больше объема второго куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?

**№5**




а) В прямоугольном параллелепипеде $ACDA_1B_1C_1D_1$известны длины рёбер: $AB=7$, $AD=3$, $AA_1=4$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки $A$, $B$ и $C_1$.

б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$известны длины рёбер: $AB=11$, $AD=6$, $AA_1=8$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки $A$, $B$ и $C_1$.

в) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$известны длины рёбер: $AB=21$, $AD=20$, $AA_1=23$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки $A$, $A_1$ и $C$.

**Задача с развернутым ответом**

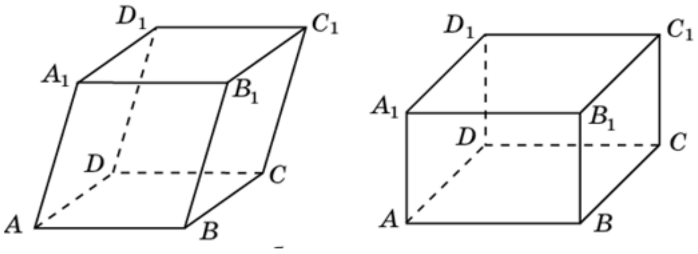
Точка Е-середина ребра $CC_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что сечение куба плоскостью $A_1BE$ — это равнобокая трапеция.

б) Найдите площадь этого сечения, если ребра куба равны 2

## Занятие 6. Параллелепипед.

Параллелепипедом называется многогранник, поверхность которого состоит из шести параллелограммов.




Прямоугольным параллелепипедом называется параллелепипед, грани которого – прямоугольники.

У параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны.

Все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке.

Диагональ параллелепипеда: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$a, b, c -$ измерения параллелепипеда

Диагональ параллелепипеда – отрезок соединяющий, не принадлежащие одной грани две вершины.

Объём параллелепипеда: $V = a \cdot b \cdot c$ или $V = S_{\text{основания}} \cdot h$ , где

$h -$ высота.

**Проверяем себя**

**Т1**. Заполните пропуски и допишите утверждения.

а) Параллелепипед называется прямоугольным, если его боковые ребра ______________ основанию, а основания представляют собой____________.
б) В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней - ___________________.
в) Полуплоскости в которых расположены смежные грани параллелепипеда , образуют двугранные углы, которые называются ____________________.
г) Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда-________________.

**Т2**. а) Сколько вершин, граней и ребер имеет параллелепипед?

б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $DD_1=2$, $C_1D_1=6$, $B_1C_1=3$. Найдите длину диагонали $AC_1$.

**Т3**. Вычислите:

а) Ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2, 3. Найдите его площадь поверхности.
б) Найдите расстояние между вершинами A и $D_1$ прямоугольного параллелепипеда, для которого AB=5, AD=4, $AA_1=3$.
в) Найдите квадрат расстояния между вершинами C и $A_1$ прямоугольного параллелепипеда, для которого AB=5, AD=4, $AA_1=3$.

**Решаем задачи**

**№1**

а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: AB=6, AD=8, $AA_1=21$. Найдите синус угла между прямыми $A_1D_1$ и AC.

б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: AB=6, AD=8, $AA_1=9$. Найдите синус угла между прямыми $A_1C_1$ и CD.

в) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: AB=28, AD=16, $AA_1=12$. Найдите синус угла между прямыми $DD_1$ и $B_1C$.

**№2**

а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: AB=21, AD=20, $AA_1=23$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины A, $A_1$ и C.

б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB=3$, $AD=4$, $AA_1=32$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины $C$, $C_1$ и $A$

*О*) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB=27$, $AD=36$, $AA_1=10$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины $D$, $D_1$ и $B$.

**№3**

а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB=8$, $BC=5$, $AA_1=4$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки $A$, $B$, $C$, $A_1$, $B_1$, $C_1$.

б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB=7$, $BC=6$, $AA_1=5$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки $A$, $B$, $C$, $A_1$, $B_1$, $C_1$.

в) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB=6$, $BC=5$, $AA_1=4$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки $A$, $B$, $C$, $D$, $A_1$, $B_1$.

**№4**

а) Одна из граней прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{8}$ и образует с плоскостью этой грани угол 45°. Найдите объем параллелепипеда.

б) Одна из граней прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Диагональ параллелепипеда равна 2 и образует с плоскостью этой грани угол 30°. Найдите объем параллелепипеда.

в) Одна из граней прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Диагональ параллелепипеда $\sqrt{12}$ и образует с плоскостью этой грани угол 60°. Найдите объем параллелепипеда.

**№5**

а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AB=2$, $AD = \sqrt{5}$, ребро $AA_1=2$. Точка К- середина ребра $BB_1$. Найдите площадь сечения, проходящего через точки $A_1$, $D_1$ и $K$.
б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $BC=4$, ребро $AB = 2\sqrt{5}$, ребро $BB_1=4$. Точка К- середина ребра $CC_1$. Найдите площадь сечения, проходящего через точки $A_1$, $B_1$ и $K$.

в) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AB=2$, $AD = 2\sqrt{2}$, ребро $AA_1=4$. Точка К- середина ребра $BB_1$. Найдите площадь сечения, проходящего через точки $A_1$, $D_1$ и К.

**Задача с развернутым ответом**

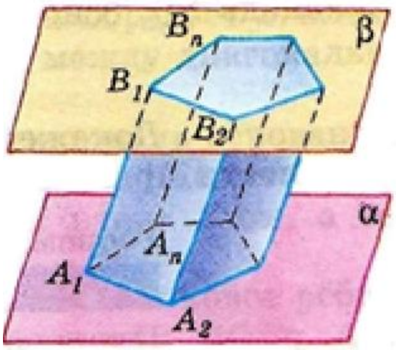
В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB=AA_1=8$ и $BC=5$, M и N – середины ребер CD и $AA_1$ соответственно. Плоскость $\alpha$ проходит через точки M и B и параллельна прямой $CD_1$.

Докажите, что прямая DN параллельна плоскости $\alpha$.

б) Найдите расстояние между прямыми $C_1D$ и $BD_1$.

# Занятие 7. Призма

Призма — это многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, находящимися в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами.

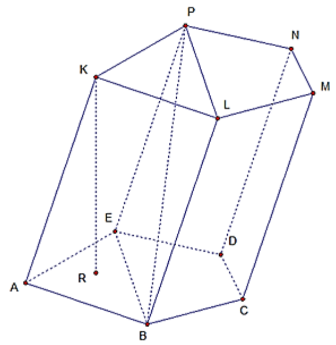



$A_1A_2\ldots A_nB_1B_2B_n$ – _призма_

Многоугольники $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ – _основания призмы

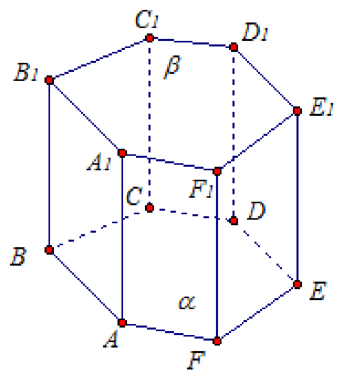
Параллелограммы $A_1A_2B_2B_1$, $A_1A_2B_2B_1,\ldots A_nA_1B_1B_n$ – боковые грани

Отрезки $A_1B_1$, $A_2B_2\ldots A_nB_n$ – _боковые ребра призмы




Диагональ призмы(PB) — это отрезок, который соединяет две вершины, не принадлежащие одной грани.

Высота призмы (KR)- перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания.




Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется прямой, в противном случае – наклонной. Высота прямой призмы равна ее боковому ребру

Прямая призма называется правильной, если ее основания – правильные многоугольники.

$S_{бок} = P_{осн} \cdot h$

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$

$$\mathbf{V = S_{осн} \cdot h}$$

**Проверяем себя**

**Т1**. Заполните пропуски:

а) Призма — это __________________, две грани которого являются равными ____________________, находящимися в ____________________ плоскостях, а остальные грани — ______________________.

б) Диагональ призмы -это _________, который соединяет __________________, не принадлежащие одной грани.

в) Если боковые ребра призмы _____________________ к основаниям, то призма называется прямой.

**Т2**. Укажите верное утверждение:

Прямая призма называется правильной, если ее основания – …..
а) прямоугольные треугольники;
б) равнобедренные треугольники;
в) правильные многоугольники;
г) параллелограммы.

**Т3**. Вычислить:
В правильной треугольной призме сторона основания равна 6 см, боковое ребро 5 см.
а) Высота равна ____ см.
б) Площадь боковой грани равна ____ см.
в) Площадь боковой поверхности равна _____ см.

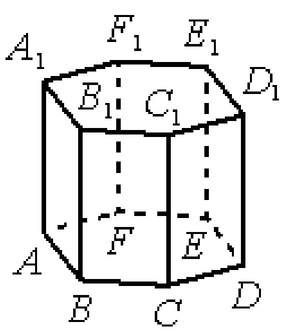
**Решаем задачи**

**№1**

а) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол DAB. Ответ дайте в градусах.

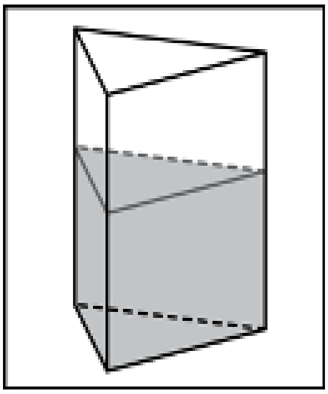
б) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 6. Найдите угол D1C1F1.Ответ дайте в градусах.

в) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол AC1C. Ответ дайте в градусах.



## №2

а) В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 2300 см$^3$ воды и полностью в нее погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 25 см до отметки 27 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см$^3$.



б) В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1500 см$^3$ воды и полностью в нее погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 25 см до отметки 28 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см$^3$.

в) В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1200 см$^3$ воды и полностью в нее погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 24 см до отметки 26 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см$^3$.

## №3

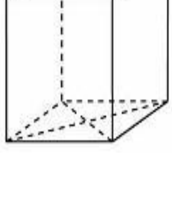
а) Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Площадь ее поверхности равна 132. Найдите высоту призмы.

б) Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Площадь ее поверхности равна 288. Найдите высоту призмы.

в) Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 9 и 12. Площадь ее поверхности равна 504. Найдите высоту призмы.

## №4

а) Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8, и боковым ребром, равным 10.

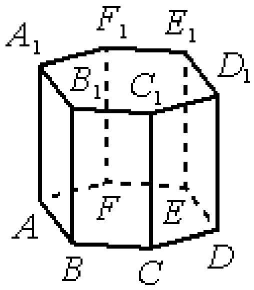


б) Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 3 и 4, и боковым ребром, равным 5.

в) Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 9 и 40, и боковым ребром, равным 55.

**№5**

а) Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны √3.
б) Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 9, а боковые ребра равны √27
в) Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 6, а боковые ребра равны √0,75 .




**Задача с развернутым ответом**

Все рёбра правильной треугольной призмы ABCA1B1C1 имеют длину 6. Точки M и N—середины рёбер AA1 и A1C1 соответственно.

а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB1

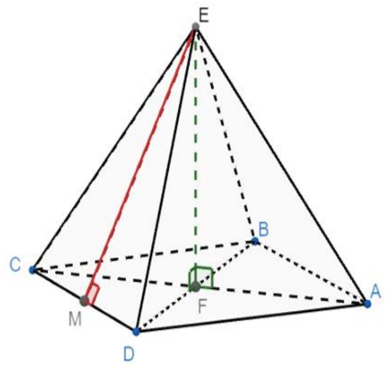
# Занятие 8. Пирамида

Пирамида - многогранник, который состоит из плоского многоугольника-основания пирамиды, точки, не лежащей в плоскости основания-вершины пирамиды, и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.

E - вершина

ABCD – основание

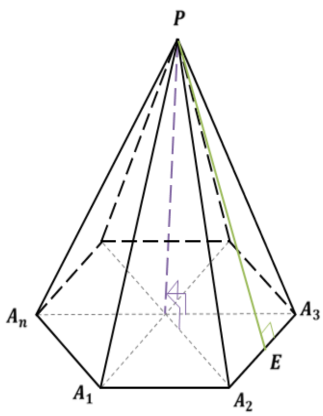
Δ AEB, Δ BEC, Δ CED, Δ DEA – боковые грани




Высота (EF) - перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

Боковые ребра (EA, EB, EC, ED) - отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания.

Пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой.




Все боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

Апофема (PE) – высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему:

$$\boldsymbol{S}_{\text{бок}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \mathrm{P}_{\text{осн}} \cdot \boldsymbol{PE}$$

$$\boldsymbol{S}_{\text{полн}} = \boldsymbol{S}_{\text{бок}} + \boldsymbol{S}_{\text{осн}}$$

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{3} \boldsymbol{S}_{\text{осн}} \cdot \boldsymbol{h}$$

**Проверяем себя**

**Т1**. Заполните пропуски:

а) Пирамида – это ________________, который состоит из ______________ __________________ - основания пирамиды, _______________________ - вершины __________, ______________________________________________с точками основания.

б) Пирамида называется правильной, если ее ______________ – правильный _______________, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее ______________.

в) Апофема – ____________________________ правильной пирамиды, проведенная из ее вершины.

**Т2**. Укажите верное утверждение:

Какая фигура является основанием правильной пирамиды?

а) прямоугольный треугольник;

б) равнобедренный треугольник;

в) правильный многоугольник;

г) прямоугольник.

**Т3**. Вычислить:

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, боковое ребро 5 см.

а) Апофема равна ____ см.

б) Площадь боковой грани равна ____ см.

в) Площадь боковой поверхности равна _____ см.

**Решаем задачи**

**№1**

а) В правильной четырехугольной пирамиде SABCD точка O - центр основания, S -вершина, SO = 4, SC = 5. Найдите длину отрезка AC.

б) В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD с вершиной S точка O - центр основания, SO = 48, SC = 73. Найдите длину отрезка AC.

в) В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* точка *O* — центр основания, *S* вершина, SO = 96, SC = 100. Найдите длину отрезка BD.

**№2**

а) В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* точка *O* − центр основания, *S* − вершина, *SO*=8, *BD*=30. Найдите боковое ребро SC.

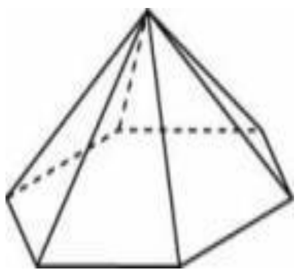
б) В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* точка *O* − центр основания,

*S* − вершина, *SO*=12, *BD*=18. Найдите боковое ребро SA.

в) В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* точка *O* − центр основания,

*S* − вершина, *SO*=15, *BD*=16. Найдите боковое ребро SA.

**№3**



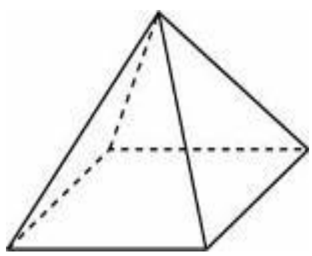
а) Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 72, боковые рёбра равны 85. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

б) Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 22, боковые рёбра равны 61. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

в) Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 56, боковые рёбра равны 100. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

**№4**

а) Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 42, боковые рёбра равны 75. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



б) Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 60, боковые рёбра равны 78. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

в) Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 64, боковые рёбра равны 130. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

**№5**

а) Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2, а высота равна $4\sqrt{3}$.

б) Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 11, а высота равна $2\sqrt{3}$.

в) Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 9, а высота равна $6\sqrt{3}$.

**Задача с развернутым ответом**

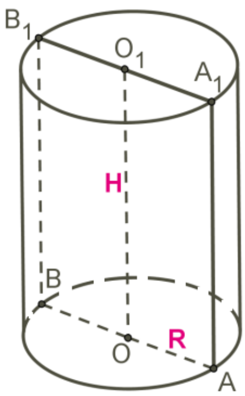
В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 4$ и диагональю $BD = 7$. Все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали $BD$ основания $ABCD$ отмечена точка $E$, а на ребре $AS$ — точка $F$ так, что $SF = BE = 3$.

а) Докажите, что плоскость $CEF$ параллельна ребру $SB$ .

б) Плоскость $CEF$ пересекает ребро $SD$ в точке $Q$. Найдите расстояние от точки $Q$ до плоскости $ABC$.

## Занятие 9. Цилиндр. Виды сечений

**Цилиндр** — это тело вращения, которое получается при вращении прямоугольника вокруг его стороны.



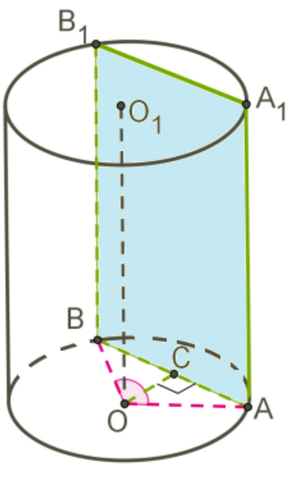

Прямоугольник $AOO_1A_1$ вращается вокруг стороны $OO_1$. $OO_1$ — ось симметрии цилиндра и высота цилиндра. $AA_1$ — образующая цилиндра, длина которой равна длине высоты цилиндра.
$AO$ — радиус цилиндра.

Полученная цилиндрическая поверхность называется боковой поверхностью цилиндра, а круги — основаниями цилиндра.

Осевое сечение цилиндра — это сечение цилиндра плоскостью, которая проходит через ось цилиндра. Это сечение является прямоугольником.

При сечении цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра (т. е. перпендикулярной основанию), также получается прямоугольник.

На рисунке изображён цилиндр, пересечённый плоскостью, которая параллельна оси цилиндра $OO_1$.




$ABB_1A_1$ — прямоугольник.
$OA=OB=R$ — радиусы.

$OC$ — расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения. Дуга $AB$ равна центральному углу $AOB$.

При сечении цилиндра плоскостью, параллельной основанию, в сечении получаем круг, равный основаниям цилиндра.

**Проверяем себя**

**Т1**. Заполните пропуски:

а) Цилиндр – это ________________, которое получается при вращении _________________ вокруг его стороны.

б) Ось симметрии цилиндра, образующая цилиндра равны___________ цилиндра.

**Т2**. Укажите верное утверждение:

Какая фигура образуется в сечении, если цилиндр пересечь плоскостью, которая перпендикулярна основанию?

а) трапеция;

б) равносторонний треугольник;

в) прямоугольник;

г) отрезок.

**Т3**. Вычислить:

Прямоугольник, соседние стороны которого равны 6 см и 8 см, вращается вокруг меньшей стороны.

а) Высота полученного тела вращения равна ____ см.

б) Образующая полученного тела равна ____ см.

в) Радиус полученного тела вращения равен _____ см.

**Решаем задачи.**

**№1**

а) Диагональ осевого сечения цилиндра равна 26 , с основанием цилиндра она образует угол в 30°. Определи высоту H этого цилиндра.
б) Диагональ осевого сечения цилиндра равна 24 , с основанием цилиндра она образует угол в 30°.Определи высоту H этого цилиндра.
в) Диагональ осевого сечения цилиндра равна 28 , с основанием цилиндра она образует угол в 30°. Определи высоту H этого цилиндра.

**№2**

а) Диагональ осевого сечения цилиндра равна 16 , с основанием цилиндра она образует угол в 60°. Определи диаметр основания D этого цилиндра.

б) Диагональ осевого сечения цилиндра равна 8 , с основанием цилиндра она образует угол в 60°. Определи диаметр основания D этого цилиндра.
в) Диагональ осевого сечения цилиндра равна 20 , с основанием цилиндра она образует угол в 60°.Определи диаметр основания D этого цилиндра.

**№3**
а) Дано, что площадь осевого сечения цилиндра равна 98 , площадь основания цилиндра равна 49 . Определи высоту H этого цилиндра, деленную на $\sqrt{\pi}$
б) Дано, что площадь осевого сечения цилиндра равна 50 , площадь основания цилиндра равна 25 . Определи высоту H этого цилиндра, деленную на $\sqrt{\pi}$
в) Дано, что площадь осевого сечения цилиндра равна 8 , площадь основания цилиндра равна 4 . Определи высоту H этого цилиндра, деленную на $\sqrt{\pi}$.

**№4**
а) Определи площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра, находящейся на расстоянии 24 от оси, если высота цилиндра равна 27 , а радиус цилиндра равен 40 .
б) Определи площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра, находящейся на расстоянии 10 от оси, если высота цилиндра равна 24 , а радиус цилиндра равен 26 .

в) Определи площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра, находящейся на расстоянии 12 от оси, если высота цилиндра равна 25 , а радиус цилиндра равен 37 .

**№5**
а) Параллельная оси цилиндра плоскость отсекает от окружности основания дугу в 90°. Площадь сечения цилиндра этой плоскостью равна 120 . Определи расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения, если высота цилиндра равна 20 .
б) Параллельная оси цилиндра плоскость отсекает от окружности основания дугу в 90°.Площадь сечения цилиндра этой плоскостью равна 240 . Определи расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения, если высота цилиндра равна 20 .
в) Параллельная оси цилиндра плоскость отсекает от окружности основания дугу в 90°.Площадь сечения цилиндра этой плоскостью равна 360 .
Определи расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения, если высота цилиндра равна 20 .

**№6**

а) Параллельная оси цилиндра плоскость отсекает от окружности основания дугу в $60°$.Площадь сечения цилиндра этой плоскостью равна $720$ . Определи расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения, если высота цилиндра равна 20. В ответ запишите расстояние, деленное на $\sqrt{3}$.

б) Параллельная оси цилиндра плоскость отсекает от окружности основания дугу в $60°$.Площадь сечения цилиндра этой плоскостью равна 240 .

Определи расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения, если высота цилиндра равна 20. В ответ запишите расстояние, деленное на $\sqrt{3}$

в) Параллельная оси цилиндра плоскость отсекает от окружности основания дугу в $120°$.Площадь сечения цилиндра этой плоскостью равна $960$ . Определи расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения, если высота цилиндра равна 20 . В ответ запишите расстояние, деленное на $\sqrt{3}$.

**Задача с развернутым ответом.**

Высота цилиндра равна 3, а радиус основания равен 13.

а) Постройте сечение цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра, так, чтобы площадь этого сечения равнялась 72.

б) Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания цилиндра.

## Занятие 10. Площадь поверхности цилиндра

Если представить, что боковая цилиндрическая поверхность разрезана по образующей $AA_1$ и развёрнута, получаем прямоугольник.


Сторона $AA_1$ равна высоте H, а другую сторону образует развёрнутая окружность основания длиной $2\pi R$.

Так как развёртка — прямоугольник, то боковая поверхность определяется по формуле: $S_{бок.}=2\pi R\cdot H$.

Основания цилиндра — два круга с общей площадью $2\cdot\pi R^2$.

Полная поверхность цилиндра определяется по формуле:

$S_{полн.}=2\pi RH+2\pi R^2=2\pi R\cdot(H+R)$.

**Проверяем себя**

**Т1**. Укажите верную формулу:

Площадь полной поверхности цилиндра вычисляется по формуле:

а) $S=2\pi R(R+H)$;

б) $S=2\pi(H+l)$;

в) $S=\pi R(R+l)$.

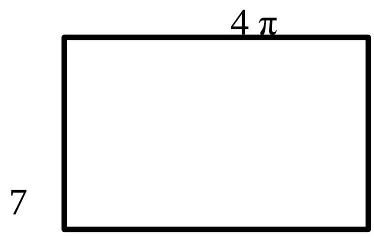
**Т2**. Заполните пропуски:

Разверткой боковой поверхности цилиндра является ____________, одна сторона которого равна ___________ цилиндра, а другая - длине ___________ цилиндра.

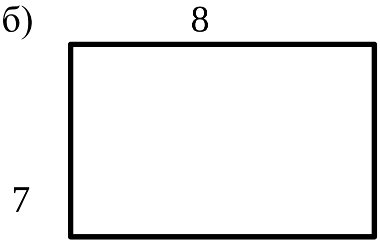
**Т3**.

Радиус основания цилиндра равен 4, а образующая цилиндра равна 7. Укажите, какой из прямоугольников является разверткой его боковой поверхности?

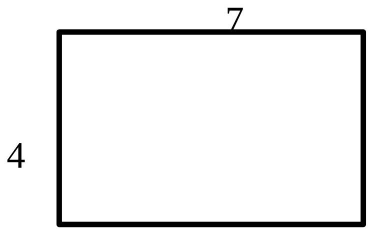
а)



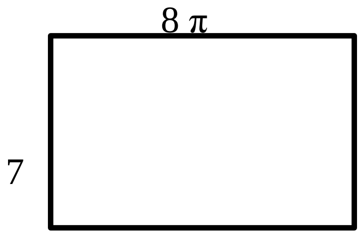

б)




в)




г)




**Решаем задачи**

**№1**

а) Дан прямоугольник со сторонами 13см и 10 см. Определи площадь боковой поверхности цилиндра, который образовался при вращении прямоугольника вокруг стороны длиной 13 см. В расчётах используй $\pi \approx 3$.

б) Дан прямоугольник со сторонами 21см и 6 см. Определи площадь боковой поверхности цилиндра, который образовался при вращении прямоугольника вокруг стороны длиной 21 см. В расчётах используй $\pi \approx 3$.

в) Дан прямоугольник со сторонами 25см и 20 см. Определи площадь боковой поверхности цилиндра, который образовался при вращении прямоугольника вокруг стороны длиной 25 см. В расчётах используй $\pi \approx 3$.

**№2**

а) Определи площадь осевого сечения цилиндра, если площадь боковой поверхности цилиндра равна $10\pi$ см$^2$.

б) Определи площадь осевого сечения цилиндра, если площадь боковой поверхности цилиндра равна $42\pi$ см$^2$.

в) Определи площадь осевого сечения цилиндра, если площадь боковой поверхности цилиндра равна $47\pi$ см$^2$.

**№3**

а) Дан цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна $150\pi$ см$^2$.

Высота цилиндра в три раза больше радиуса основания цилиндра. Вычисли радиус основания цилиндра.

б) Дан цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна $16\pi$ см$^2$.

Высота цилиндра в два раза больше радиуса основания цилиндра. Вычисли радиус основания цилиндра.

в) Дан цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна $24\pi$ см$^2$.

Высота цилиндра в три раза больше радиуса основания цилиндра. Вычисли радиус основания цилиндра.

**№4**

а) Длина свода полуцилиндрического ангара равна 34 дм, а его диаметр равен 37 дм. Вычисли площадь поверхности свода ангара. В расчётах используй $\pi \approx 3$.

б) Длина свода полуцилиндрического ангара равна 26 дм, а его диаметр равен 29 дм. Вычисли площадь поверхности свода ангара. В расчётах используй $\pi \approx 3$.

в) Длина свода полуцилиндрического ангара равна 46 дм, а его диаметр равен 24 дм. Вычисли площадь поверхности свода ангара. В расчётах используй $\pi \approx 3$.

**№5.**

а) Во сколько раз увеличится или уменьшится площадь боковой поверхности цилиндра, если его радиус R уменьшить в 5 раз, а высоту H увеличить в 10 раз?

б) Во сколько раз увеличится или уменьшится площадь боковой поверхности цилиндра, если его радиус R уменьшить в 4 раза, а высоту H увеличить в 8 раз?

в) Во сколько раз увеличится или уменьшится площадь боковой поверхности цилиндра, если его радиус R уменьшить в 3 раз, а высоту H увеличить в 6 раз?

**№6.**

а) Радиус основания равен 3 см, а высота цилиндра равна 4. Вычислите площадь полной поверхности цилиндра, деленную на $\pi$.

б) Радиус основания равен 7 см, а высота цилиндра равна 5. Вычислите площадь полной поверхности цилиндра, деленную на $\pi$.

в) Радиус основания равен 6 см, а высота цилиндра равна 10. Вычислите площадь полной поверхности цилиндра, деленную на $\pi$.

**№7.**

а) Даны два цилиндра. Радиус основания и высота первого равны соответственно 6 и 14, а второго — 7 и 3. Во сколько раз площадь боковой поверхности первого цилиндра больше площади боковой поверхности второго?

б) Даны два цилиндра. Радиус основания и высота первого равны соответственно 12 и 8, а второго — 6 и 4. Во сколько раз площадь

боковой поверхности первого цилиндра больше площади боковой поверхности второго?

в) Даны два цилиндра. Радиус основания и высота первого равны соответственно 15 и 20, а второго — 10 и 5. Во сколько раз площадь

боковой поверхности первого цилиндра больше площади боковой поверхности второго?

**Задача с развернутым ответом.**

Высота цилиндра равна 5, а радиус основания 10.

а) Докажите, что площадь боковой поверхности цилиндра равна площади его основания.

б) Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра на расстоянии 6 от неё.

# Занятие 11. Конус. Виды сечений.

**Конус** — это тело вращения, которое получается при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета.

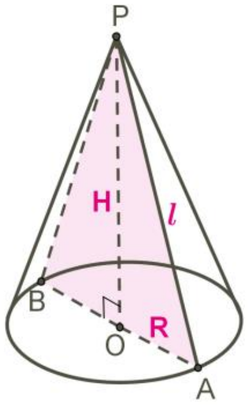
Треугольник POA вращается вокруг стороны PO. PO (H)— ось конуса и высота конуса,

P-вершина конуса,
PA ($l$) — образующая конуса,

Круг с центром O - основание конуса

AO — радиус основания конуса

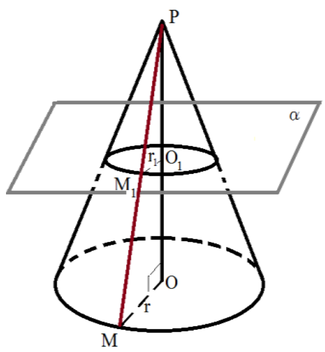
Полученная коническая поверхность называется боковой поверхностью конуса.




Осевое сечение конуса — это сечение конуса плоскостью, которая проходит через ось PO конуса. Это сечение является равнобедренным треугольником PAB.

∠PAO=∠PBO – углы между образующими и основанием конуса.

Если секущая плоскость перпендикулярна к оси OP конуса, то сечение конуса представляет собой круг с центром $O_1$, расположенном на оси конуса и радиусом $r_1$. Радиус $r_1=\frac{PO_1}{PO}\boldsymbol{r}$, где $r$ – радиус основания конуса



**Проверяем себя**

**Т1**. Заполните пропуски:

а) Конус – это ________________, которое получается при вращении _________________ вокруг его __________.

б) Ось симметрии конуса, является так же ___________ конуса.

**Т2**. Укажите верное утверждение:

Какая фигура образуется в сечении, если конус пересечь плоскостью, которая проходит через ось конуса?

а) круг;

б) равносторонний треугольник;

в) прямоугольник;

г) равнобедренный треугольник.

**Т3**. Вычислить:

Прямоугольный треугольник, катеты которого равны 9 см и 12 см, а гипотенуза 15 см вращается вокруг меньшей стороны.

а) Высота полученного тела вращения равна ____ см.

б) Образующая полученного тела равна ____ см.

в) Радиус полученного тела вращения равен _____ см.

**Решаем задачи**

**№1**

а) Диаметр основания конуса равен 108, а длина образующей — 90. Найдите высоту конуса.
б) Диаметр основания конуса равен 144, а длина образующей — 75. Найдите высоту конуса.

в) Диаметр основания конуса равен 24, а длина образующей — 13. Найдите высоту конуса.

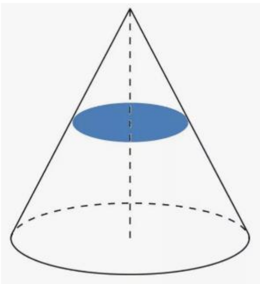
**№2.**

а) Найдите площадь осевого сечения конуса, радиус основания которого равен 3, а образующая равна 5.

б) Найдите площадь осевого сечения конуса, радиус основания которого равен 6, а образующая равна 10.

в) Найдите площадь осевого сечения конуса, радиус основания которого равен 12, а образующая равна 13.

**№3**



а) Площадь основания конуса равна 9. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 3 и 6, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.

б) Площадь основания конуса равна 18. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 3 и 6, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.

в) Площадь основания конуса равна 48. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 15 и 45, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.

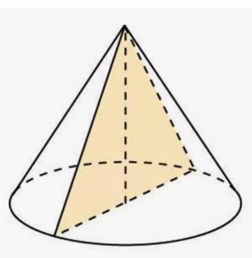
**№ 4**

а) Рассчитай. На каком расстоянии от вершины конуса расположено параллельное основанию сечение, площадь которого равна $\frac{1}{36}$ площади основания конуса. Высота конуса равна 24 см.

б) Рассчитай. На каком расстоянии от вершины конуса расположено параллельное основанию сечение, площадь которого равна $\frac{1}{25}$ площади основания конуса. Высота конуса равна 45 см.

в) Рассчитай. На каком расстоянии от вершины конуса расположено параллельное основанию сечение, площадь которого равна $\frac{1}{16}$ площади основания конуса. Высота конуса равна 32 см.

**№ 5**



а) Площадь основания конуса равна $36\pi$, высота — 3. Найдите площадь осевого сечения конуса.

б) Площадь основания конуса равна $16\pi$, высота — 6. Найдите площадь осевого сечения конуса.

в) Площадь основания конуса равна $36\pi$, высота — 10. Найдите площадь осевого сечения конуса.

**<u>Задача с развернутым ответом.</u>**

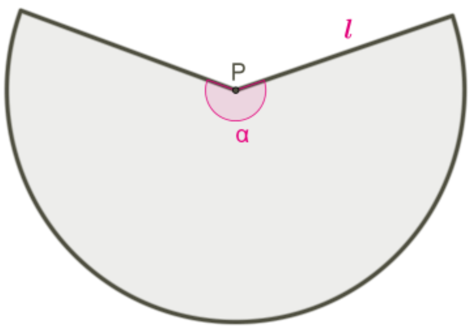
Дан прямой круговой конус с вершиной $M$. Осевое сечение конуса — треугольник с углом $120°$ при вершине $M$. Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$Через точку $M$ проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что полученный в сечении треугольник тупоугольный.

б) Найдите площадь сечения.

# Занятие 12. Площадь поверхности конуса

Для конуса построим развертку боковой поверхности. Образующая конуса – $l$ является радиусом сектора, сектор имеет длину дуги, равную длине окружности в основании конуса $2\boldsymbol{\pi R}$, угол развертки боковой поверхности равен $\boldsymbol{\alpha}$.




$\boldsymbol{S}_{\text{бок}} = \boldsymbol{\pi l^2 \cdot \frac{\alpha}{360}}$, или $S_{\text{бок}} = \boldsymbol{\pi R l}$

$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = \boldsymbol{\pi R^2 + \pi R l = \pi R(R + l)}$

**Проверяем себя**

**Т1**. Укажите верную формулу:

Площадь полной поверхности конуса вычисляется по формуле:

а) S=$2\pi R(R + h)$;

б) S=$2\pi(R + l)$;

в) S=$\pi R(R + l)$.

**Т2**. Заполните пропуски:

Разверткой боковой поверхности конуса является __________, радиус которой равен _________ конуса, а длина дуги сектора равна длине __________ конуса.

**Решаем задачи**

**№1**

а) Крыша башни замка имеет форму конуса. Высота крыши 6 м, а диаметр башни 16 м. Вычислить площадь поверхности крыши ( $\pi \approx 3$).

б) Крыша башни замка имеет форму конуса. Высота крыши 3 м, а диаметр башни 8 м. Вычислить площадь поверхности крыши ( $\pi \approx 3$).

в) Крыша башни замка имеет форму конуса. Высота крыши 7 м, а диаметр башни 48 м. Вычислить площадь поверхности крыши ( $\pi \approx 3$).

**№2**

а) Известно, что площадь боковой поверхности конуса равна $260\pi$ см $^2$, а радиус основания 10 см, найти высоту конуса.

б) Известно, что площадь боковой поверхности конуса равна $320\pi$ см $^2$, а радиус основания 16 см, найти высоту конуса.

в) Известно, что площадь боковой поверхности конуса равна $240\pi$ см $^2$, а радиус основания 12 см, найти высоту конуса.

**№3**

а) Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом $60°$. В основание конуса вписан треугольник, у которого одна сторона равна 27 см, а противолежащий угол равен $30°$.Определите площадь полной поверхности конуса деленную на $\pi$.

б) Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом $60°$. В основание конуса вписан треугольник, у которого одна сторона равна 13 см, а противолежащий угол равен $30°$.Определите площадь полной поверхности конуса деленную на $\pi$.

в) Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом $60°$. В основание конуса вписан треугольник, у которого одна сторона равна 4 см, а противолежащий угол равен $30°$.Определите площадь полной поверхности конуса деленную на $\pi$.

**№4**

а) Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 36 раз, а радиус основания останется прежним?

б) Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 11 раз, а радиус основания останется прежним?

б) Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 9 раз, а радиус основания останется прежним?

**№5**

а) Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.

б) Площадь боковой поверхности конуса в $\sqrt{2}$ раз больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.

в) Площадь боковой поверхности конуса в $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ раза больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.

**№6**

а) Высота конуса равна 20, образующая равна 25. Найдите площадь его полной поверхности, деленную на $\pi$

б) Высота конуса равна 36, образующая равна 45. Найдите площадь его полной поверхности, деленную на $\pi$

в) Высота конуса равна 21, образующая равна 35. Найдите площадь его полной поверхности, деленную на $\pi$

**№7**

а) Даны два конуса. Радиус основания и образующая первого конуса равны соответственно 4 и 6, а второго — 6 и 8. Во сколько раз площадь боковой поверхности второго конуса больше площади боковой поверхности первого?

б) Даны два конуса. Радиус основания и образующая первого конуса равны соответственно 2 и 5, а второго — 5 и 6. Во сколько раз площадь боковой поверхности второго конуса больше площади боковой поверхности первого?

в) Даны два конуса. Радиус основания и образующая первого конуса равны соответственно 4 и 6, а второго — 2 и 8. Во сколько раз площадь боковой поверхности первого конуса больше площади боковой поверхности второго?

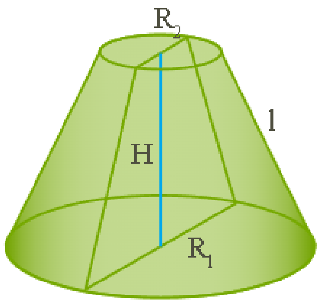
**Задача с развернутым ответом**

В конус, радиус основания которого равен 3, вписан шар радиуса 1,5.
а) Изобразите осевое сечение комбинации этих тел.
б) Найдите отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.

# Занятие 13. Усеченный конус

Усечённый конус — тело вращения, которое получается при вращении прямоугольной трапеции вокруг меньшей боковой стороны.

$R_2$ — радиус меньшего основания;
$R_1$ — радиус большего основания;
$l$ — образующая;
$H$ — высота



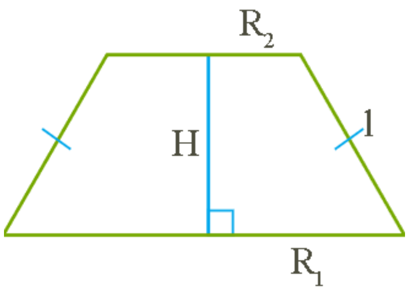

К основным элементам усечённого конуса относят два его основания, высоту, образующие и боковую поверхность конуса.

Площадь боковой поверхности усечённого конуса

$S_{бок.} = \pi \cdot l \cdot (R_1 + R_2)$, где $R_1$ и $R_2$ – радиусы оснований, $l$ — образующая.

$S_{полн.} = S_{бок.} + S_1 + S_2$, где $S_1, S_2$ — площади оснований усечённого конуса.

При решении задач чаще всего достаточно нарисовать только осевое сечение усечённого конуса, которое является равнобедренной трапецией.



**Проверяем себя**

**Т1**. Заполните пропуски:

а) Усечённый конус — тело___________, которое получается при вращении _______________ вокруг _____________ боковой стороны.

б) К основным элементам усечённого конуса относят два его _________, __________, ___________ и ____________ поверхность конуса.

**Т2**. Укажите верное утверждение:

Основаниями усечённого конуса являются:

а) круг;

б) равносторонний треугольник;

в) два круга, лежащие в параллельных плоскостях;

г) равнобедренный треугольник.

**Т3**. Вычислить:

Равнобедренная трапеция, боковые стороны которой равны 5см, высота трапеции, проведенная через середины оснований, равна 4 см, а меньшее основание 6см вращается вокруг высоты трапеции.

а) Высота полученного тела вращения равна ____ см.

б) Образующая полученного тела равна ____ см.

в) Радиусы полученного тела вращения равны _____ см и ____см.

**Решаем задачи**

**№1**

а) Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса, если радиусы оснований равны 3 и 5, а образующая — 4.

б) Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса, если радиусы оснований равны 1 и 3, а образующая — 7.

в) Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса, если радиусы оснований равны 2 и 10, а высота — 15.

**№2**

а) Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса, если радиусы оснований равны 3 и 6, а высота — 4.

б) Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса, если радиусы оснований равны 4 и 8, а высота — 3.

в) Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса, если радиусы оснований равны 6 и 12, а высота — 8.

**№3**

а) Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса, если радиусы оснований равны 2 и 4, а образующая наклонена под углом $45^0$ к основанию.

б) Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса, если радиусы оснований равны 3 и 5, а образующая наклонена под углом $45^0$ к основанию.

в) Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса, если радиусы оснований равны 4 и 6, а образующая наклонена под углом $45^0$ к основанию.

**№4**

а) Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса, если его высота равна 24, образующая 25, а площадь осевого сечения — 264.

б) Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса, если его высота равна 4, образующая 5, а площадь осевого сечения — 28.

в) Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса, если его высота равна 15, образующая 17, а площадь осевого сечения — 240.

**№5**

а) Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 9:5 . Найдите площадь осевого сечения усеченного конуса, если его высота равна 15, а образующая – 17.

б) Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 7:3 . Найдите площадь осевого сечения усеченного конуса, если его высота равна 3, а

образующая – 5.

в) Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 13:7 . Найдите площадь осевого сечения усеченного конуса, если его высота равна 8, а

образующая – 10.

**Задача с развернутым ответом**

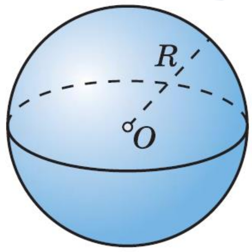
Радиусы оснований усеченного конуса равны 5 см и 11 см, а образующая равна 10 см. Найдите:

а) высоту усеченного конуса

б) площадь осевого сечения.

# Занятие 14. Сфера и шар

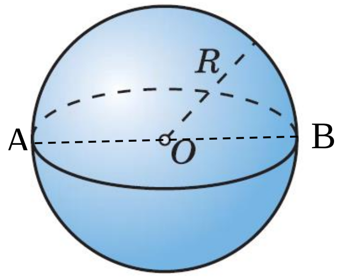
Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.




Сфера радиуса $R$

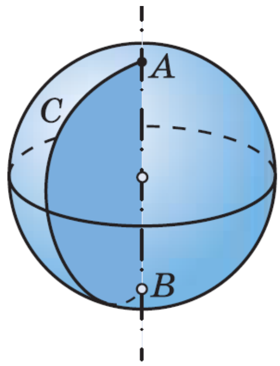
Данная точка называется центром сферы (точка O на рисунке), а данное расстояние – радиусом сферы (R на рисунке).

Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр, называется диаметром сферы (AB на рисунке).




Тело, ограниченное сферой, называется шаром. Центр, радиус и диаметр сферы называются также центром, радиусом и диаметром шара.

Сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг её диаметра.




Сфера получена вращением полуокружности $ACB$ вокруг диаметра $AB$

Площадь сферы радиуса R вычисляется по формуле $\boldsymbol{S = 4\pi R^2}$.

Площадь круга радиуса R вычисляется по формуле $S = \pi R^2$

Длина окружности радиуса R вычисляется по формуле $C = 2\pi R$

**Проверяем себя**

**Т1**. Выберите неверное утверждение.

1. Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.

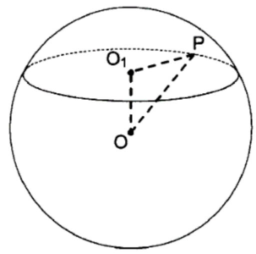
2. Сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг диаметра.

3. Площадь сферы радиуса R можно вычислить по формуле $S = 4\pi R^2$.

4. Тело, ограниченное сферой, называется шаром.

5. Сечение сферы плоскостью есть круг.

**Т2**. Вычислить:




Расстояние от центра шара до секущей плоскости $OO_1$ равно 5, радиус шара OP равен 13.

а) Площадь секущей плоскости равна _____.

б) Длина линии пересечения сферы и секущей плоскости равна _______.

в) Площадь сферы равна _______.

**Решаем задачи**

**№1**
а) Площадь большего круга шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.
б) Площадь большего круга шара равна 7. Найдите площадь поверхности шара.
в) Площадь большего круга шара равна 41. Найдите площадь поверхности шара.

**№2**
а) Площадь поверхности шара равна 24. Найдите площадь большего круга шара.
б) Площадь поверхности шара равна 56. Найдите площадь большего круга шара.
в) Площадь поверхности шара равна 68. Найдите площадь большего круга шара.

**№3**
а) Радиусы двух шаров равны 6 и 8. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.
б) Радиусы двух шаров равны 32 и 60. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.
в) Радиусы двух шаров равны 21 и 72. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

**№4**

а) Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 24 см. Вершины треугольника находятся на сфере. Определите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 13.

б) Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 30 см. Вершины треугольника находятся на сфере. Определите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 17.

в) Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 14 см. Вершины треугольника находятся на сфере. Определите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 25.

**№5**

а) Стороны прямоугольного треугольника, с катетами 8 см. и 15 см., касаются сферы. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 5 см.

б) Стороны прямоугольного треугольника, с катетами 7 см. и 24 см., касаются сферы. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 5 см.

в) Стороны прямоугольного треугольника, с катетами 12 см. и 35 см., касаются сферы. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 13 см.

**Задача с развернутым ответом**

В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 10, а высота равна 6, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.)

a) Докажите, что площадь боковой поверхности пирамиды относится к площади основания как $\sqrt{7}:2$.
b) Найдите площадь этой сферы.

# Занятие 15. Шар, вписанный и описанный.

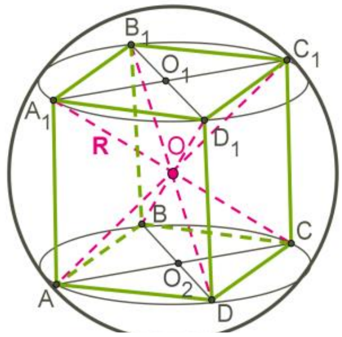
Шар является описанным около куба, если все вершины куба находятся на поверхности шара.

Центр шара O – точка пересечения диагоналей куба.

$AC_1, BD_1, CA_1, DB_1$ – диагонали куба.

Радиус шара равен половине диагонали куба.

Около любого куба можно описать шар.

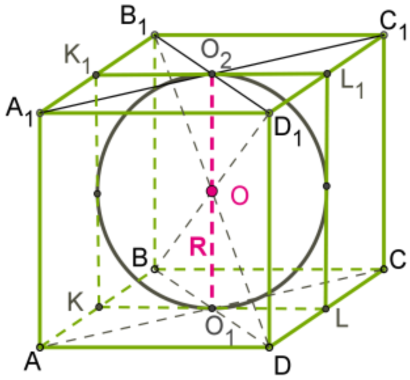



Шар является вписанным в куб, если он касается всех его граней.

Центр шара O находится в точке пересечения диагоналей куба.

Радиус шара – половина стороны куба.

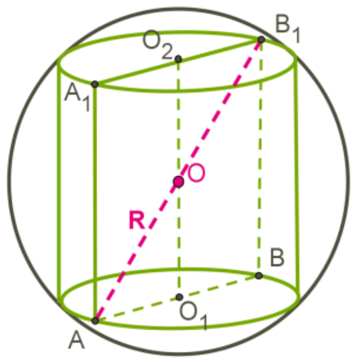
В любой куб можно вписать шар.




Шар является описанным около цилиндра, если окружности оснований цилиндра лежат на поверхности шара.

Центр шара O находится в середине высоты цилиндра. Радиус шара – половина диагонали осевого сечения цилиндра.

Около любого цилиндра можно описать шар.



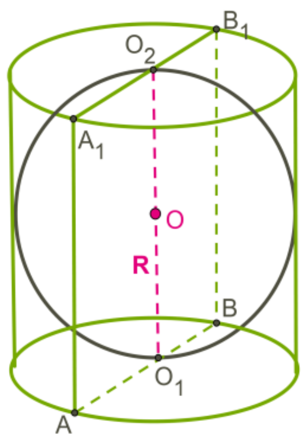

Шар является вписанным в цилиндр, если касается оснований цилиндра и всех его образующих.

Центр шара O – середина высоты цилиндра.

Шар можно вписать только в такой цилиндр, в котором диаметр основания равен высоте.

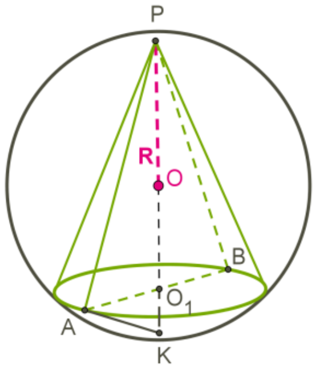
Осевое сечение – квадрат с вписанной в него окружностью.

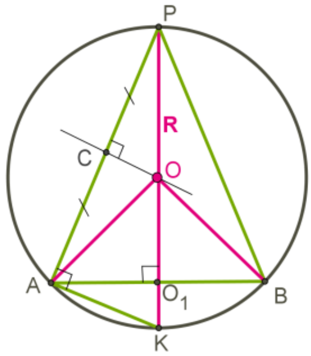
Радиус шара равен радиусу основания цилиндра и половине высоты.



Шар является описанным около конуса, если вершина конуса и окружность его основания находятся на поверхности шара.

Центр шара O находится в точке пересечения высоты конуса и серединного перпендикуляра, образующей конуса.

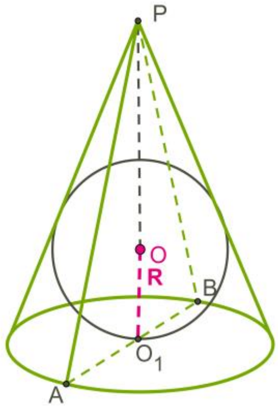


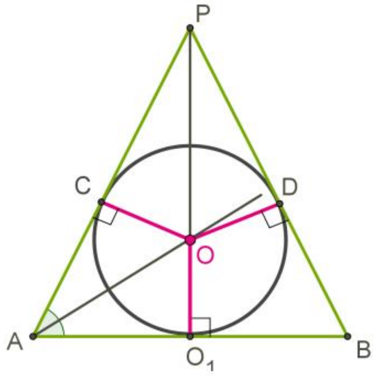




Около любого конуса можно описать шар.

Шар является вписанным в конус, если касается основания конуса и всех его образующих.

Центр шара O находится в точке пересечения высоты конуса и биссектрисы угла образованного образующей конуса с основанием.




В любой конус можно вписать шар.

**Проверяем себя**

**Т1**. Выберите неверное утверждение.

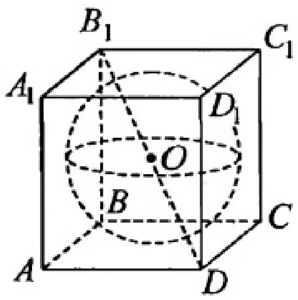
1.Радиус шара, вписанного в цилиндр равен диаметру цилиндра.

2. Шар является описанным около куба, если все вершины куба находятся на поверхности шара.

3. Центр шара, описанного около конуса находится в точке пересечения высоты конуса и серединного перпендикуляра образующей конуса.

4. Шар можно вписать только в такой цилиндр, в котором диаметр основания равен высоте.

**Т2**. Вычислить:




В куб с ребром $\sqrt{3}$ вписана сфера.

Расстояние от центра сферы до вершины куба.

Произведение расстояния от центра сферы до ребра куба на $\sqrt{6}$.

Радиус сферы, в ответ запишите $\sqrt{3}$R.

**Решаем задачи**

**№1**

а) Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности цилиндра равна 18. Найдите площадь поверхности шара.

б) Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности цилиндра равна 111. Найдите площадь поверхности шара.

в) Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности цилиндра равна 6. Найдите площадь поверхности шара.

**№2**

а) Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиусом 1. Найдите площадь его поверхности.

б) Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиусом 2. Найдите площадь его поверхности.

в) Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиусом 3. Найдите площадь его поверхности.

**№3**

а) Около конуса описан шар. Центр шара находится в центре основания конуса. Радиус шара равен $28\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

б) Около конуса описан шар. Центр шара находится в центре основания конуса. Радиус шара равен $33\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

в) Около конуса описан шар. Центр шара находится в центре основания конуса. Радиус шара равен $92\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

**№ 4**

а) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 3, а боковые ребра наклонены к основанию под углом $60^0$. Найдите радиус описанной вокруг пирамиды сферы.

б) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 6, а боковые ребра наклонены к основанию под углом $60^0$. Найдите радиус описанной вокруг пирамиды сферы.

в) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 9, а боковые ребра наклонены к основанию под углом $60^0$. Найдите радиус описанной вокруг пирамиды сферы.

**№ 5**

а) Около правильной треугольной призмы описан шар радиуса 6. Найдите радиус вписанного шара.

б) Около правильной треугольной призмы описан шар радиуса 8. Найдите радиус вписанного шара.

в) Около правильной треугольной призмы описан шар радиуса 12. Найдите радиус вписанного шара.

**Задача с развернутым ответом**

Вокруг куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 3 описана сфера. На ребре $CC_1$ взята точка $M$ так, что плоскость, проходящая через точки *A, B* и *M,* образуют угол $15^0$с плоскостью *ABC.*

a) Постройте линию пересечения сферы и плоскости, проходящей через точки *A, B,* и *M.*
b) Найдите длину линии пересечения плоскости сечения и сферы.

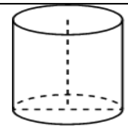
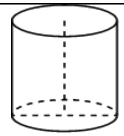
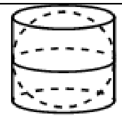
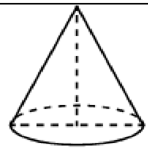
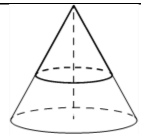
# Занятие 16. Проверочная работа.

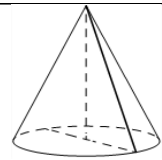
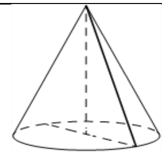
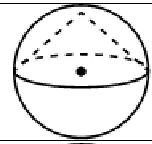
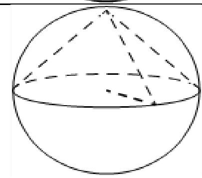
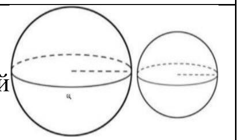
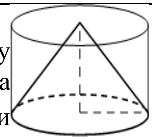
| | ВАРИАНТ I | ОТВЕТЫ | | |
|---|---|---|---|---|
| № | Задание | а | б | в |
| 1 | Формула площади круга | $2\pi R$ | $\pi R^2$ | $2\pi R^2$ |
| 2 | При вращении прямоугольника вокруг стороны получится | шар | конус | цилиндр |
| 3 | В основании цилиндра лежит | круг | полукруг | квадрат |
| 4 | Отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей в цилиндре называются | высотой | осью | образующими |
| 5 | Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси есть | прямоугольник | круг | трапеция |
| 6 | Радиус основания цилиндра равна 8 см, высота цилиндра равна 5 см. Найдите площадь осевого сечения цилиндра | 40 см$^2$ | 80 см$^2$ | 20 см$^2$ |
| 7 | Конус получается при вращении вокруг катета | Произвольного треугольника | Равностороннего треугольника | Прямоугольного треугольника |
| 8 | Осевое сечение конуса - это | треугольник | круг | прямоугольник |
| 9 | Формула площади боковой поверхности конуса | $S_{бок} = \pi Rl$ | $S_{бок} = \pi R^2 l$ | $S_{бок} = 2\pi Rl$ |
| 10 | Формула площади боковой поверхности цилиндра | $S_{бок} = 2\pi Rh$ | $S_{бок} = \pi R^2 h$ | $S_{бок} = \pi Rh$ |
| 11 | Сечение конуса плоскостью, проходящее перпендикулярно его оси, это | трапеция | треугольник | круг |
| 12 | Радиус основания конуса 3 см, высота 4 см. Найдите образующую | 7 см | 5 см | 1 см |
| 13 | Сфера - это поверхность | шара | цилиндра | конуса |
| 14 | Формула площади сферы | $2\pi R^2$ | $4\pi R^2$ | $\pi R^2$ |
| 15 | Площадь сферы равна $36\pi$ см$^2$. Чему равен радиус шара | 3 см | 9 см | 6 см |
| 16 | Любое сечение шара плоскостью – это | квадрат | круг | прямоугольник |
| 17 | Осевым сечением усеченного конуса является | прямоугольник | треугольник | трапеция |
| 18 | Что представляет из себя геометрическое место точек, удаленных от данной точки на расстояние, меньшее или равное 10 см. | шар радиуса 5 см | шар радиуса 20 см | шар радиуса 10 см |
| 19 | Формула длины окружности | $2\pi R$ | $\pi R^2$ | $2\pi R^2$ |
| 20 | Пересечение двух сфер - это | круг | окружность | шар |

| | ВАРИАНТ II | ОТВЕТЫ | | |
|---|---|---|---|---|
| № | Задание | а | б | в |
| 1 | Формула длины окружности | $\pi R^2$ | $2\pi R$ | $2\pi R^2$ |
| 2 | Сечение цилиндра плоскостью, проходящее перпендикулярно его оси | прямоугольник | треугольник | круг |
| 3 | Формула площади боковой поверхности цилиндра | $S_{бок}= \pi Rh$ | $S_{бок} = 2\pi Rh$ | $S_{бок} = \pi R^2h$ |
| 4 | Высота конуса 6 см, радиус его основания 8 см. найдите длину образующей конуса. | 10 см | 14 см | 2 см |
| 5 | Боковая поверхность цилиндра состоит из | осей | высот | образующих |
| 6 | Формула площади круга | $\pi R^2$ | $2\pi R$ | $2\pi R^2$ |
| 7 | Сечение конуса плоскостью, проходящее через его вершину, это | прямоугольник | трапеция | треугольник |
| 8 | Осевое сечение усеченного конуса это | круг | трапеция | треугольник |
| 9 | Геометрическое место точек, удаленных от данной точки на расстояние меньшее или равное 5 см это | Шар радиуса 5 см | Шар радиуса 10 см | Шар радиуса 2,5 см |
| 10 | Сечение шара плоскостью – это | овал | окружность | круг |
| 11 | Площадь сферы равна 100 $\pi$ см$^{2}$. Чему равен радиус соответствующего шара? | 10 см | 5 см | 25 см |
| 12 | При вращении прямоугольника вокруг его стороны получается | цилиндр | шар | конус |
| 13 | Площадь боковой поверхности конуса | $S_{бок} =2 \pi Rl$ | $S_{бок} = \pi Rl$ | $S_{бок} = \pi R^2l$ |
| 14 | При вращении прямоугольного треугольника вокруг катета получится | цилиндр | шар | конус |
| 15 | Сечение конуса плоскость, проходящее перпендикулярно оси есть | прямоугольник | круг | трапеция |
| 16 | Радиус основания цилиндра – 3 см, высота – 7 см. найдите площадь осевого сечения цилиндра | 42 см$^2$ | 21 см$^2$ | 10 см$^2$ |
| 17 | Отрезок, соединяющий вершину конуса с точками окружности основания, называется | осью | образующей | высотой |
| 18 | Сечение цилиндра плоскостью, параллельно его оси это | прямоугольник | круг | треугольник |
| 19 | Сфера это поверхность | цилиндра | конуса | шара |
| 20 | Формула площади сферы | $\pi R^2$ | $2\pi R^2$ | $4\pi R^2$ |

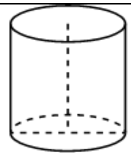
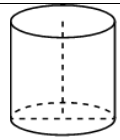
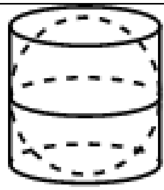
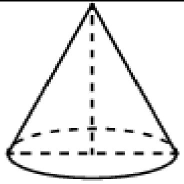
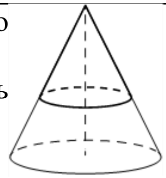
Проверочная работа по теме «Тела вращения».

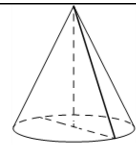
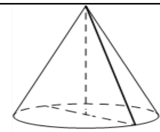
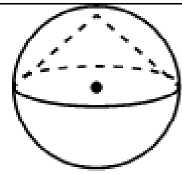
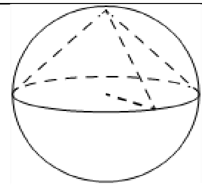
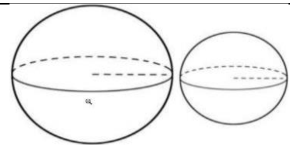
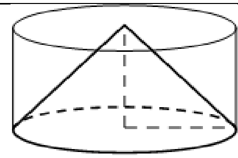
Вариант 1

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Площадь боковой поверхности цилиндра равна $12\pi$, а диаметр основания равен 6. Найдите высоту цилиндра. |  |
| 2. | Площадь боковой поверхности цилиндра равна $20\pi$, а высота равна 4. Найдите диаметр основания. |  |
| 3. | Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 48. Найдите площадь полной поверхности цилиндра. |  |
| 4. | Диаметр основания конуса равен 40, а длина образующей – 25. Найдите высоту конуса. |  |
| 5. | Площадь полной поверхности конуса равна 35. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении 3:2, считая от вершины конуса. Найдите площадь полной поверхности отсечённого конуса. |  |

| | | |
|---|---|---|
| 6. | Высота конуса равна 21, а длина образующей равна 29. Найдите диаметр основания конуса. |  |
| 7. | Высота конуса равна 24, а диаметр основания равен 90. Найдите образующую конуса |  |
| 8. | Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $10\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса. |  |
| 9. | Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $11\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы. |  |
| 10. | Радиусы двух шаров равны 9 и 12. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров. |  |
| 11. | Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $5\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса. |  |

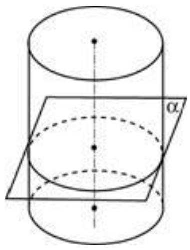
# Вариант 2

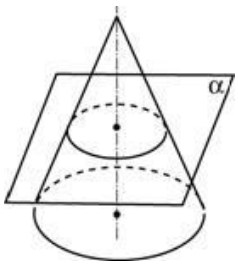
| | | |
|---|---|---|
| 1. | Площадь боковой поверхности цилиндра равна $24\,\pi$, а диаметр основания равен 8. Найдите высоту цилиндра. |  |
| 2. | Площадь боковой поверхности цилиндра равна $24\,\pi$, а высота равна 8. Найдите диаметр основания. |  |
| 3. | Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 120. Найдите площадь полной поверхности цилиндра. |  |
| 4. | Диаметр основания конуса равен 32, а длина образующей – 65. Найдите высоту конуса. |  |
| 5. | Площадь полной поверхности конуса равна 32,5. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении 4:1, считая от вершины конуса. Найдите площадь полной поверхности отсечённого конуса. |  |

| | | |
|---|---|---|
| 6. | Высота конуса равна 9, а длина образующей равна 41. Найдите диаметр основания конуса. |  |
| 7. | Высота конуса равна 16, а диаметр основания равен 60. Найдите длину образующей конуса. |  |
| 8. | Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $51\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса. |  |
| 9. | Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса.Образующая конуса равна $13\sqrt{2}$.Найдите радиус сферы. |  |
| 10. | Радиусы двух шаров равны 3 и 4.Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров. |  |
| 11. | Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $3\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра. |  |

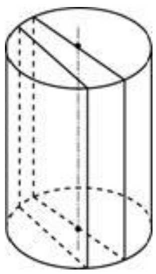
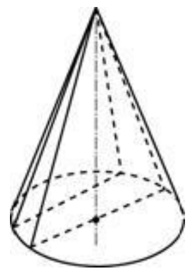
# Занятие 17. Практическая работа «Сечения тел вращения»

Сечением цилиндра или конуса плоскостью, параллельной плоскости основания, является окружность равная (для цилиндра) или подобная (для конуса) основанию.

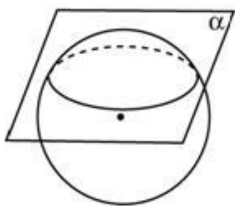





Сечением цилиндра плоскостями, параллельными образующим являются прямоугольники. Сечением плоскостями, проходящими через вершину конуса, являются треугольники.

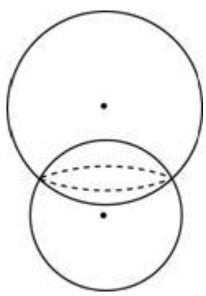



*Осевым* называется сечение, проходящее через ось тела вращения. Осевое сечение шара (сферы) также называется *диаметральным*.

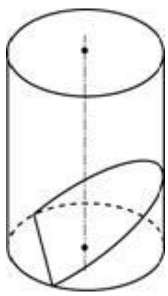
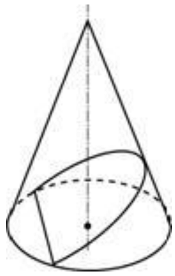
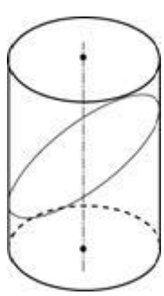



Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Цент этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Линия пересечения двух сфер есть окружность. Других точек пересечения они не имеют.



Сечением цилиндра или конуса плоскостью, не параллельной плоскости основания и не проходящей через вершину конуса является либо эллипс (если плоскость не пересекает основание), либо парабола и прямая (если плоскость пересекает основание).

**Решаем задачи**

**№1**

Изобразите

а) осевое сечение цилиндра;

б) сечение цилиндра плоскостью, проходящей перпендикулярно оси цилиндра;

в) сечение цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра.

Какая фигура получается в каждом случае?

**№2**

Изобразите

а) сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину и хорду основания;

б) осевое сечение конуса;

в) сечение конуса плоскостью, параллельной основанию;

г) сечение конуса плоскостью, не параллельной основанию.

Какая фигура получается в каждом случае?

**№3**

Изобразите

а) сечение усеченного конуса плоскостью, проходящей через его ось;
б) сечение усеченного конуса плоскостью, проходящей через основания конуса, параллельно его оси;
в) сечение усеченного конуса плоскостью, перпендикулярной его оси;
г) сечение усеченного конуса плоскостью, проходящей под углом к его оси.
Какая фигура получается в каждом случае?

**№4**

Изобразите

а) сечение шара плоскостью, не проходящей через его центр;

б) сечение шара плоскостью, проходящей через его центр;

в) сечение шара двумя плоскостями, не проходящими через его центр.

Какая фигура получается в каждом случае?

**№5**

Высота конуса равна 10. Сечение проходит через вершину конуса и хорду основания, стягивающей дугу в $60^0$. Плоскость сечения наклонена к плоскости основания под углом $45^0$. Найти площадь сечения.

**№6**

Секущая плоскость проходит через конец диаметра сферы радиуса 2. Угол между секущей плоскостью и диаметром равен $30^0$. Найти длину окружности сечения.

**Задача с развернутым ответом**

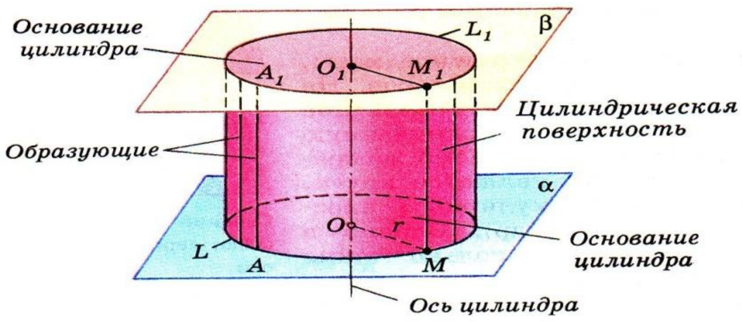
В конус, радиус основания которого равен R=3, вписан шар радиуса r=1,5:

а) изобразить осевое сечение комбинации этих тел;

б) найти отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.

# Занятие 18. Площадь поверхности цилиндра. Объём цилиндра

Цилиндрическая поверхность – это поверхность, образованная прямыми, проходящими через все точки окружности, перпендикулярными плоскости, в которой лежит эта окружность.

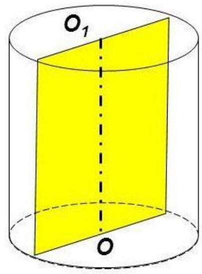



Осевое сечение – вариант сечения, при котором плоскость проходит через ось тела.

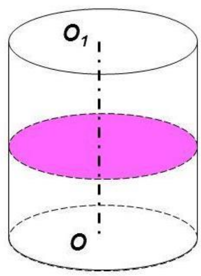
Развёртка боковой поверхности цилиндра – прямоугольник, одна сторона которого равна высоте цилиндра, а другая длине окружности основания.

Сечения цилиндра различными плоскостями

Если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то такое сечение называют осевым. Оно представляет собой прямоугольник, две стороны которого – образующие, а две другие – диаметры оснований цилиндра.




Если секущая плоскость перпендикулярна оси цилиндра, то сечение является кругом.




Основные формулы

Формула для вычисления площади боковой поверхности цилиндра: $S_{\text{бок}} = 2\pi Rl$

Площадь основания (площадь круга) $S = \pi R^2$

Площадью полной поверхности цилиндра: $S_{\text{полн}} = 2\pi R(R + l)$.

Формула для вычисления объёма цилиндра: $V = \pi R^2 h$.

**Проверяем себя**

**Т1**. Заполните пропуски:

а) Цилиндр – это ____________и двумя кругами.

б) Длина образующей называется _________________

в) Осевое сечение – это вариант сечения, при котором ________________

**Т2**. Укажите верные утверждения:

а) формула площади боковой поверхности цилиндра $S = \pi R^2$;

б) формула площади полной поверхности цилиндра $S_{\text{полн}} = 2\pi R(R + l)$;

в) формула объёма цилиндра $V = \pi R^2 h$.

**Т3**. Укажите неверные утверждения:

а) если секущая плоскость параллельна оси цилиндра, то сечение является кругом;

б) если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то такое сечение называют осевым;

в) разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник.

**Решаем задачи**

**№1**

а) Площадь боковой поверхности цилиндра равна $2\pi$, а высота – 1. Найдите диаметр основания.
б) Площадь боковой поверхности цилиндра равна $12\pi$, а высота – 2. Найдите диаметр основания.

в) Площадь боковой поверхности цилиндра равна $36\pi$, а высота – 4. Найдите диаметр основания.

**№2**

а) Длина окружности основания цилиндра равна 3. Площадь боковой поверхности равна 6. Найдите высоту цилиндра.

б) Длина окружности основания цилиндра равна 14. Площадь боковой поверхности равна 182. Найдите высоту цилиндра.

в) Длина окружности основания цилиндра равна 1. Площадь боковой поверхности равна 2. Найдите высоту цилиндра.

**№3**

а) Площадь осевого сечения цилиндра равна 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на $\pi$.
б) Площадь осевого сечения цилиндра равна 7. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на $\pi$.

в) Площадь осевого сечения цилиндра равна 9. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на $\pi$.

**№4**

а) Площадь боковой поверхности цилиндра равна $9\pi$, а диаметр основания равен 3. Найдите высоту цилиндра.

б) Площадь боковой поверхности цилиндра равна $2\pi$, а диаметр основания равен 1. Найдите высоту цилиндра.

в) Площадь боковой поверхности цилиндра равна $15\pi$, а диаметр основания равен 5. Найдите высоту цилиндра.

**№5**

а) Длина окружности основания цилиндра равна 3, высота равна 2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

б) Длина окружности основания цилиндра равна 3, высота равна 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

в) Длина окружности основания цилиндра равна 5, высота равна 2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

**№6**
а) В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй сосуд, диаметр которого в 2 раза больше первого? Ответ дайте в сантиметрах.
б) В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 8 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй сосуд, диаметр которого в 2 раза больше первого? Ответ дайте в сантиметрах.
в) В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 128 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй сосуд, диаметр которого в 8 раза больше первого? Ответ дайте в сантиметрах.

**№7**

а) В цилиндрический сосуд налили 2000 см$^3$ воды. Уровень воды при этом достигает высоты 12 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см$^3$.

б) В цилиндрический сосуд налили 6000 см$^3$ воды. Уровень воды при этом достигает высоты 12 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см$^3$.

в) В цилиндрический сосуд налили 1200 см$^3$ воды. Уровень воды при этом достигает высоты 12 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 10 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см$^3$.

**№8**

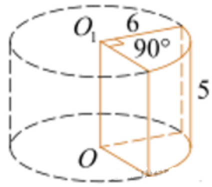
а) Объём первого цилиндра равен 30 м$^3$. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания – в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

б) Объём первого цилиндра равен 6 м$^3$. У второго цилиндра высота в два раза меньше, а радиус основания – в три раза больше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

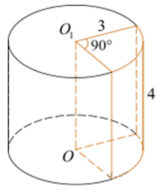
в) Объём первого цилиндра равен 12 м$^3$. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания – в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

**№9**

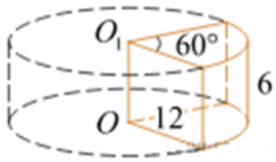
а) Найдите объём цилиндра, изображённого на рисунке.
В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.




б) Найдите объём цилиндра, изображённого на рисунке.
В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

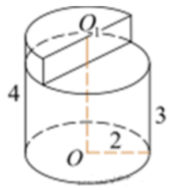



в) Найдите объём цилиндра, изображённого на рисунке.
В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

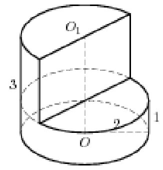


**№10**

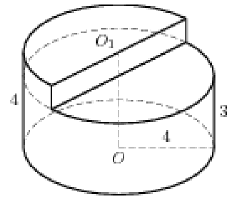
а) Найдите объём цилиндра, изображённого на рисунке.
В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.




б) Найдите объём цилиндра, изображённого на рисунке.
В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.




в) Найдите объём цилиндра, изображённого на рисунке.
В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.




**Задача с развернутым ответом**

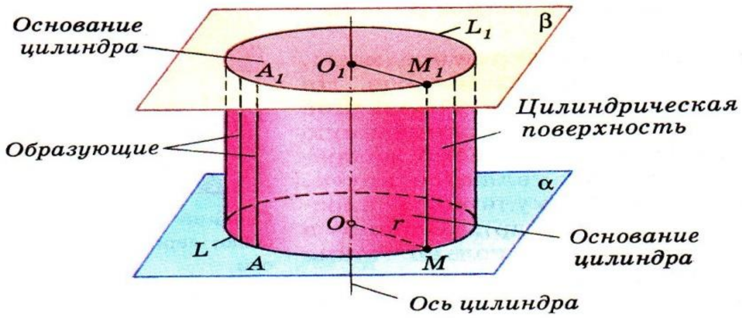
Высота цилиндра равна 5, а радиус основания 10.

а) Докажите, что площадь боковой поверхности цилиндра равна площади его основания.

б) Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра на расстоянии 6 от неё.

# Занятие 19. Площадь поверхности цилиндра. Объём цилиндра.

Цилиндрическая поверхность – это поверхность, образованная прямыми, проходящими через все точки окружности, перпендикулярными плоскости, в которой лежит эта окружность.

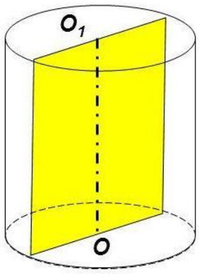



Осевое сечение – вариант сечения, при котором плоскость проходит через ось тела.

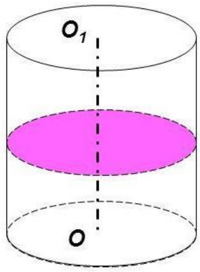
Развёртка боковой поверхности цилиндра – прямоугольник, одна сторона которого равна высоте цилиндра, а другая длине окружности основания.

Сечения цилиндра различными плоскостями

Если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то такое сечение называют осевым. Оно представляет собой прямоугольник, две стороны которого – образующие, а две другие – диаметры оснований цилиндра.




Если секущая плоскость перпендикулярна оси цилиндра, то сечение является кругом.




Основные формулы

Формула для вычисления площади боковой поверхности цилиндра:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rl$$

Площадь основания (площадь круга) $S = \pi R^2$

Площадью полной поверхности цилиндра: $S_{\text{полн}} = 2\pi R(R + l)$.

Формула для вычисления объёма цилиндра: $V = \pi R^2 h$.

**Проверяем себя**

**Т1**. Заполните пропуски:

а) Площадью полной поверхности цилиндра называется _______________

б) площадь боковой поверхности равна ___________________________

в) Развёртка боковой поверхности цилиндра – __________, одна сторона которого равна высоте цилиндра, а другая длине окружности основания.

**Т2**. Укажите верные утверждения:

а) формула площади боковой поверхности цилиндра $S = 2\pi Rl$;

б) формула площади полной поверхности цилиндра $S_{\text{полн}} = 2\pi R(R + l)$;

в) формула объёма цилиндра $V = \pi R^2 h$.

**Т3**. Укажите неверные утверждения:

а) площадью полной поверхности цилиндра называется сумма площадей боковой поверхности и двух оснований;

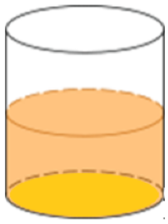
б) если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то такое сечение называют диагональным;

в) разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник.

**Решаем задачи**

**№1**

а) В цилиндрический сосуд, в котором находится 4 литра воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 2,2 раза. Чему равен объем детали? Ответ выразите в литрах.



б) В цилиндрический сосуд, в котором находится 4 литра воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,4 раза. Чему равен объем детали? Ответ выразите в литрах.

в) В цилиндрический сосуд, в котором находится 6 литров воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза. Чему равен объем детали? Ответ выразите в литрах.

**№2**

а) Объём первого цилиндра равен 74 м$^3$. У второго цилиндра высота в 3 раза больше, а радиус основания в 2 раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

б) Объём первого цилиндра равен 80 м$^3$. У второго цилиндра высота в 3 раза больше, а радиус основания в 4 раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

в) Объём первого цилиндра равен 38 м$^3$. У второго цилиндра высота в 3 раза больше, а радиус основания в 2 раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

**№3**

а) В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 24 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй сосуд, диаметр которого в 2 раза больше первого? Ответ выразите в сантиметрах.

б) В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 48 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй сосуд, диаметр которого в 4 раза больше первого? Ответ выразите в сантиметрах.

в) В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 175 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй сосуд, диаметр которого в 5 раза больше первого? Ответ выразите в сантиметрах.

**№4**

а) В цилиндрический сосуд налили 4000 см$^3$ воды. Уровень воды при этом достигает высоты 18 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см. Чему равен объём детали? Выразите ответ в см$^3$.

б) В цилиндрический сосуд налили 5000 см$^3$ воды. Уровень воды при этом достигает высоты 15 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 3 см. Чему равен объём детали? Выразите ответ в см$^3$.

в) В цилиндрический сосуд налили 3000 см$^3$ воды. Уровень воды при этом достигает высоты 22 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 11 см. Чему равен объём детали? Выразите ответ в см$^3$.

**№5**

а) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 80π, а его объём равен 320 π. Найти его высоту.

б) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 130π, а его объём равен 325 π. Найти его высоту.

в) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 200π, а его объём равен 425 π. Найти его высоту.

**№6**

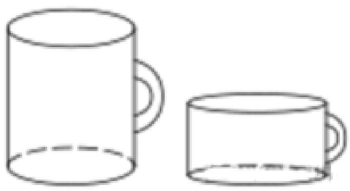
а) Объем цилиндра равен 27π. Найдите диаметр основания цилиндра, если площадь полной его поверхности в два раза больше площади боковой поверхности.

б) Объем цилиндра равен 64π. Найдите диаметр основания цилиндра, если площадь полной его поверхности в два раза больше площади боковой поверхности.

в) Объем цилиндра равен 125π. Найдите диаметр основания цилиндра, если площадь полной его поверхности в два раза больше площади боковой поверхности.

**№7**

а) Первая цилиндрическая кружка в 4,5 раз шире второй, а вторая в 6 раз выше первой. Найдите отношение объёма первой кружки к объёму второй.



б) Первая цилиндрическая кружка в 8 раз выше второй,
а вторая в 5 раз шире первой. Найдите отношение объёма первой кружки к объёму второй.

в) Первая цилиндрическая кружка в 8 раз шире второй, а вторая в 2,5 раза выше первой. Найдите отношение объёма первой кружки к объёму второй.

**№8**

а) В цилиндрический сосуд налили 1000 см3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 500 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в 1,688 раза. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см$^3$.

б) В цилиндрический сосуд налили 1500 см3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 10 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в $\frac{13}{10}$ раза. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см$^3$.

в) В цилиндрический сосуд налили 3900 см3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 26 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в $1\frac{1}{2}$ раза. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см$^3$.

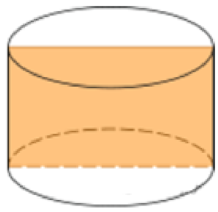
**№9**

а) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 1634π, радиус основания равен 19. Найдите высоту цилиндра.

б) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 960π, высота равна16. Найдите диаметр основания цилиндра.

в) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 680π, радиус основания равен 34. Найдите высоту цилиндра.

**№10**



а) Радиус основания цилиндра равен 2м, высота 3м. Найти диагональ осевого сечения.

б) Радиус основания цилиндра равен 4м, высота 6 м. Найти диагональ осевого сечения.

в) Радиус основания цилиндра равен 5м, диагональ осевого сечения 12 м. Найти высоту цилиндра.

**Задача с развернутым ответом**

Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно $\sqrt{730}$.
а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от этой плоскости.
б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

## Занятие 20. Объёмы тел. Конус

Объём – это количественная характеристика пространства, занимаемого телом или веществом. Объём тела определяется его формой и линейными размерами.

V – это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

● Равные тела имеют равные объёмы.

● Если тело составлено из нескольких тел, то его объём равен сумме объёмов этих тел.

● В качестве единицы измерения объёма обычно берут куб, ребро которого равно единице измерения отрезков

● Отношение объёмов подобных тел равно кубу коэффициента подобия.

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3$$

● Объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

$V = \frac{1}{3}S \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

**Проверяем себя**

**Т1**. Заполните пропуски:

а) Отношение объёмов подобных тел равно______________________

б) Если тело составлено из нескольких тел, то его объём равен _________________

**Т2**. Укажите верные утверждения:

а) Любые два конуса подобны.

б) Сечением конуса плоскостью, параллельной оси конуса является круг.

в) Если объёмы двух тел равны, то и сами тела равны.

г) Объём конуса равен произведению третьей части площади основания на высоту.

**Т3**. Вычислить:

Конус получен вращением прямоугольного треугольника с катетами 5 см и 12 см вокруг большего катета.

а) Образующая конуса равна ____ см.

б) Площадь основания конуса равна ____ $см^2$.

в) Объём конуса равен _____ $см^3$.

**Решаем задачи**

**№1**

а)Высота конуса равна 20, образующая равна 22. Найдите его объем, деленный на $\pi$.

б)Высота конуса равна 20, образующая равна 25. Найдите его объем, деленный на $\pi$.

в)Высота конуса равна 15, образующая равна 18. Найдите его объем, деленный на $\pi$.

**№2**

а) Диаметр основания конуса равен 30, а угол при вершине осевого сечения равен 90°. Вычислите объем конуса, деленный на $\pi$.

б) Диаметр основания конуса равен 36, а угол при вершине осевого сечения равен $90^\circ$. Вычислите объем конуса, деленный на $\pi$.

в) Диаметр основания конуса равен 12, а угол при вершине осевого сечения равен $90^\circ$. Вычислите объем конуса, деленный на $\pi$.

**№3**

а) Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 20 раз, а радиус основания останется прежним?

б) Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 22 раза, а радиус основания останется прежним?

в) Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 12 раз, а радиус основания останется прежним?

**№4**

а) Во сколько раз увеличится объём конуса, если радиус его основания увеличится в 4 раза, а высота останется прежней?

Б) Во сколько раз увеличится объём конуса, если радиус его основания увеличится в 3 раза, а высота останется прежней?

в) Во сколько раз увеличится объем конуса, если радиус его основания увеличится в 14 раз, а высота останется прежней?

**№5**

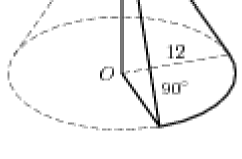
а) Конус получается при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника *ABC* вокруг катета, равного 30. Найдите его объем, деленный на $\pi$.

б) Конус получается при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника *ABC* вокруг катета, равного 21. Найдите его объем, деленный на $\pi$.

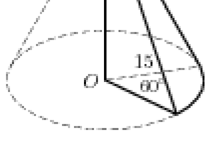
в) Конус получается при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника *ABC* вокруг катета, равного 60. Найдите его объем, деленный на $\pi$.

**№6**

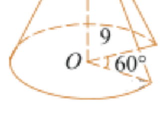
Найдите объем *V* части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите $V/\pi$.




а)

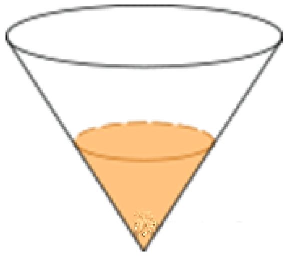



б)




в)

**№7**

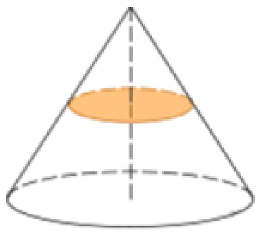


а) В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 14 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы наполнить сосуд доверху?

б) В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{2}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 152 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы наполнить сосуд доверху?

в) В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{4}$ высоты. Объём жидкости равен 4 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы наполнить сосуд доверху?

**№8**



а) Объем конуса равен 120. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

б) Объем конуса равен 112. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

в) Объем конуса равен 24. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

**№9**

а) Найдите объем V конуса, образующая которого равна 7 и наклонена к плоскости основания под углом 30°. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

б) Найдите объем V конуса, образующая которого равна 10 и наклонена к плоскости основания под углом 30°. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

в) Найдите объем V конуса, образующая которого равна 13 и наклонена к плоскости основания под углом 30°. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

**Задача с развернутым ответом**

Точки A, B и C лежат на окружности основания конуса и делят её в отношении 1: 2: 3.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите объём конуса, если меньшая сторона треугольника ABC равна 10, а расстояние от центра его основания до образующей равно 5.

# Занятие 21. Объёмы тел. Конус

Объём – это количественная характеристика пространства, занимаемого телом или веществом. Объём тела определяется его формой и линейными размерами.

V – это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

● Равные тела имеют равные объёмы.

● Если тело составлено из нескольких тел, то его объём равен сумме объёмов этих тел.

● В качестве единицы измерения объёма обычно берут куб, ребро которого равно единице измерения отрезков

● Отношение объёмов подобных тел равно кубу коэффициента подобия.

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3$$

● Объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

$V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

**Проверяем себя**

**Т1**. Заполните пропуски:

а) Объём конуса равен произведению___________________________________.

*Ответ: Объём конуса равен произведению третьей части площади основания на высоту.*

б) Сечением конуса плоскостью, перпендикулярной его оси является____________

**Т2**. Укажите верные утверждения:

а) Отношение объёмов подобных тел равно квадрату коэффициента подобия.

б) Секущая плоскость, параллельная основанию конуса, отсекает конус, подобный исходному.

в) Объём конуса равен произведению третьей части площади основания на высоту.

**Т3**. Конус получен вращением прямоугольного треугольника с катетами 6 см и 8 см вокруг меньшего катета.

а) Образующая конуса равна ____ см.

б) Площадь основания конуса равна ____ см$^2$.

в) Объём конуса равен _____ см$^3$.

**Решаем задачи**

**№ 1**. а) Высота конуса равна диаметру его основания. Найдите объём конуса, если его образующая равна $3\sqrt{5}$. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.
б) Высота конуса равна диаметру его основания. Найдите объём конуса, если его образующая равна $6\sqrt{5}$. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.
в) Высота конуса равна диаметру его основания. Найдите объём конуса, если его образующая равна $12\sqrt{5}$. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

**№ 2.** а) Объём конуса равен $96\pi$, а его высота равна 8. Найдите радиус основания конуса.
б) Объём конуса равен $50\pi$, а его высота равна 6. Найдите радиус основания конуса.

в) Объём конуса равен $21\pi$, а его высота равна 7. Найдите радиус основания конуса.

**№ 3.** а) Высота конуса равна 7 см. На расстоянии 3см от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объём исходного конуса, если объём меньшего конуса, отсекаемого от исходного, равен 54 см$^3$.
б) Высота конуса равна 8 см. На расстоянии 5см от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объём исходного конуса, если объём меньшего конуса, отсекаемого от исходного, равен 25 см$^3$.
в) Высота конуса равна 9 см. На расстоянии 4см от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объём исходного конуса, если объём меньшего конуса, отсекаемого от исходного, равен 32 см$^3$.

**№ 4**. а) Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна 36 м$^2$. Найдите объём конуса. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.
*б)* Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна 81 м$^2$. Найдите объём конуса. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.
в) Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна 144 м$^2$. Найдите объём конуса. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

**№ 5.** а) Длина образующей конуса равна 25, а длина окружности основания $14\pi$. Найти объём конуса.
б) Длина образующей конуса равна 13, а длина окружности основания $10\pi$. Найти объём конуса.
в) Длина образующей конуса равна 17, а длина окружности основания $16\pi$. Найти объём конуса.

**№ 6**. а) Куча щебня имеет коническую форму, радиус основания которой 2 м, а образующая 2,5 м. Сколько нужно сделать рейсов, чтобы перевести щебень, уложенный в эту кучу, если 1м$^3$ щебня весит 3т, за один рейс можно увезти 1,5 т. $(\pi \approx 3)$
б) Куча щебня имеет коническую форму, радиус основания которой 2 м, а образующая 2,5 м. Сколько нужно сделать рейсов, чтобы перевести щебень, уложенный в эту кучу, если 1м$^3$ щебня весит 3т, за один рейс можно увезти 0,5 т. $(\pi \approx 3)$
в) Куча щебня имеет коническую форму, радиус основания которой 1,5 м, а образующая 2,5 м. Сколько нужно сделать рейсов, чтобы перевести щебень,

уложенный в эту кучу, если 1м$^3$ щебня весит 3т, за один рейс можно увезти 1,5 т. ($\pi \approx 3$)

**Задача с развернутым ответом**

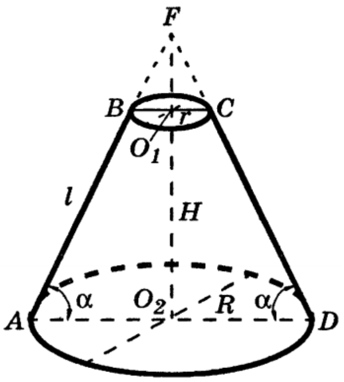
Точки A, B и C лежат на окружности основания конуса, так что дуги AB, BC и CA равны. Образующая конуса равна 8. Точки M и N середины отрезков AB и SC соответственно, MN = 5.

а) Докажите, что проекции отрезков SA и MN на плоскость основания конуса равны.

б) Найдите объём конуса.

## Занятие 22. Усеченный конус

**Усеченным конусом** называется часть конуса, заключенная между основанием и параллельным основанию сечением конуса.

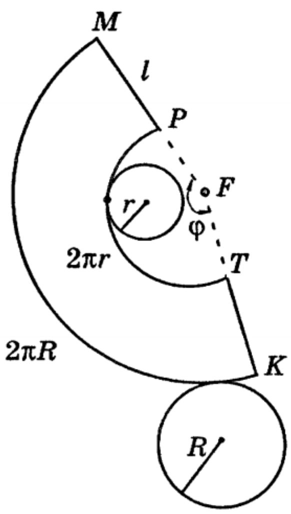



Круги с центрами $O_1$ и $O_2$ – *верхнее и нижнее основания усеченного конуса*,

$r$ и $R$ – радиусы оснований, отрезок $AB = l$ – *образующая*, $a$ – угол наклона образующей к плоскости нижнего основания, отрезок $O_1O_2$ – *высота* (расстояние между плоскостями оснований), трапеция ABCD – *осевое сечение*.

$H = l \sin a$

$H^2 + (R - r)^2 = l^2$




$\angle\, MFK = \dfrac{2\pi(R - r)}{l} = \varphi$

φ — угол развертки

*Развертка усеченного конуса* – часть кругового кольца и два круга.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса

$S_{бок} = \pi l(r + R)$

Площадь полной поверхности усеченного конуса

$S_{полн} = S_1 + S_2 + S_{бок} = \pi l(r + R) + \pi R^2 + \pi r^2$

Объем усеченного конуса

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi H(R^2 + rR + r^2)$

**Проверяем себя**

**Т1**. Заполните пропуски:

а) Усеченным конусом называется часть конуса, заключенная ____________________________________________________________ конуса.

б) Развертка усеченного конуса – часть ____________________и ___________.

**Т2**. Укажите верное утверждение:

а) Отрезок, концы которого лежат на окружностях оснований, называется высотой усеченного конуса;

б) Осевое сечение усеченного конуса – равнобедренная трапеция;

в) Сечение усеченного конуса, перпендикулярное высоте, - квадрат.

**Т3**. Укажите неверное утверждение:

а) Отрезок, соединяющий центры оснований, называется высотой усеченного конуса;

б) Все образующие усеченного конуса равны;

в) Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг её большего основания.

**Решаем задачи**

**№1**

а) Площади оснований усеченного конуса равны 9 и 25, его высота равна 6. Найдите объем усеченного конуса.

б) Площади оснований усеченного конуса равны 4 и 16, его высота равна 9. Найдите объем усеченного конуса.

в) Площади оснований усеченного конуса равны 36 и 49, его высота равна 3. Найдите объем усеченного конуса.

**№2**

а) Диаметры оснований усеченного конуса равны $\frac{8}{\sqrt{\pi}}$ и $\frac{10}{\sqrt{\pi}}$, его высота равна 3. Найдите объем усеченного конуса.

б) Диаметры оснований усеченного конуса равны $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ и $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$, его высота равна 6. Найдите объем усеченного конуса.

в) Диаметры оснований усеченного конуса равны $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$ и $\frac{8}{\sqrt{\pi}}$, его высота равна 9. Найдите объем усеченного конуса.

**№3**

а) Осевое сечение усеченного конуса – трапеция с основаниями 2 и 10 и боковой стороной 5. Найдите объем усеченного конуса, деленный на $\pi$.

б) Осевое сечение усеченного конуса – трапеция с основаниями 4 и 20 и боковой стороной 10. Найдите объем усеченного конуса, деленный на $\pi$.

в) Осевое сечение усеченного конуса – трапеция с основаниями 6 и 30 и боковой стороной 15. Найдите объем усеченного конуса, деленный на $\pi$.

**№4**

а) Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 и 5, объем конуса - $98\pi$. Найдите высоту конуса.

б) Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 и 6, объем конуса - $52\pi$. Найдите высоту конуса.

в) Радиусы оснований усеченного конуса равны 4 и 7, объем конуса - $279\pi$. Найдите высоту конуса.

**№5**

а) Радиус основания конуса равен 4, высота равна 6. Через середину высоты параллельно основанию провели сечение. Найдите объем полученного усеченного конуса, деленный на $\pi$.

б) Радиус основания конуса равен 2, высота равна 12. Через середину высоты параллельно основанию провели сечение. Найдите объем полученного усеченного конуса, деленный на $\pi$.

в) Радиус основания конуса равен 6, высота равна 18. Через середину высоты параллельно основанию провели сечение. Найдите объем полученного усеченного конуса, деленный на $\pi$.

**№6**

а) Плоскость, параллельная основанию конуса, отсекает от него конус, высота которого равна 6 и объем в 64 раза меньше объема данного конуса. Найдите высоту усеченного конуса.

б) Плоскость, параллельная основанию конуса, отсекает от него конус, высота которого равна 4 и объем в 8 раз меньше объема данного конуса. Найдите высоту усеченного конуса.

в) Плоскость, параллельная основанию конуса, отсекает от него конус, высота которого равна 5 и объем в 27 раз меньше объема данного конуса. Найдите высоту усеченного конуса.

**№7**

а) Суммы радиусов оснований усеченного конуса равна $5\sqrt{3}$, образующая равна 6 и составляет с плоскостью основания угол 30º. Найдите объем усеченного конуса, деленный на $\pi$.

б) Суммы радиусов оснований усеченного конуса равна $10\sqrt{3}$, образующая равна 12 и составляет с плоскостью основания угол 30º. Найдите объем усеченного конуса, деленный на $\pi$.

в) Суммы радиусов оснований усеченного конуса равна $11\sqrt{3}$, образующая равна 18 и составляет с плоскостью основания угол 30º. Найдите объем усеченного конуса, деленный на $\pi$.

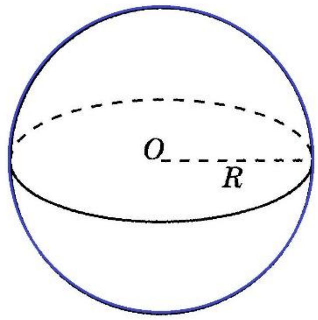
**Задача с развернутым ответом**

В усеченный конус, образующая которого наклонена под углом 45 градусов к нижнему основанию, вписан шар. Найти отношение величины боковой поверхности усеченного конуса к величине поверхности шара.

## Занятие 23. Шар

*Шаром* называется геометрическое тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не больше заданного от одной данной точки.

Эта точка называется *центром* шара.




Поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки, называется *сферой.*

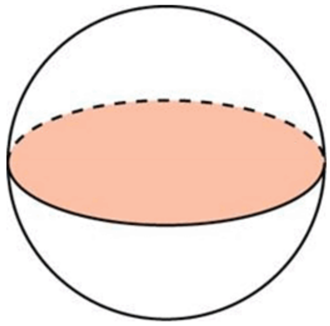
*Радиус шара* (R) – расстояние от центра шара до любой точки сферы.

*Диаметр шара (и диаметр сферы)* – отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр.

Очевидно, диаметр сферы равен 2R

Сечение шара плоскостью есть круг

Если секущая плоскость проходит через центр шара и в сечении получается круг, радиус которого равен радиусу шара R, то такой круг называется *большим кругом шара.*



*Площадь сферы* $S = 4\pi R^2$

Формула *объема шара* $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

**Проверяем себя**

**Т1**. Заполните пропуски:

а) Сфера это ________________ шара

б) Сечение шара, проходящее через _______, называется большим кругом шара.

в) Продолжите определение: отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр, называется _________________.

**Т2**. Укажите верные утверждения:

а) Радиус шара – отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр.

б) Сечение шара плоскостью есть круг

в) 2 радиуса шара составляют его диаметр.

**Т3**. Укажите неверные утверждения:

а) если сечение шара является кругом, значит оно проходит через центр шара.

б) Шаром называется геометрическое тело, состоящее из всех точек пространства, равноудаленных от одной данной точки.

в) Радиус большого круга шара равен радиусу шара.

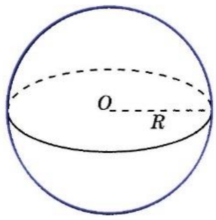
**Решаем задачи**

**№1**

а) Радиус шара равен 6. Найдите его объем, деленный на $\pi$

б) Радиус шара равен 3. Найдите его объем, деленный на $\pi$

в) Радиус шара равен 1,5. Найдите его объем, деленный на $\pi$.

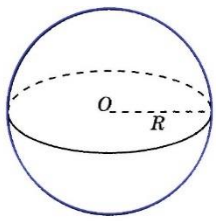



**№2**

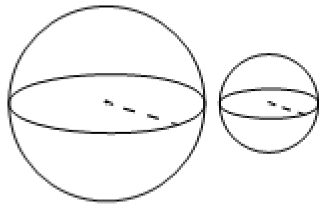
а) Объем шара равен $36\pi$. Найдите диаметр шара

б) Объем шара равен $\frac{4}{3}\pi$. Найдите диаметр шара

в) Объем шара равен $288\pi$. Найдите диаметр шара



**№3**

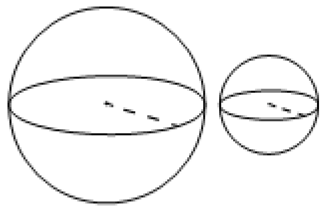


а) Даны два шара с радиусами 4 и 1. Во сколько раз объём первого шара больше объёма второго?

б) Даны два шара с радиусами 10 и 2. Во сколько раз объём первого шара больше объёма второго?

в) Даны два шара с радиусами 6 и 2. Во сколько раз объём первого шара больше объёма второго?

**№4**

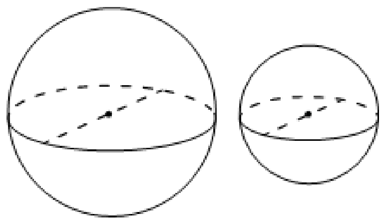


а) Даны два шара. Радиус первого шара в 7 раз больше радиуса второго. Во сколько раз объём первого шара больше объёма второго?

б) а) Даны два шара. Радиус первого шара в 10 раз больше радиуса второго. Во сколько раз объём первого шара больше объёма второго?

в) а) Даны два шара. Радиус первого шара в 9 раз больше радиуса второго. Во сколько раз объём первого шара больше объёма второго?

**№5**



а) Однородный шар диаметром 3 см весит 162 грамма. Сколько граммов весит шар диаметром 2 см, изготовленный из того же материала? Ответ дайте в граммах

б) Однородный шар диаметром 3 см весит 81 грамм. Сколько граммов весит шар диаметром 2 см, изготовленный из того же материала? Ответ дайте в граммах
в) Однородный шар диаметром 3 см имеет массу 162 грамма. Чему равна масса шара, изготовленного из того же материала, с диаметром 2 см? Ответ дайте в граммах.

**№6**

а) Площадь большого круга шара равна 36π. Найдите его объем, деленный на π
б) Площадь большого круга шара равна 2,25π. Найдите его объем, деленный на π

в) Площадь большого круга шара равна 1,44π. Найдите его объем, деленный на π.

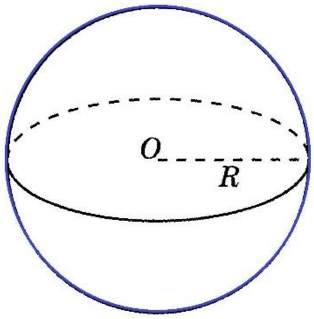
**Задача с развернуты ответом**

Плоскость $\alpha$ пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7. Плоскость $\beta$, параллельная плоскости $\alpha$, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5.

а) Докажите, что сечение шара плоскостью есть круг.
б) Найдите площадь сечения большего шара плоскостью $\alpha$.

## Занятие 24. Шар

*Шаром* называется геометрическое тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не больше заданного от одной данной точки.




Эта точка называется *центром* шара.

Поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки называется *сферой.*

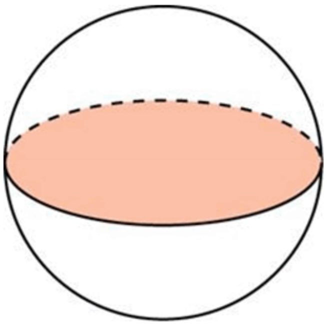
*Радиус шара* (R) – расстояние от центра шара до любой точки сферы.

*Диаметр шара (и диаметр сферы)* – отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр.

Очевидно, диаметр сферы равен 2R

Сечение шара плоскостью есть круг

Если секущая плоскость проходит через центр шара и в сечении получается круг, радиус которого равен радиусу шара R, то такой круг называется *большим кругом шара.*



*Площадь сферы* $S = 4\pi R^2$

Формула *объема шара* $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

**Т1**. Заполните пропуски:

а) Шаром называется геометрическое тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на ____________________от одной данной точки.

б) Формула ___________________ шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

в) Если секущая плоскость проходит через центр шара и в сечении получается круг, радиус которого равен радиусу шара R, то такой круг называется ____________________________________

**Т2**. Укажите верные утверждения:

а) Для любой точки шара расстояние от нее до центра шара равно радиусу

б) Расстояние между двумя точками сферы равно диаметру шара

в) Диаметр шара равен двум его радиусам

**Т3**. Укажите неверные утверждения:

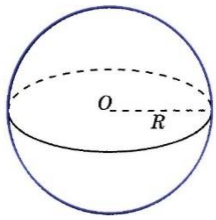
а) Сфера – геометрическое тело

б) Зная радиус сферы, можно найти объем шара, ограниченного данной сферой

в) Чтобы найти площадь поверхности сферы, можно объем шара умножить на три

**Решаем задачи.**

**№1**




а) Площадь сферы равна 9π. Найдите объем шара, ограниченного этой сферой. В ответ запишите результат, поделенный на π

б) Площадь сферы равна 36π. Найдите объем шара, ограниченного этой сферой. В ответ запишите результат, поделенный на π

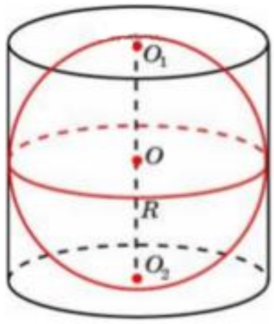
в) Площадь сферы равна 5,76π. Найдите объем шара, ограниченного этой сферой. В ответ запишите результат, поделенный на π.

**№2**

а) Шар вписан в цилиндр объемом 150. Найдите объем шара

б) Шар вписан в цилиндр объемом 90. Найдите объем шара

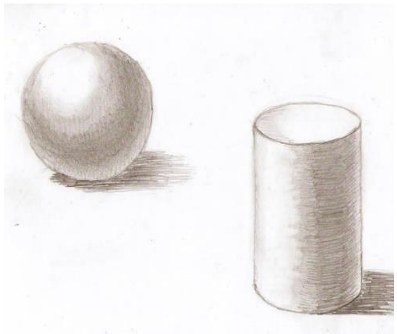
в) Шар вписан в цилиндр объемом 240. Найдите объем шара.




**№3**

а) Шар и цилиндр имеют равные объемы, а радиус шара равен радиусу основания цилиндра. Найдите высоту цилиндра, если радиус шара равен 6

б) Шар и цилиндр имеют равные объемы, а радиус шара равен радиусу основания цилиндра. Найдите высоту цилиндра, если радиус шара равен 15



в) Шар и цилиндр имеют равные объемы, а радиус шара равен радиусу основания цилиндра. Найдите высоту цилиндра, если радиус шара равен 27.

**№4**

а) В цилиндрический сосуд с радиусом основания, равным 4 и наполненный жидкостью до определенного уровня помещают 3 стеклянных шарика, диаметром 2. На сколько изменится высота жидкости в сосуде?

б) В цилиндрический сосуд с радиусом основания, равным 20 и наполненный жидкостью до определенного уровня помещают 3 стеклянных шарика, диаметром 10. На сколько изменится высота жидкости в сосуде?

в) В цилиндрический сосуд с радиусом основания, равным 6 и наполненный жидкостью до определенного уровня помещают 3 стеклянных шарика, диаметром 6. На сколько изменится высота жидкости в сосуде?

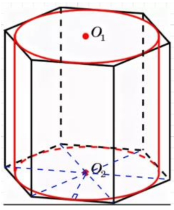
**Задача с развернутым ответом**

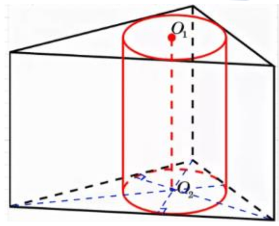
Проведены две параллельные плоскости по одну сторону от центра сферы на расстоянии 3 друг от друга. Эти плоскости дают в сечении две окружности, длины которых равны $18\pi$ и $24\pi$.

а) Точка H — ортогональная проекция произвольной точки меньшей окружности на плоскость большей. Докажите, что точка H делит проходящий через неё диаметр большей окружности в отношении 1:7.
б) Найдите объём шара, ограниченного данной сферой.

# Занятие 25. Комбинация тел. Цилиндр, призма

Цилиндр называется вписанным в призму, если его основания вписаны в основания цилиндра. При этом, призма называется описанной около цилиндра.





Свойства:

1. В призму можно вписать цилиндр тогда и только тогда, когда в ее основание можно вписать окружность.
2. Радиус основания цилиндра равен радиусу окружности, вписанной в основание призмы.

3, Высота цилиндра равна высоте призмы.

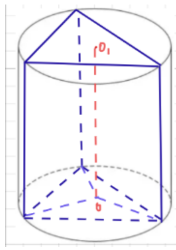
*a - сторона, r – радиус вписанной окружности, h - высота, S - площадь, p – полупериметр.*

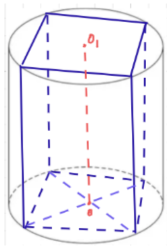
| | |
|---|---|
| Правильный треугольник | $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ или $r = \frac{1}{3}h$ |
| Прямоугольный треугольник | $r = \frac{a+b-c}{2}$ |
| Произвольный треугольник | $r = \frac{S}{p}$ |
| Квадрат | $r = \frac{a}{2}$ |
| Правильный шестиугольник | $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ |

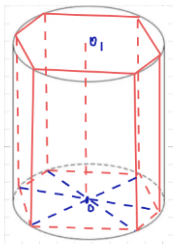
Цилиндр называется описанным около призмы, если его основания описаны около оснований цилиндра. При этом, призма называется вписанной в цилиндр.

Свойства:

1. Около призмы можно описать цилиндр, если около ее оснований можно описать окружности.
2. Радиус основания цилиндра равен радиусу окружности, описанной около основания призмы.
3. Высота цилиндра равна высоте призмы







*a, b, c- стороны, R – радиус вписанной окружности, h - высота, S - площадь, d –диагональ .*

| | |
|---|---|
| Правильный треугольник | $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ или $R = \frac{2}{3}h$ |
| Прямоугольный треугольник | $R = \frac{1}{2}$ гипотенузы |
| Произвольный треугольник | $R = \frac{abc}{4S}$ или $R = \frac{a}{2sin\alpha}$ |
| Квадрат | $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ |
| Прямоугольник | $R = \frac{d}{2}$ |
| Правильный шестиугольник | $R = a$ |

**Проверяем себя**

**Т1**. Заполните пропуски:

а) В правильном шестиугольнике радиус описанной окружности равен ________.

б) Если прямоугольный треугольник вписать в окружность, то его радиус равен________.

в) Сторона квадрата ________________ радиуса, вписанной в него окружности.

**Т2**. При каких условиях около цилиндра можно описать призму?

а) Призма любая.

б) Основания цилиндра вписаны в основания призмы.

в) Образующие цилиндра совпадают с боковыми ребрами призмы.

**Т3**. При каких условиях призма вписана в цилиндр?

а) Призма прямая.

б) Основания призмы вписаны в основания цилиндра.

в) Боковые ребра в два раза больше радиуса.

**Решаем задачи**

**№1**

а) Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 4. Объем параллелепипеда равен 16. Найдите высоту цилиндра.

б) Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 3,5. Объем параллелепипеда равен 24,5. Найдите высоту цилиндра.

в) Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 18. Объем параллелепипеда равен 1296. Найдите высоту цилиндра.

**№2**

а) В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра равны $\frac{5}{\pi}$ . Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

б) В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 7. Боковые ребра равны $\frac{8}{\pi}$ . Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

в) В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 9 и 6. Боковые ребра равны $\frac{2}{\pi}$ . Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

**№3**

а) Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания которого равен 2. Площадь боковой поверхности призмы равна 48. Найдите высоту цилиндра.

б) Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания которого равен 5. Площадь боковой поверхности призмы равна 40. Найдите высоту цилиндра.

в) Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания которого равен 6. Площадь боковой поверхности призмы равна 48. Найдите высоту цилиндра.

**№4**

а) Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

б) Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 16. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

в) Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 7. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

**№5**

а) Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен $2\sqrt{3}$ а высота равна 3.

б) Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен $8\sqrt{3}$ , а высота равна в) Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен $2\sqrt{3}$ , а высота равна 4.

**Задача с развернутым ответом.**

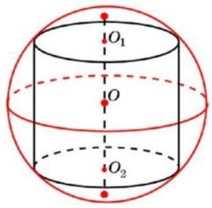
Внутри цилиндра расположен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, что все его вершины лежат на поверхности цилиндра, причём вершины $B$ и $D_1$ совпадают с центрами оснований, а остальные вершины лежат на боковой поверхности цилиндра.

а) Докажите, что плоскость $AB_1C$ параллельна основаниям цилиндра.

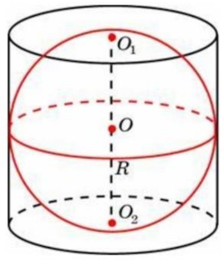
б) Найдите объём цилиндра, если ребро куба равно 3.

# Занятие 26. Комбинация тел. Цилиндр, шар

Цилиндр вписан в шар (сферу), если каждое его основание лежит на сфере данного шара. Любой цилиндр может быть вписан в шар.




Так как основания цилиндра имеют равный радиус, то расстояние от центра до их плоскостей одинаково, а значит, в силу их параллельности, центр находится в середине высоты цилиндра.




Шар (сфера) вписан в цилиндр, если он касается оснований цилиндра и его боковой поверхности.

1. Так как шар касается боковой поверхности, то в соответствующем сечении должен получиться круг, радиус которого равен радиусу шара. А значит, радиус цилиндра равен радиусу шара.

2. Высота должна быть равна диаметру шара.

Таким образом, совсем не любой цилиндр может быть описан около шара, для этого нужно, чтобы его высота была вдвое больше радиуса основания.

$\boldsymbol{V}_{\text{шара}}$ – объем шара, $\boldsymbol{V}_{\text{цилиндра}}$ - объем цилиндра, описанного около шара

R - радиус шара, $\boldsymbol{S}_{\text{шара}}$ – площадь основания,

$\boldsymbol{S}_{\text{цилиндра}}$ – площадь цилиндра, описанного около шара

H – высота цилиндра

Высота цилиндра, описанного около шара в два раза больше радиуса шара.

$\boldsymbol{S}_{\text{цилиндра}} = \boldsymbol{2\pi R^2 + 2\pi RH = 6\pi R^2}$ $\quad$ $\boldsymbol{S}_{\text{шара}} = \boldsymbol{4\pi R^2}$

$\boldsymbol{V}_{\text{шара}} = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3}$ $\quad$ $\boldsymbol{V}_{\text{цилиндра}} = \boldsymbol{S}_{\text{осн}} \boldsymbol{\cdot H = \pi \cdot R^2 \cdot H = 2\pi R^3}$

$$\frac{\boldsymbol{V}_{\text{шара}}}{\boldsymbol{V}_{\text{цилиндра}}} = \frac{\boldsymbol{S}_{\text{шара}}}{\boldsymbol{S}_{\text{цилиндра}}} = \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}}$$

**Проверяем себя**

**Т1**. Заполните пропуски:

а) Высота цилиндра, описанного около шара равна ______________________.

б) Объем цилиндра равен ________________ объема вписанного в него шара.

в) Чтобы вписать шар в цилиндр, нужно, чтобы _______________________.

**Т2**. Укажите верные утверждения:

а) Любой цилиндр можно описать около шара.

б) Радиус вписанного в цилиндр шара в два раза меньше его высоты.

в) Радиус основания цилиндра равен радиусу вписанного в него шара.

**Т3**. Укажите неверные утверждения:

а) Радиус основания цилиндра равен радиусу описанного около него шара.

б) Высота цилиндра равна двум радиусам, вписанного в него шара.

в) Объем цилиндра в два раза больше объема вписанного в него шара.

**Решаем задачи**

**№1**

а) Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 111. Найдите площадь поверхности шара.

б) Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 6. Найдите площадь поверхности шара.

в) Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 69. Найдите площадь поверхности шара.

**№2**

а) Шар вписан в цилиндр объемом 42. Найдите объем шара.

б) Цилиндр описан около шара. Объем цилиндра равен 102. Найдите объем шара.

в) Цилиндр описан около шара. Объем цилиндра равен 105. Найдите объем шара.

**№3**

а) Цилиндр описан около шара. Объем шара равен 38. Найдите объем цилиндра.

б) Цилиндр описан около шара. Объем шара равен 50. Найдите объем цилиндра.

в) Цилиндр описан около шара. Объем шара равен 20. Найдите объем цилиндра.

**№4**

а) Объём куба, описанного около сферы, равен 1000. Найдите радиус сферы.

б) Объём куба, описанного около сферы, равен 1728. Найдите радиус сферы.

в) Площадь поверхности куба, описанного около сферы, равна 96. Найдите радиус сферы.

**№5**

а) В куб с ребром 21 вписан шар. Найдите объем этого шара, деленный на $\pi$.

б) В куб с ребром 9 вписан шар. Найдите объем этого шара, деленный на $\pi$.

в) В куб с ребром 18 вписан шар. Найдите объем этого шара, деленный на $\pi$.

**№6**

а) Около куба с ребром $\sqrt{243}$ описан шар. Найдите объем этого шара, деленный на $\pi$.

б) Около куба с ребром $\sqrt{300}$ описан шар. Найдите объем этого шара, деленный на $\pi$.

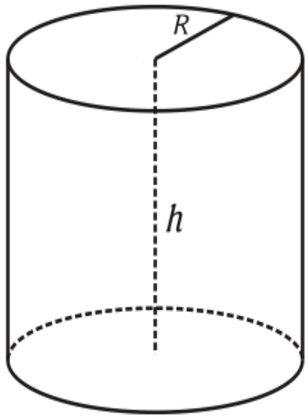
в) Около куба с ребром $\sqrt{507}$ описан шар. Найдите объем этого шара, деленный на $\pi$.

**Задача с развернутым ответом**

Даны цилиндр и шар. Радиусы основания цилиндра и большого круга шара равны. Полная поверхность цилиндра относится к поверхности шара как m: n. Найти отношение их объёмов.

# Занятие 27. Комбинация тел. Цилиндр, конус. Конус, шар.

**Цилиндр** – фигура вращения, ограниченная цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями (плоскости основания). Цилиндрическая поверхность называется боковой поверхностью цилиндра, а круги – основаниями цилиндра.




Площадь боковой поверхности цилиндра:

$S_{бок\ поверхности\ цилиндра}=2\pi Rh$.

Площадь полной поверхности цилиндра:

$S_{полной\ поверхности\ цилиндра} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$

Формула объема: $V_{цилиндра} = S_{основания} \cdot h = \pi R^2 h$, где R – радиус основания, h – высота.

**Конус** – фигура вращения, образованная лучами, исходящими из вершины конуса, проходящую через некоторую плоскость (плоскость основания).


**Образующая конуса** — это **отрезок, соединяющий вершину конуса с любой точкой окружности основания**.

Площадь полной поверхности конуса:

$S_{полн\ поверхности\ конуса} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$, где R — радиус основания, $l$ — образующая.

Площадь боковой поверхности конуса находится по формуле:

$S_{бок\ пов\ конуса} = \pi Rl$, где R — радиус основания, $l$ — образующая

Формула объема конуса: $V_{конуса} = \frac{1}{3} \cdot S_{основания} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot h$,

где R – радиус основания, h –высота.

**<u>Проверяем себя</u>**

**Т1. Заполните пропуски:**

а) Цилиндр – фигура вращения, ограниченная ________________и _________ параллельными плоскостями (плоскости основания).

б) Конус – фигура вращения, образованная _______, исходящими из ___________ конуса, проходящую через некоторую плоскость (плоскость основания).

в) Образующая конуса — это ___________, соединяющий ____________ конуса с любой точкой ___________________________________.

**Т2. Укажите верное утверждение:**

1) Площадь полной поверхности конуса вычисляется по формуле:

а) $S_{\text{полн поверхности конуса}} = \pi Rl$

б) $S_{\text{полн поверхности конуса}} = 2\pi Rl + \pi R^2$

в) $S_{\text{полн поверхности конуса}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$

г) $S_{\text{полн поверхности конуса}} = 2\pi R(l + R)$

2) Площадь боковой поверхности цилиндра определяется по формуле:

а) $S_{бок\ цилиндра}=4\pi Rh$ б) $S_{бок\ цилиндра}=2\pi Rh$

в) $S_{бок\ цилиндра}=2\pi R^2h$ г) $S_{бок\ цилиндра}=2\pi R^3$

**Т3. Вычислить:**

Если высота конуса 15 см, а радиус основания 8 см, образующая конуса равна:

а) 14 см б) 17 см в) 13 см г) 6 см

**Решаем задачи**

**№ 1.**

а) Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем конуса, если объем цилиндра равен 126.

б) Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем конуса, если объем цилиндра равен 114.

в) Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем конуса, если объем цилиндра равен135.

**№ 2.**

а) Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 42.

б) Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 25.
в) Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 18.

**№ 3.**

а) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $28\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
б) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $15\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
в) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $27\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

**№ 4**

а) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна 6. Найдите образующую конуса $l$, если она наклонена к плоскости основания под углом 60°. В ответе укажите $\frac{l}{\sqrt{3}}$ .
б) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна 15. Найдите образующую конуса $l$, если она наклонена к плоскости основания под углом 60°. В ответе укажите $\frac{l}{\sqrt{3}}$.
в) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна 18. Найдите образующую конуса $l$, если она наклонена к плоскости основания под углом 60°. В ответе укажите $\frac{l}{\sqrt{3}}$.

**№ 5**

а) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем цилиндра, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 30° и равна 2. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$ . .

б) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем цилиндра, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 30° и равна 4. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$ .

в) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем цилиндра, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 30° и равна 6. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

**№ 6**

а) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите высоту цилиндра, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 45° и равна 8. В ответе укажите $\frac{h}{\sqrt{2}}$ .

б) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите высоту цилиндра, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 45° и равна 10. В ответе укажите $\frac{h}{\sqrt{2}}$ .

в) а) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите высоту цилиндра, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 45° и равна 12. В ответе укажите $\frac{h}{\sqrt{2}}$ .

**№ 7**

а) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 45° и равна 8. В ответе укажите V/ $\pi$.

б) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 45° и равна 10. В ответе укажите V/ $\pi$.

в) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 45° и равна 12. В ответе укажите V/ $\pi$.

**Задача с развернутым ответом**

Высота цилиндра равна 5, а радиус основания 10.

а) Докажите, что площадь боковой поверхности цилиндра равна площади его основания.

б) Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра на расстоянии 6 от неё.

# Занятие 28. Комбинации тел. Конус, шар.

**Конус –** фигура вращения, образованная лучами, исходящими из вершины конуса, проходящую через некоторую плоскость (плоскость основания).

**Образующая конуса** — это **отрезок, соединяющий вершину конуса с любой точкой окружности основания**.


Площадь полной поверхности конуса:

$S_{\text{полн поверхности конуса}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$

где R — радиус основания, $l$ — образующая

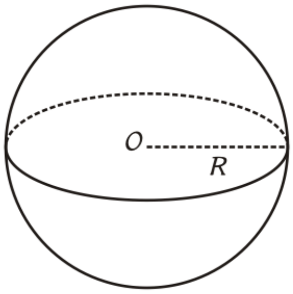
Площадь боковой поверхности конуса находится

$S_{\text{бок пов конуса}} = \pi Rl$, где R — радиус основания, $l$ — образующая

Формула объема конуса: $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{основания}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot h$,

где R – радиус основания, h -высота

**Шар** – геометрической место точек в пространстве, находящихся на одинаковом расстоянии от фиксированной точки (центра шара).




Площадь поверхности шара:

$S_{\text{поверхности шара}} = 4\pi R^2$ , R – радиус шара.

Формула объема шара:

$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3$ , R-радиус шара.

**Проверяем себя**

**Т1. Заполните пропуски:**
а) Конус – фигура вращения, образованная ________, исходящими из _________ конуса, проходящую через некоторую плоскость (плоскость основания).

б) Образующая конуса — это ____________, соединяющий _____________ конуса с любой точкой ____________________________________.

в) Шар – геометрической место точек в пространстве, находящихся на ________________ расстоянии от фиксированной точки (центра шара).

**Т2. Укажите верное утверждение:**

1) Площадь полной поверхности конуса вычисляется по формуле:

а) $S_{\text{полн поверхности конуса}} = \pi Rl$

б) $S_{\text{полн поверхности конуса}} = 2\pi Rl + \pi R^2$

в) $S_{\text{полн поверхности конуса}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$

г) $S_{\text{полн поверхности конуса}} = 2\pi R(l + R)$

2) Площадь поверхности сферы определяется по формуле, где R-радиус сферы:

а) $S_{\text{поверхности шара}} = 2\pi R^2$ б) $S_{\text{поверхности шара}} = \pi R^2$

в) $S_{\text{поверхности шара}} = \frac{4}{3}\pi R^2$ г) $S_{\text{поверхности шара}} = 4\pi R^2$

**Т3. Вычислить:**

Если высота конуса 15 см, а образующая конуса 17 см, радиус основания конуса равен:

а) 14 см б) 8 см в) 13 см г) 6 см

**Решаем задачи**

**№ 1.**

а) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $83\sqrt{2}$ . Найдите радиус сферы.

б) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $50\sqrt{2}$ . Найдите радиус сферы.

в) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $23\sqrt{2}$ . Найдите радиус сферы.

**№ 2.**

а) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Радиус сферы равен $33\sqrt{2}$ . Найдите образующую конуса.

б) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Радиус сферы равен $24\sqrt{2}$. . Найдите образующую конуса.

в) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Радиус сферы равен $7\sqrt{2}$. . Найдите образующую конуса.

**№ 3.**

а) Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 156. Найдите объём конуса.

б) Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 288. Найдите объём конуса.

в) Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 256. Найдите объём конуса.

**№ 4.**

а) Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем конуса равен 16. Найдите объем шара.

б) Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем конуса равен 24. Найдите объем шара.

в) Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем конуса равен 17. Найдите объем шара.

**№ 5**

а) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $5\sqrt{2}$ . Найдите площадь поверхности шара. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

б) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $7\sqrt{2}$ . Найдите площадь поверхности шара. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

в) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса.

Образующая конуса равна $9\sqrt{2}$ . Найдите площадь поверхности шара. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

**№ 6**

а) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса.

Образующая конуса равна $3\sqrt{2}$ . Найдите объём шара. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

б) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса.

Образующая конуса равна $6\sqrt{2}$ . Найдите объём шара. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

в) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса.

Образующая конуса равна $9\sqrt{2}$ . Найдите объём шара. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

**№ 7**

а) Высота конуса равна 4, образующая 5. Найдите радиус вписанной сферы.

б) Высота конуса равна 8, образующая 10. Найдите радиус вписанной сферы.

в) Высота конуса равна 16, образующая 20. Найдите радиус вписанной сферы.

**Задача с развернутым ответом**

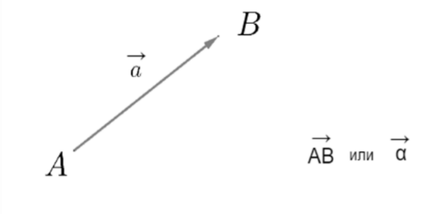
Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как 4 : 7.

а) Докажите, что поверхность полусферы делит образующую конуса в отношении 33 : 32, считая от вершины конуса.

б) Найдите площадь поверхности полусферы, находящейся внутри конуса, если радиус их общего основания равен 13.

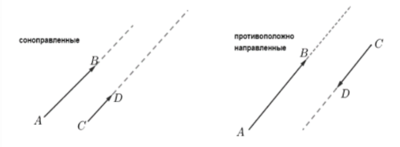
## Занятие 29. Векторы

**1. Вектором** называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, где точка А – начало, точка В – конец вектора

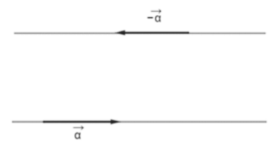



**Нулевым вектором** называется вектор, у которого начало совпадает с концом.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются **сонаправленными**, если лучи АВ и CD одинаково направлены.

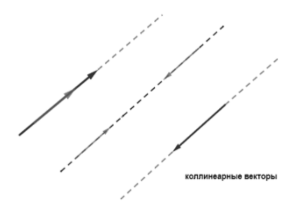


Если лучи АВ и CD противоположно направлены, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются **противоположно направленными.**



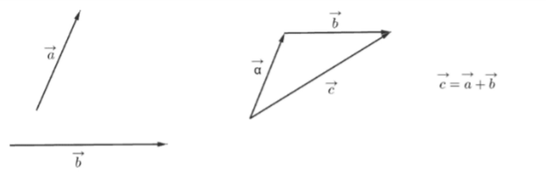
Вектор, **противоположный** вектору $\vec{a}$, обозначается как -$\vec{a}$.

Два вектора называются **коллинеарными,** если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

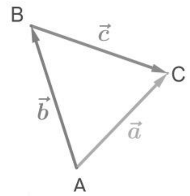


**Длиной вектора** $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка АВ, изображающего вектор. Длину вектора $\vec{a}$ обозначают $|\vec{a}|$.

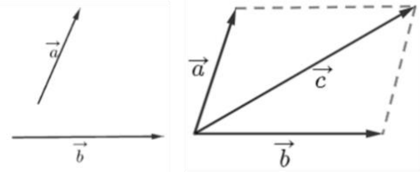
**2. Суммой** $\vec{a} + \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой третий вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом $\vec{a}$, а конец – с концом $\vec{b}$ при условии, что конец вектора $\vec{a}$ и начало вектора $\vec{b}$ совпадают.



**3. Разностью** $\vec{a}$ - $\vec{b}$ векторов и называется вектор $\vec{c}$ такой, что выполняется условие: $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$




**4.** Если два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ привести к общему началу, то вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ совпадает с диагонаялью параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Причем начало вектора $\vec{c}$ совпадает с началом заданных векторов.



**Проверяем себя**

**Т1.** Заполни пропуски:

а) Для любых трёх точек А, В и С выполняется равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ = ____

*б)* Два ненулевых вектора называют противоположными, если: _______

в) Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют: _______

**Т2.** Укажите верное утверждение:

Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $\{x_1\ y_1\};\{x_2;y_2\}$, то координаты вектора $\vec{a}$ - $\vec{b}$ равны:

а) $\{x_1x_2;\ y_1y_2\}$

б) $\{x_1+x_2;\ y_1+y_2\}$

в) $\{x_1-x_2;\ y_1-y_2\}$

**Т3.** Вычислите:

В прямоугольнике ABCD AB = 3 см, BC = 4 см, M – середина стороны AB.

а) Найти длину $\overrightarrow{AB}$

б) Найти длину $\overrightarrow{BC}$

в) Найти длину $\overrightarrow{DC}$

г) Найти длину $\overrightarrow{MC}$

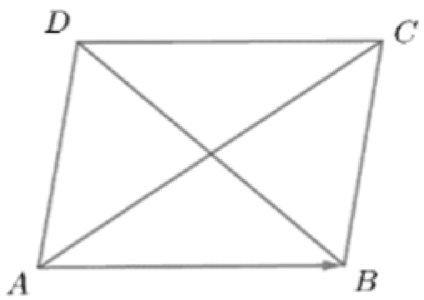
**Решаем задачи**

**№1**

а) Диагонали ромба ABCD равны 40 и 42.
Найдите длину вектора $\vec{AB}$.

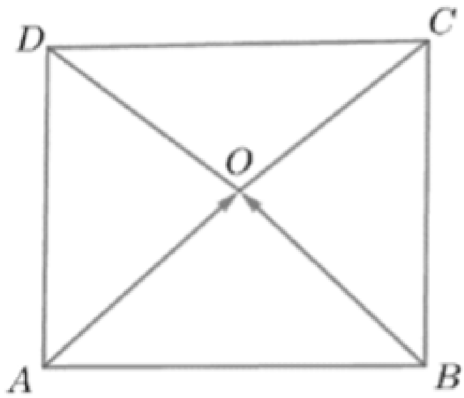
б) Диагонали ромба ABCD равны 12 и 16.
Найдите длину вектора $\vec{AB}$.

в) Диагонали ромба ABCD равны 6 и 8.
Найдите длину вектора $\vec{AB}$.



**№2**

а) Две стороны прямоугольника ABCD равны 6 и 8. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.




б) Две стороны прямоугольника ABCD равны 12 и 5. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

в) Две стороны прямоугольника ABCD равны 13 и 25 Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

***№3***

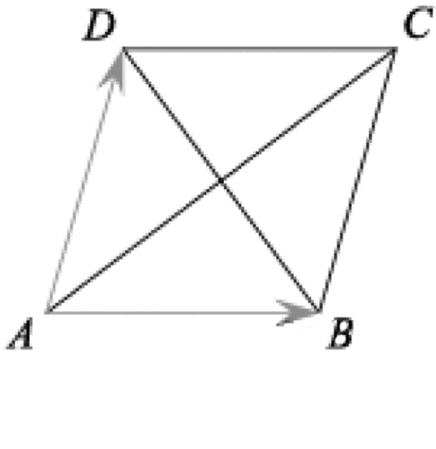
а) Две стороны прямоугольника ABCD равны 6 и 8. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$

б) Две стороны прямоугольника ABCD равны 15 и 23. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$

*в)* Две стороны прямоугольника ABCD равны 30 и 46 Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$

***№4***

а) Диагонали ромба ABCD равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

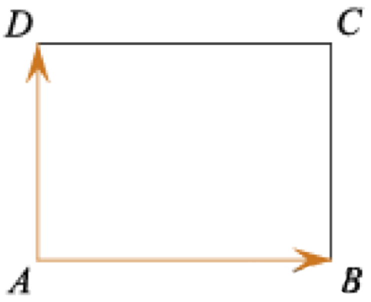



*б)* Диагонали ромба ABCD равны 44 и 66 Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

*в)* Диагонали ромба ABCD равны 22 и 33 Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

**№5**

а) Две стороны прямоугольника ABCD равны 6 и 8.  Найдите длину суммы векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$.



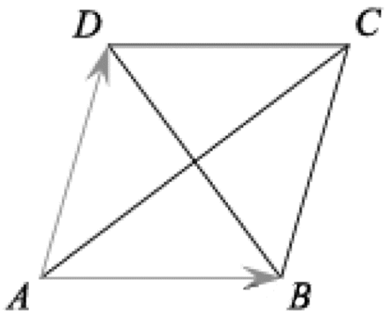

б) Две стороны прямоугольника ABCD равны 8 и 15. Найдите длину суммы векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$.

б) Две стороны прямоугольника ABCD равны 12 и 5. Найдите длину суммы векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$.

**№6**

*а)* Диагонали ромба ABCD равны 12 и 16

Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AD}$.




*б)* Диагонали ромба ABCD равны 32 и 23

Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AD}$.

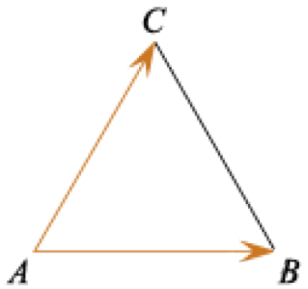
*в)* Диагонали ромба ABCD равны 25 и 36

Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AD}$.

**№7**

а) Стороны правильного треугольника ABC равны $2\sqrt{3}$.

Найдите длину вектора $\vec{AB} + \vec{AC}$.




б) Стороны правильного треугольника ABC равны $9\sqrt{3}$.

Найдите длину вектора $\vec{AB} + \vec{AC}$.

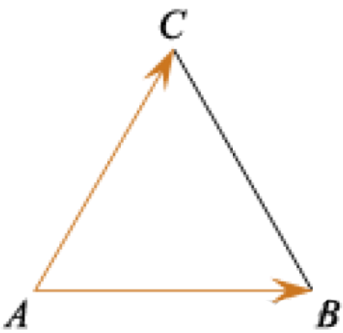
в) Стороны правильного треугольника ABC равны $46\sqrt{3}$.

Найдите длину вектора $\vec{AB} + \vec{AC}$.

**№8**

а) Стороны правильного треугольника ABC равны 3.

Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AC}$.




б) Стороны правильного треугольника ABC равны 38.

Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AC}$.

в) Стороны правильного треугольника ABC равны 17.

Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AC}$.

**Задача с развернутым ответом**

В трапеции ABCD дано: вершина A (3;0), середина основания AB – точка E (6; -1), середина основания CD – точка F (7; 2). Боковая сторона BC параллельна оси Oy. Доказать, что трапеция равнобедренная, и найти угол при ее основании.

## Занятие 30. Векторы и координаты.

**1.Координаты вектора.**

Пусть дан вектор, у которого известны координаты начала и конца.

A $\{x_{1;}\, y_1\}$   B $\{x_{2:\, y2}\}$

Тогда координаты самого вектора находятся как разница координат конца и начала:

$\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1;\, y_2 - y_1\}$

**2. Длина вектора**.

Пусть дан вектор, координаты которого известны. Длина вектора находится по формуле:

$\overrightarrow{AB}\{x;\, y\}$   $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

**3. Сумма (разность) векторов.**

Если даны векторы и известны координаты этих векторов, то координаты вектора, полученные в результате суммы (разности) данных векторов, будут равны сумме (разности) соответствующих координат.

$\vec{a}\{x_1;\, y_1\}$   $\vec{b}\{x_2;\, y_2\}$

$\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2;\, y_1 + y_2\}$   $\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_{2;}\, y_1 - y_2\}$

**4. Умножение вектора на число.**

Чтобы умножить вектор на ненулевое число, нужно умножить каждую координату этого вектора на это число $\vec{a}\{x_1;\, y_1\}$

$\vec{a}\{x_1;\, y_1\}$
$n \neq 0$
$n\vec{a} = \{nx_1 \colon ny_1\}$

**5. Координаты середины отрезка.**

Если координаты **концов отрезка** – *A* ($x_1$; $y_1$) и *B* ($x_2$; $y_2$), то координаты его середины в точке *C* будут $((x_1+x_2)/2;\ (y_1+y_2)/2)$.

**<u>Проверяем себя.</u>**

**Т1.** Заполните пропуски:

а) Если известны координаты вектора $\vec{a}\{x; y\}$, то длина вектора $\vec{a}$ находится по формуле_________.

б) Координаты суммы векторов $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ находятся по формуле__.

**Т2.** Укажите верный ответ.

1. Найдите длину вектора $\vec{p}\{-4; 5\}$:
   а) – 36;
   б) – 6;
   в) $\sqrt{41}$.
   г) 46.

2. Каково расстояние между точками M и N, если $M(2; 7)$ и $N(-2; 7)$:
   а) – 4;
   б) 4;
   в) – 2;
   г) 2.

3. Укажите координаты вектора $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, если A (2; -3), B (-8;4)
   а) {-5; 3,5}
   б) {-1; -3,5}
   в) {5; 0}
   г) {0;0}

**Т3.** Вычислите.

Дано: A (2; - 4), B (-2; -6), C (0 ;7)

а) координаты вектора $\overrightarrow{BC}$ равны___

б) длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна___

в) координаты середины отрезка AC равны___

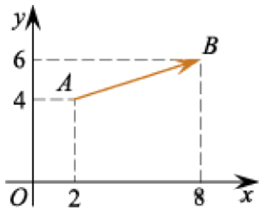
г) периметр треугольника ABC равен___

д) длина медианы BM равна___

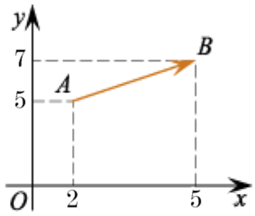
## Решаем задачи

### №1

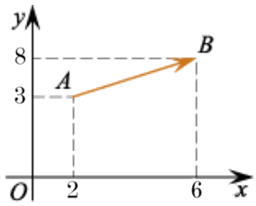
а) Найдите сумму координат вектора $\overrightarrow{AB}$




б) Найдите сумму координат вектора $\overrightarrow{AB}$

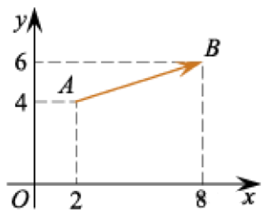



в) Найдите сумму координат вектора $\overrightarrow{AB}$

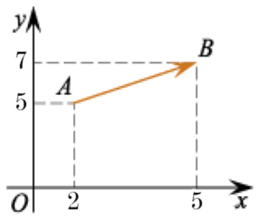



### №2

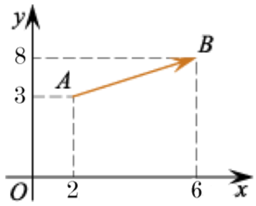
а) Найти квадрат длины вектора $\overrightarrow{AB}$




б) Найти квадрат длины вектора $\overrightarrow{AB}$



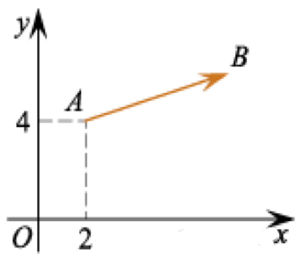

в) Найти квадрат длины вектора $\overrightarrow{AB}$




### №3

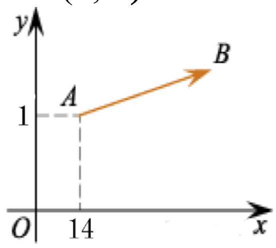
а) Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке A (2; 4) имеет координаты (6; 2).

Найдите ординату точки B.



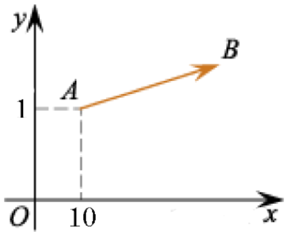
б) Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке А (14; 1) имеет координаты (8; 2).

Найдите ординату точки В.




в) Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке А (10; 1) имеет координаты (8; 7).

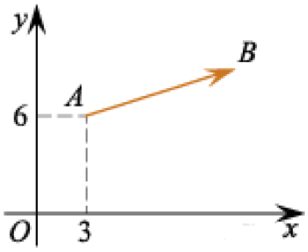
Найдите ординату точки В.




**№4**

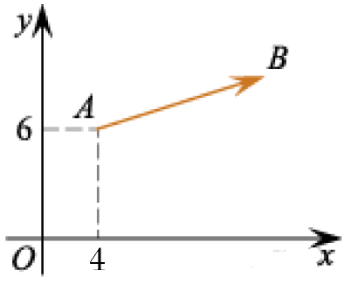
а) Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке А(3; 6) имеет координаты (9; 3).

Найдите сумму координат точки В.



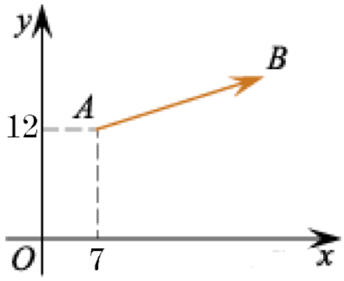

б) Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке А(4; 6) имеет координаты (10; 4).

Найдите сумму координат точки В.




в) Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке А (7; 12) имеет координаты (20; 32).

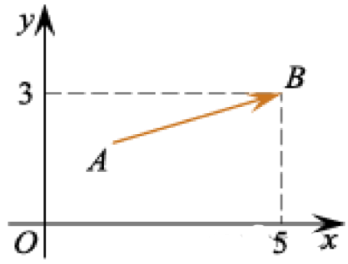
Найдите сумму координат точки В.



**№5**

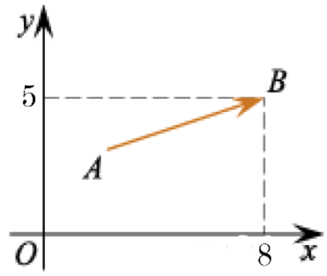
а) Вектор $\overrightarrow{AB}$ с концом в точке B (5; 3) имеет координаты (3; 1).

Найдите абсциссу точки А.



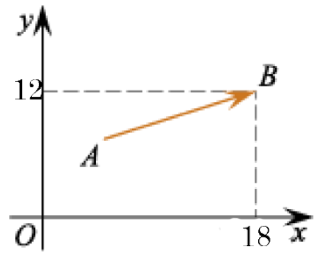

б) Вектор $\overrightarrow{AB}$ с концом в точке B (8; 5) имеет координаты (2; 3).

Найдите абсциссу точки А.



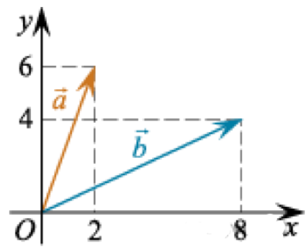

в) Вектор $\overrightarrow{AB}$ с концом в точке B (18; 12) имеет координаты (12; 30).

Найдите абсциссу точки А.

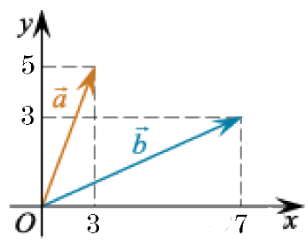



**№6**

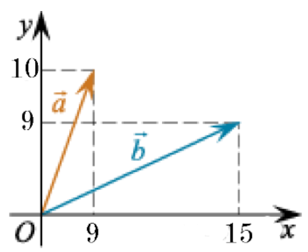
а) Найдите сумму координат вектора $\vec{a} + \vec{b}$.




б) Найдите сумму координат вектора $\vec{a} + \vec{b}$.

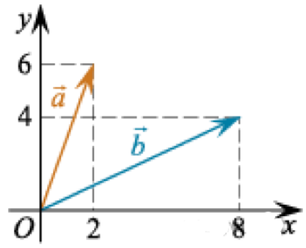



в) Найдите сумму координат вектора $\vec{a} + \vec{b}$.

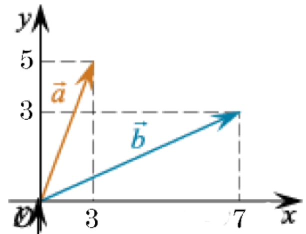


**№7**

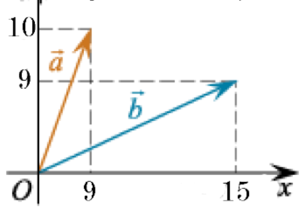
а) Найдите сумму координат вектора $\vec{a} - \vec{b}$.




б) Найдите сумму координат вектора $\vec{a} - \vec{b}$.

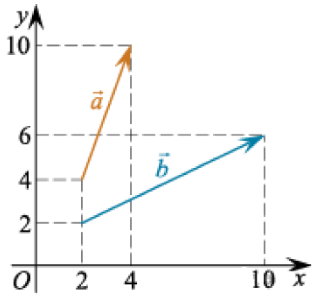



в) Найдите сумму координат вектора $\vec{a} - \vec{b}$.

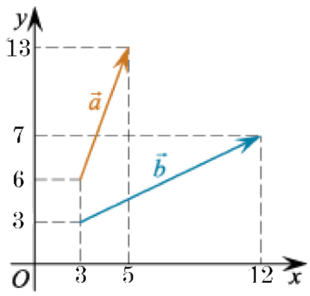



**№8**

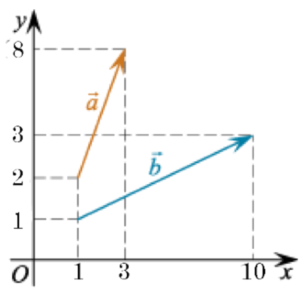
а) Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} + \vec{b}$.




б) Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} + \vec{b}$.




в) Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



**Задача с развёрнутым ответом**

Медиана $AA_1$, и $BB_1$ треугольника ABC пересекаются в точке G взаимно перпендикулярны. Найдите сторону AB, если AC=9, BC=12. Доказать, что $AB^2 = AC^2 + BC^2$

## Занятие 31. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними: $\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos \vec{a}\,\vec{b}$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\ \{x_{1;}\ y_1\}$и $\vec{b}\ \{x_{2;}\ y_2\}$ выражается формулой

$$\vec{a} * \vec{b} = x_1 * x_2 + y_1 * y_2$$

**Проверяем себя**

**Т1. Заполните пропуски:**

а) Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное _____________ длин этих векторов на __________угла между ними.

б) Скалярное произведение векторов $\vec{a}\ \{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{b}\ \{x_2;\ y_2\}$ выражается формулой __________________.

**Т2. Укажите верные утверждения:**

а) Скалярное произведение векторов равно произведению их длин на косинус угла между ними.
б) Длина суммы двух векторов равна сумме их длин.
в) Сумма внутренних накрест лежащих углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равна 180 градусов.

**Т3. Укажите неверные утверждения:**

а) Диагонали прямоугольника равны.

б) Если два вектора перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

в) Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов

**Решаем задачи**

**№1**

а) Сторона ромба LMNP равна 7 см, $\angle$N=60º. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{LM}$ и $\overline{LP}$.
б) Сторона ромба LMNP равна 5 см, $\angle$N=60º. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{LM}$ и $\overline{LP}$.
в) Сторона ромба LMNP равна 12 см, $\angle$N=60º. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{LM}$ и $\overline{LP}$.

**№2**

а) В равностороннем треугольнике KLN со стороной 12 проведена медиана KE. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{KE}$ и $\overline{KL}$.

б) В равностороннем треугольнике KLN со стороной 8 проведена медиана KE. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{KE}$ и $\overline{KL}$.
в) В равностороннем треугольнике KLN со стороной 16 проведена медиана KE. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{KE}$ и $\overline{KL}$.

**№3**

а) Даны векторы $\vec{a}$ (3; -2) и $\vec{b}$ (0;1). Найдите скалярное произведение $\vec{a} * \vec{b}$

б) Даны векторы $\vec{a}$ (4; 8) и $\vec{b}$ (-2;1). Найдите скалярное произведение $\vec{a} * \vec{b}$

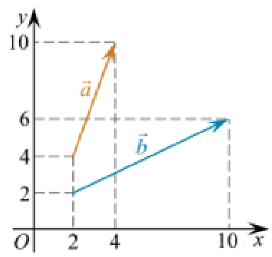
в) Даны векторы $\vec{a}$ (3; -7) и $\vec{b}$ (-4;9). Найдите скалярное произведение $\vec{a} * \vec{b}$

**№4**

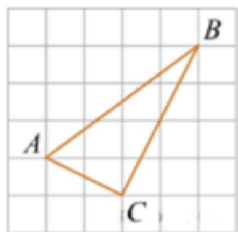
а) Длина вектора $\vec{a}$ равна $2\sqrt{2}$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45°, а скалярное произведение $\vec{a} * \vec{b}$ равно 12. Найдите длину вектора $\vec{b}$.
б) Длина вектора $\vec{a}$ равна $2\sqrt{2}$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45°, а скалярное произведение $\vec{a} * \vec{b}$ равно 28. Найдите длину вектора $\vec{b}$.
в) Длина вектора $\vec{a}$ равна $2\sqrt{2}$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45°, а скалярное произведение $\vec{a} * \vec{b}$ равно 30. Найдите длину вектора $\vec{b}$.

**№5**

а) Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.




б) На клетчатой бумаге с размером клетки $1 \times 1$ изображен треугольник $ABC$. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.




**№6**

а) Даны векторы $\vec{m}$ (2;-3), $\vec{n}$ (-2;1), $\vec{l}$ (2;3) и $\vec{s}$ (2;-6). Найдите скалярное произведение $(\vec{m} - \vec{n}) \cdot (\vec{l} - \vec{s})$.
б) Даны векторы $\vec{m}$ (4;-6), $\vec{n}$ (-4;2), $\vec{l}$ (4;6) и $\vec{s}$ (4;-12). Найдите скалярное произведение $(\vec{m} - \vec{n}) \cdot (\vec{l} - \vec{s})$.

в) Даны векторы $\vec{m}$ (-2;7), $\vec{n}$ (1;-3), $\vec{l}$ (-2;5) и $\vec{s}$ (2;6). Найдите скалярное произведение $(\vec{m} - \vec{n}) \cdot (\vec{l} - \vec{s})$.

**Задача с развернутым ответом**

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро равно 5. На ребрах $AA_1$ и $A_1C_1$ выбраны точки $M$ и $N$ соответственно так, что $AM = A_1N = 2$.

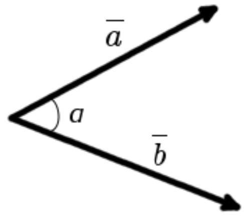
а) Докажите, что прямые $BM$ и $MN$ перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями $BMN$ и $ACC_1$.

## Занятие 32. Угол между векторами

Углом между двумя векторами, отложенными от одной точки, называется кратчайший угол, на который нужно повернуть один из векторов вокруг своего начала до положения сонаправленности с другим вектором.

Косинус угла между векторами равен скалярному произведению векторов, поделенному на произведение модулей векторов.




Формула вычисления угла между векторами $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

**Проверяем себя**

**Т1. Заполните пропуски:**

а) Углом между двумя векторами, отложенными от одной _______, называется кратчайший угол, на который нужно повернуть один из _________вокруг своего начала до положения ____________с другим вектором.
б) Косинус угла между векторами равен скалярному ____________векторов, поделенному на произведение _______ векторов.

**Т2. Укажите верные утверждения:**

а) Произведение вектора на число 0 равно нулю.

б) Сонаправленные векторы равны.

в) Косинус угла между векторами равен скалярному произведению векторов, поделенному на произведение модулей векторов.

**Т3. Укажите неверные утверждения:**

а) Сумма двух векторов это число

б) Формула вычисления угла между векторами $\cos a = \vec{a} * \vec{b}$.

в) Сонаправленные векторы равны, если их длины равны.

**Решаем задачи**

**№1**

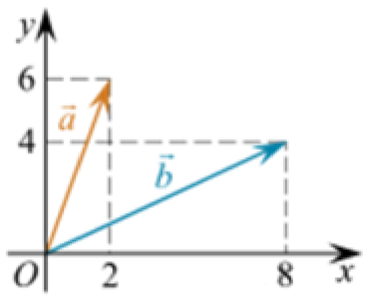
а) Даны векторы $\vec{a}$ (3;4) и $\vec{b}$ (-4;-3) Найдите косинус угла между ними.

б) Даны векторы $\vec{a}$ (6;8) и $\vec{b}$ (-8;-6) Найдите косинус угла между ними.

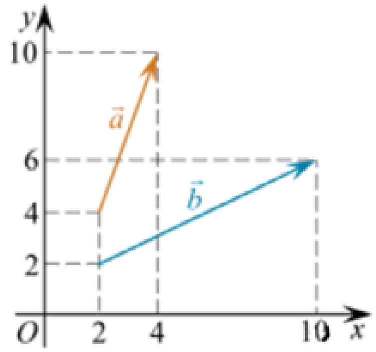
в) Даны векторы $\vec{a}$ (-5;5) и $\vec{b}$ (5;-5) Найдите косинус угла между ними.

**№2**

а) Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ответ дайте в градусах.



б) Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ответ дайте в градусах.




**№3**

а) В треугольнике с вершинами в точках A(2;8) , B (-1;5) и C (3;1). Найдите косинус угла A.

б) В треугольнике с вершинами в точках A(4;8) , B (-1;3) и C (3;1). Найдите косинус угла A.

в) В треугольнике с вершинами в точках A(-4;8) , B (2;14) и C (4;0). Найдите косинус угла C.

**№4**

а) В треугольнике с вершинами в точках A(2;4) , B (2;8) и C (6;4). Найдите угол A.

б) В треугольнике с вершинами в точках A(8;2) , B (4;2) и C (6;4). Найдите угол A.

в) В треугольнике с вершинами в точках A(6;4) , B (8;2) и C (8;6). Найдите угол A.

**№5**

а) В четырёхугольникеABCD с вершинами в точках A(3;3), B(1;5), C(4,5;5,5) и D (6;2) найдите угол между диагоналями. Ответ дайте в градусах.

б) В четырёхугольникеABCD с вершинами в точках A(-3;-2), B(2;-3), C(9;6) и D (4;7) найдите угол между диагоналями. Ответ дайте в градусах.

**Задача с развернутым ответом**

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны рёбра: $AB = 4\sqrt{2}$, $AA_1 = 4$. Точка $M$ — середина ребра $BC$.

а) Докажите, что прямые $B_1C$ и $C_1M$ перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямой $C_1M$ и плоскостью грани $ABB_1A_1$.

## Занятие 33. Проверочная работа

**Вариант 1**

1) Радиус основания цилиндра равен 5, а высота цилиндра равна 6. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 от неё.

2) Радиус шара равен 17. Найдите площадь сечения шара, удаленного от его центра на 15.

3) Радиус основания конуса равен 3, а высота 4. Найдите образующую и площадь осевого сечения.

4) Образующая конуса равна 6, высота 3. Найдите объем конуса.

5) Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $2\sqrt{2}$. Найдите объем цилиндра.

6) Диаметр шара равен высоте конуса, образующая которого составляет с плоскостью основания угол, равный 60°. Найдите отношение объемов конуса и шара.

7) Объем цилиндра равен $96\pi$, площадь его осевого сечения 48. Найдите площадь сферы, описанной около цилиндра.

**Вариант 2**

1) Высота цилиндра 8, радиус основания 5. Цилиндр пересечен плоскостью параллельно оси так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси цилиндра.

2) Радиус сферы равен 15. Найдите длину окружности сечения, удаленного от центра сферы на 12.

3) Образующая конуса равна 4 и наклонена к плоскости основания под углом в 30º. Найдите высоту конуса и площадь осевого сечения.

4) Образующая конуса, равная 12, наклонена к плоскости основания под углом 30º. Найдите объем конуса.

5) Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $8\sqrt{2}$. Найдите объем цилиндра.

6) Диаметр шара равен высоте цилиндра, осевое сечение которого есть квадрат. Найдите отношение объемов шара и цилиндра.

7) В конус, осевое сечение которого есть правильный треугольник, вписан шар. Найдите отношение площади сферы к площади боковой поверхности конуса.

## Занятие 34. Итоговое занятие.

**Пример 1**. Через диагональ нижнего и вершину верхнего основания правильной четырехугольной призмы проведена плоскость, пересекающая две смежные боковые грани призмы по прямым, угол между которыми равен $\alpha$. Определить объем призмы, если ребро ее основания равно $a$.

**Пример 2**. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости основания под углом $\alpha$ и удалено от середины противоположной стороны основания на расстояние $b$. Определить объем пирамиды.

**Пример 3**. Два конуса имеют общее основание, причем один из них находится внутри другого. Образующие этих конусов составляют с плоскостью основания $\alpha$ и $\beta$ ($\alpha > \beta$). Определить объем тела, заключенного между боковыми поверхностями этих конусов, если известно, что сумма высот обоих конусов $m$.

**Пример 4**. В конус вписан шар. Отношение объема конуса к объему вписанного шара равно $\frac{9}{4}$. Найти угол между образующей и плоскостью конуса.

**Пример 5**. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса $R$.

**Проверяем себя**

**Т1**. Заполните пропуски:

а) Если прямая _____________, то она перпендикулярна этой плоскости.

б) Если проекция наклонной перпендикулярна прямой на плоскости, то

_________________________________________________________________.

**Т2.** Укажите верное утверждение:

а) если одна из параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то другая прямая параллельна этой плоскости;

б) если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то их линия пересечения параллельна этой плоскости;

в) углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и ее проекцией на эту плоскость.

**Т3.** Укажите неверное утверждение:

а) отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны;

б) все линейные углы двугранного угла различны;

в) угол между двумя плоскостями равен углу между перпендикулярным им прямым.

**Решаем задачи**

**№1**

Найти объем прямоугольного параллелепипеда, если стороны его основания равны 3 и 4, а диагональ параллелепипеда равна $5\sqrt{2}$.

**№2**

Найти объем прямой призмы, если площадь ее боковой поверхности равна 3, в основании лежит параллелограмм со сторонами 3 и 4, а угол между ними равен $\frac{\pi}{6}$.

**№3**

Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом 60°, угол между меньшей диагональю ромба и меньшей диагональю призмы равен 30°. Определить объем призмы, если меньшая диагональ ромба равна d.

**№4**

Найти объем правильной треугольной призмы, если сторона ее основания равна 4, а угол между диагоналями боковых граней, исходящими из одной вершины, равен arccos 0,68.

**№5**

Найти угол наклона бокового ребра правильной треугольной пирамиды к ее основанию, если высота пирамиды и сторона основания равны 2.

**№6**

В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 6, 8 и 10. Боковые ребра пирамиды образуют с основанием углы по 45°. Найти объем пирамиды.

**№7**

Найти площадь сечения правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания перпендикулярно боковому ребру, если сторона основания равна $\sqrt{3}$, а боковое ребро равно *2*.

**№8**

Найти площадь сечения правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через середину высоты пирамиды параллельно боковой грани, если сторона основания равна 12, а высота пирамиды равна $2\sqrt{6}$.

**№9**

Площади сечений параллельных оси цилиндра, находящихся по одну сторону от оси, равны 120 и 160. Радиус и высота цилиндра равна 10. Найдите расстояние между плоскостями сечений.

**№10**

Высота цилиндра равна 3. Равнобедренный треугольник $ABC$ с боковой стороной 10 углом $\angle \text{A} = 120°$ расположен так, что его вершина $A$ лежит на окружности нижнего основания цилиндра, а вершины $B$ и $C$ – на окружности верхнего основания. Найдите синус угла между плоскостью $ABC$ и плоскостью цилиндра.

**№11**

В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 10. Боковые ребра равны $\frac{6}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

**№12**

Площадь развертки боковой поверхности цилиндра равна 30, высота цилиндра $\frac{3}{\pi}$. Найдите объем цилиндра.

**№13**

Высота конуса равна диаметру его основания. Найти отношение площади основания к боковой поверхности конуса.

**№14**

Равнобедренный треугольник с основанием $\frac{9}{\pi}$ и высотой $7\sqrt{2}$ вращается вокруг основания. Найти объем фигуры вращения.

**№15**

Развертка боковой поверхности конуса представляет собой четверть круга радиуса 4. Найти площадь основания конуса. Ответ:

**№16**

Отношение объема усеченного конуса к объему вписанного в него шара равно $\frac{13}{6}$. Найти угол между образующей конуса и его основанием.

# Список использованных источников

## Литература

1. Геометрия: 10-11 классы: учебник для общеобразовательных организаций. / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. М: «Просвещение», 2024.

2. Ерина Т.М. ЕГЭ 2022. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Практическое руководство / Т.М. Ерина – Издательство «Экзамен», 2022. – 350, [2] с. (Серия «ЕГЭ. 100 баллов») - ISBN 978-5-377-17289-8

3. Потоскуев Е.В. ЕГЭ 2022. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Опорные задачи по геометрии. Планиметрия. Стереометрия / Е.В. Потоскуев. М.: Издательство «Экзамен», 2022 – 223, [1] с. (Серия «ЕГЭ.100 баллов») – ISBN 978-5-377-17259-8

4. Мордкович А.Г., Глизбург В.И., Лаврентьев Н.Ю. Математика. Новый полный справочник школьника для подготовки к ЕГЭ. «Образовательные проекты». - ISBN 978-5-17-139154-6.

5. Ященко И.В., Шестаков С.А. Я сдам ЕГЭ! Математик. Геометрия. Типовые задания. Москва, издательство «Просвещение» 2018. - ISBN 978-5-09-056027.

6. Лысенко, Ф.Ф. Математика. 10-11 класс. Тренажёр для подготовки к ЕГЭ. Алгебра, планиметрия, стереометрия / Ф.Ф. Лысенко. М.: Легион, 2014. – 876 с.

## Интернет-ресурсы


1. ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений» Открытый банк заданий ОГЭ по математике https://fipi.ru/oge/otkrytyy-bank-zadaniy-oge#!/tab/173942232-2
2. ФГБУ «Федеральный институт оценки качества образования» образцы и описания проверочных работ для проведения ВПР в 2021 году https://fioco.ru.
3. Открытый банк задач ЕГЭ по Математике (базовый и профильный уровни) (https://base.mathege.ru/, https://prof.mathege.ru/).
4. История возникновения синуса https://multiurok.ru/blog/istoriia-vozniknoveniia-sinusa.html
5. Образовательный портал для подготовки к экзаменам https://ege.sdamgia.ru/
6. Видео уроки https://videouroki.net/tests/tiest-po-tiemie-paralliel-nost-priamykh-i-ploskostiei-variant-4.html
7. Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ по математике https://math100.ru
8. Inter урок https://interneturok.ru
9. Статья Wikipedia – Цилиндр https://ru.wikipedia.org/wiki/Цилиндр
10. Лицей Ростелеком wikipedia https://lc.rt.ru/classbook/matematika-10-klass/stereometriya-90/706

*Учебное пособие*

# Практикум по геометрии
# 11 класс

Формат бумаги 60x84/8. Усл. печ. л. 17.32 Тираж 100 экз.
Отпечатано: 350080, г. Краснодар, ул. Сормовская, 167,
ГБОУ ИРО Краснодарского края
Информационно-издательский ресурсный центр