МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЕЖНОЙ ПОЛИТИКИ
КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ» КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ПРАКТИКУМ ПО ГЕОМЕТРИИ 10 КЛАСС

Учебное пособие

Краснодар
2024

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЕЖНОЙ ПОЛИТИКИ
КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
Государственное бюджетное образовательное учреждение
дополнительного профессионального образования
«Институт развития образования»
Краснодарского края

ПРАКТИКУМ ПО ГЕОМЕТРИИ 10 КЛАСС

Учебное пособие

Краснодар, 2024

УДК 372.851
ББК 74.262.21
П 31

Рекомендовано к изданию решением редакционно-издательского совета ГБОУ ИРО Краснодарского края протоколом № 3 от 21.08.2024 г.

Рецензенты:
Васильева Ирина Викторовна, доцент кафедры функционального анализа и алгебры КубГУ, к.п.н.
Власова Александра Анатольевна, старший преподаватель кафедры математики, информатики и технологического образования ГБОУ ИРО Краснодарского края.

П 31 Практикум по геометрии, 10 класс: учебно-методическое пособие/ под ред. О.В. Задорожной, К.А. Кузьминой. – Краснодар : ГБОУ ИРО Краснодарского края. 2024. – 154 с.

Авторы-составители:
Белай Е.Н., Борейко А.С., Борщакова Е.Н., Волкова О.А., Голинченко О.Н., Задорожная О.В., Кузьмина К.А., Кобецкая Н.А., Костюченко А.С., Еременко О.Н., Пенькова А.Н., Попова И.Н., Прошина Е.А., Роговая МА., Рубенкова О.С., Татаркина О.А., Ткачева Е.В., Чередниченко И.В., Шакитько О.И.

Данное пособие входит в учебно-методический комплект для преподавания элективного курса для обучающихся 10-х классов «Практикум по геометрии» и предназначено для обучающихся.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От авторов

Дорогой десятиклассник!

Ты держишь в руках учебное пособие к курсу «Практикум по геометрии», которое поможет тебе научиться решать различные задачи, хорошо подготовиться к итоговой аттестации по математике. В этом пособии собран краткий теоретический материал, задачи на проверку теоретических знаний и практических умений по геометрии базового и повышенного уровня сложности.

Номера заданий на проверку теоретических знаний обозначены (Т1), номера заданий повышенного уровня сложности подчеркнуты (<u>12</u>). В конце пособия расположен список использованных источников (пособия и интернет-ресурсы).

Мы надеемся, что занятия курса «Практикум по геометрии» будут для тебя интересными и полезными. Желаем успехов в изучении геометрии!

Раздел 1. Повторение планиметрии

Занятие 1. Треугольники

Повторяем теорию

Треугольник – фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки.

Теорема об углах треугольника: сумма углов треугольника равна 180^0.

Внешний угол треугольника: это угол, смежный с любым углом треугольника.

Свойство: внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

Неравенство треугольника: любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон и больше их разности.

Треугольник, все три стороны которого равны, называется *правильным* (*равносторонним*) треугольником (Рис.1).

Пусть a, h, S, R, r – соответственно длина стороны, высота, площадь, радиус описанной и радиус вписанной окружности правильного треугольника. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}, S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}, R=\frac{a}{\sqrt{3}},$$
$$r=\frac{a}{2\sqrt{3}}, r=\frac{1}{3}h, R=\frac{2}{3}h,$$
$$R=2r, r+R=h$$

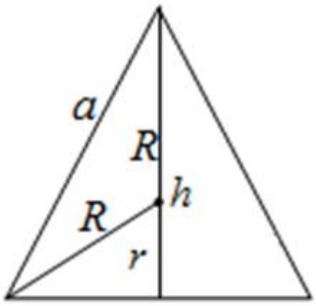


Рис.1

Треугольник называется *равнобедренным*, если две его стороны равны. Равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона – *основанием* равнобедренного треугольника. Высота, медиана и биссектриса равнобедренного треугольника, проведенные к его основанию, совпадают. Углы при основании равнобедренного треугольника равны. Высоты (медианы, биссектрисы), проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника равны.

Если один из углов треугольника прямой, то треугольник называется *прямоугольным* (Рис. 2). В прямоугольном треугольнике сторона, лежащая против прямого угла, называется *гипотенузой*, а две другие стороны называются *катетами* этого треугольника.

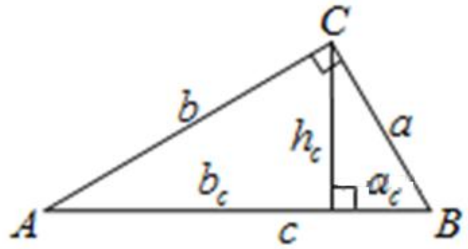


Рис. 2

Свойства прямоугольного треугольника

1) сумма острых углов равна 90^0;

2) катет, лежащий против угла в 30^0, равен половине гипотенузы;

3) если катет равен половине гипотенузы, то он лежит напротив угла в 30^0;

4) медиана, проведенная к гипотенузе равна ее половине.

Обозначим через c гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC, через a_c и b_c – проекции катетов a и b на гипотенузу AB, а через h_c – высоту, проведенную из вершины прямого угла C этого треугольника. Тогда имеют место следующие соотношения:

$a^2 = c \cdot a_c$ (катет равен среднему геометрическому гипотенузы и своей проекции на неё).

$b^2 = c \cdot b_c$ (катет равен среднему геометрическому гипотенузы и своей проекции на неё).

$h_c^2 = a_c \cdot b_c$ (высота, проведенная к гипотенузе, равна среднему геометрическому проекций катетов на гипотенузу).

$$a^2 + b^2 = c^2,\ h_c = \frac{ab}{c},\ \sin A = \frac{a}{c},\ \cos A = \frac{b}{c},\ tgA = \frac{a}{b},\ ctgA = \frac{b}{a}.$$

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется *средней линией* треугольника.

Средняя линия треугольника параллельна одной из сторон треугольника и равна ее половине. Средняя линия отсекает треугольник, который подобен данному, а его площадь равна одной четвёртой площади исходного треугольника. Три средние линии треугольника делят его на 4 равных треугольника (Рис. 3).

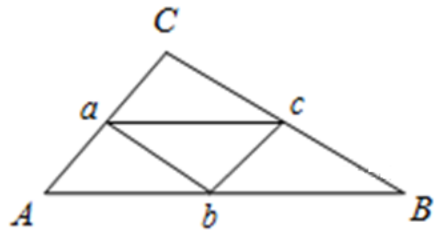


Рис. 3

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется *медианой* треугольника. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, и точка пересечения делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины. Медиана разбивает треугольник на два треугольника одинаковой площади.

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется *биссектрисой* треугольника. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (*центре вписанной окружности*). Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника. Биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника перпендикулярны. От любой точки, лежащей на биссектрисе угла, расстояния до сторон угла равны.

Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника, на прямую, содержащую противоположную сторону, называется *высотой* треугольника (Рис. 4). Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

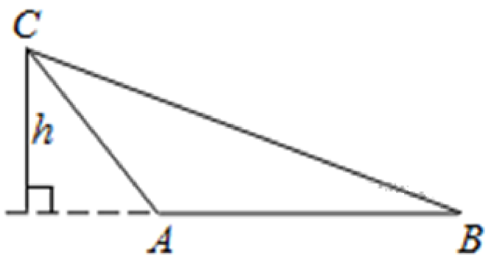


Рис. 4

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (*центре описанной окружности*).

Теорема косинусов: квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, уменьшенной на удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Теорема синусов: если в треугольнике против сторон a, b, c лежат углы α, β, γ соответственно, то $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, где R – радиус окружности, описанной около треугольника.

Проверяем себя

Т1. Какие из перечисленных утверждений всегда верны:

1) Все углы треугольника острые.

2) Все высоты равностороннего треугольника равны.

3) Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен половине гипотенузы.

4) Гипотенуза меньше любого из катетов.

5) Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90^0.

6) В прямоугольном треугольнике против угла в 60^0лежит катет, равный половине гипотенузы.

7) Точка пересечения медиан лежит внутри треугольника.

8) В треугольнике квадрат любой стороны равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

9) Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

10) Внешний угол треугольника равен углу этого треугольника, смежного с ним.

Т2. Укажите неверные утверждения:

1) Любая биссектриса равнобедренного треугольника является его медианой.

2) Центры вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника совпадают.

3) В тупоугольном треугольнике все углы тупые.

4) Сумма углов любого треугольника равна 180°.

5) Треугольника со сторонами 1, 2, 4 не существует.

6) Медианой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.

7) Около всякого треугольника можно описать не более одной окружности.

8) В любой треугольник можно вписать не менее одной окружности.

Т3. Заполните пропуски:

а) Если две стороны треугольника равны, то его называют _______________ треугольником.

б) В разностороннем треугольнике все три стороны имеют _____ длину.

в) Треугольник называют прямоугольным, если один из углов треугольника ________________.

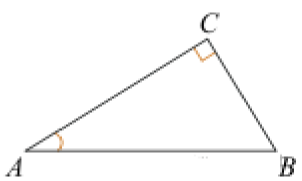
г) В равностороннем треугольнике все углы ______________

д) Чтобы вычислить периметр треугольника, нужно __________________.

е) Периметр ________________ треугольника вычисляется по формуле P=3a, где a – ______________.

Решаем задачи

1. а) В треугольнике ABC угол C равен 90°, AC=4,8; $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите AB.



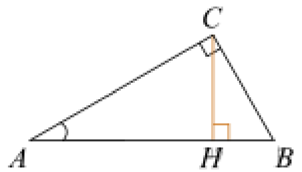
б) В треугольнике ABC угол C равен 90°, AC= 4, $cosA$=0,5. Найдите AB.

в) В треугольнике ABC угол C равен 90°, AC=8, tgA=0,5. Найдите BC.

2. а) В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, AB=13, tgA=5. Найдите BH.

б) В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, BC=8, $sinA$=0,5. Найдите BH.

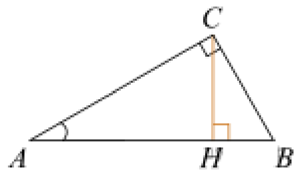
в) В треугольнике ABC угол C равен 90^0, BC=8, $cosA$=0,5. Найдите CH.



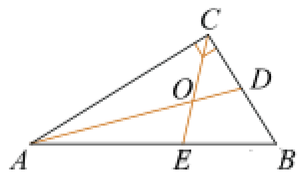
3.а) В треугольнике ABC угол C равен 90^0, высота CH равна 4, $BC=\sqrt{17}$. Найдите tgA.

б) В треугольнике ABC угол C равен 90^0, высота CH равна 24, BH=7. Найдите $sinA$.

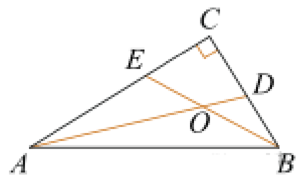
в) В треугольнике ABC угол C равен 90°, высота CH равна 7, BH=24. Найдите $cosA$.



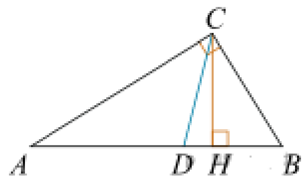
4. а) Острый угол прямоугольного треугольника равен 32°. Найдите острый угол, образованный биссектрисами этого и прямого углов треугольника. Ответ дайте в градусах.



б) Найдите острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.



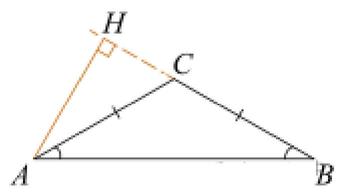
в) Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен 61^0. Найдите угол между высотой CH и биссектрисой CD, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



5. а) В тупоугольном треугольнике ABC $AC=BC$=8, высота AH равна 4. Найдите $sin\ ACB$.

б) В тупоугольном треугольнике ABC $AC=BC$=25, высота AH равна 20. Найдите $cos\ ACB$.

в) В тупоугольном треугольнике ABC $AC=BC=4\sqrt{5}$, высота AH равна 4. Найдите $tg\ ACB$.

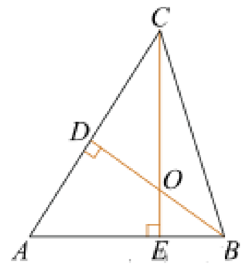


6. а) В треугольнике *ABC* *AC*=*BC*, угол *C* равен 52^0. Найдите внешний угол *CBD*. Ответ дайте в градусах.

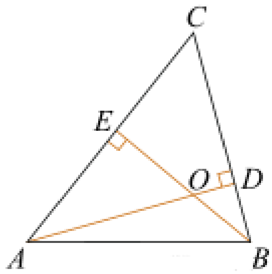
б) В треугольнике *ABC* *AC*=*BC*. Внешний угол при вершине *B* равен 122^0. Найдите угол *C*. Ответ дайте в градусах.

в) В треугольнике *ABC* *AB*=*BC*. Внешний угол при вершине *B* равен 138^0. Найдите угол *C*. Ответ дайте в градусах.

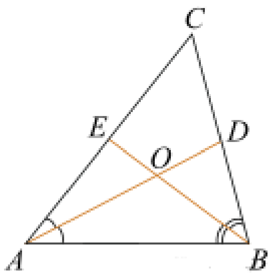
7. а) В остроугольном треугольнике *ABC* угол *A* равен 65^0. *BD* и *CE* – высоты, пересекающиеся в точке *O*. Найдите угол *DOE*. Ответ дайте в градусах.



б) Два угла треугольника равны 58^0 и 72^0. Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.



в) В треугольнике *ABC* угол *C* равен 58^0, *AD* и *BE* – биссектрисы, пересекающиеся в точке *O*. Найдите угол *AOB*. Ответ дайте в градусах.



Задачи с развернутым ответом

8. В равнобедренном треугольнике *ABC* с углом 120^0 при вершине *A* проведена биссектриса *BD*. В треугольник *ABC* вписан прямоугольник *DEFH* так, что сторона *FH* лежит на отрезке *BC*, а вершина *E* – на отрезке *AB*.

а) Докажите, что *FH*=2*DH*.

б) Найдите площадь прямоугольника *DEFH*, если *AB*=4.

Занятие 2. Пропорциональность отрезков и площадей. Подобие

Повторяем теорию

Отношением отрезков AB и CD называется отношение их длин.

Говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, если выполняется равенство $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$.

Два треугольника называются *подобными*, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, если:

1) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$;

2) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$.

Число k – коэффициент подобия (показывает во сколько раз стороны одного треугольника больше сторон другого треугольника)

Признаки подобия треугольников:

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.
2. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между ними равны, то такие треугольники подобны.
3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Отношение отрезков и площадей в треугольнике:

- Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.
- Периметры подобных треугольников и их линейные величины (медианы, биссектрисы, высоты) относятся друг к другу как коэффициент подобия k.
- Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.
- Три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.
- Параллельные прямые отсекают на сторонах угла (на двух прямых) пропорциональные отрезки (обобщенная теорема Фалеса).
- Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.

- Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.
- Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.
- Площади треугольников, имеющих равные основания и равные высоты, равны.
- Отношение площадей треугольников, имеющих равные высоты равно отношению их оснований.

Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам $a:c=b:d$ (Рис. 5).

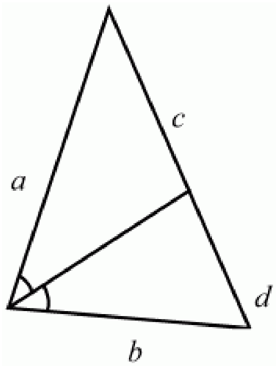


Рис. 5

Точка пересечения биссектрис делит биссектрису угла C в отношении $\frac{a+b}{c}$ (Рис. 6).

$$\frac{CO}{OD}=\frac{a+b}{c}$$

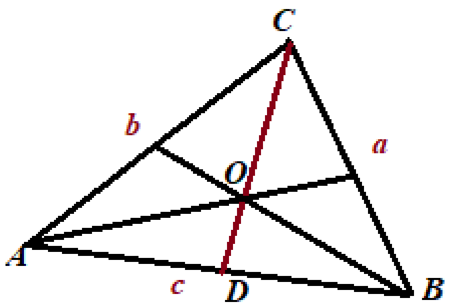


Рис. 6

Теорема о пропорциональных отрезках

Параллельные прямые отсекают на секущих пропорциональные отрезки (Рис. 7).

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\frac{A_1A_3}{B_1B_3}.$$

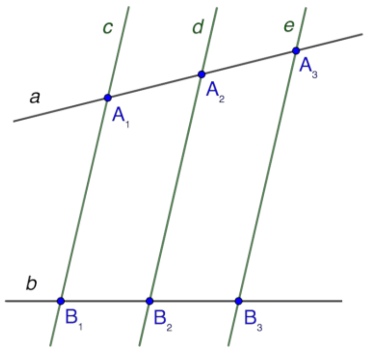


Рис. 7

Теорема Менелая

Пусть точка A_1 лежит на стороне BC треугольника ABC, точка C_1 – на стороне AB, точка B_1 – на продолжении стороны AC за точку C (Рис. 8). Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

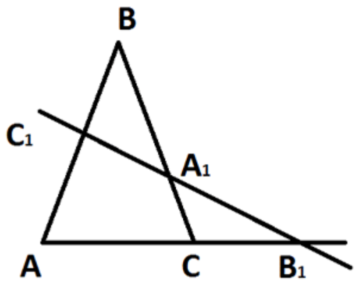


Рис. 8

Теорема Чевы

Пусть в треугольнике ABC точка A_1 лежит на стороне BC, точка B_1 – на стороне AC, точка C_1 – на стороне AB (Рис. 9). Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.$$

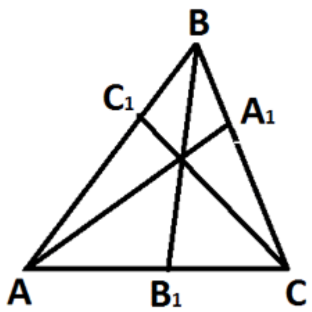


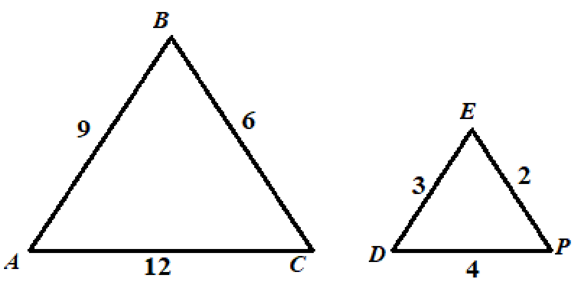
Рис. 9

<u>Проверяем себя</u>

Т4. Установите соответствие между понятиями и определениями.

А. Медиана треугольника		1. Это луч, выходящий из вершины угла и делящий его пополам
Б. Биссектриса угла		2. Это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны
В. Высота треугольника		3. Это отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной стороне
		4. Это перпендикуляр, опущенный из вершины угла на прямую, содержащую противоположную сторону

Т5. Установите по рисунку, верно ли данное утверждение: $\Delta ABC \sim \Delta DEP$



Т6. Укажите условия, при которых ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ были бы подобны по третьему признаку:

а) $\angle A = \angle A_1; \angle B = \angle B_1$; в) $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$;

б) $\angle A = \angle A_1; \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$; г) $\angle C = \angle C_1; \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$.

Т7. У треугольников *ABC* и *DEF* равны углы *A* и *D*. Какого условия не достает для того, чтобы утверждать, что эти треугольники подобны по первому признаку:

а) $\angle C = \angle F; \angle B = \angle E$; б) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$;

в) $\angle B = \angle E$; г) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$.

Т8. В треугольниках *ABC* и *MNK* $\angle A = 50^0, \angle B = 70^0, \angle C = 60^0, \angle M = 70^0, \angle K = 60^0$. Чему равен угол *N*?

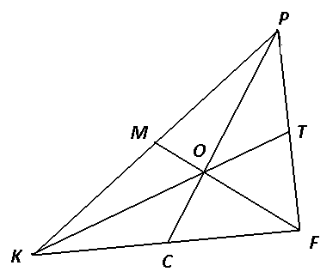
а)50^0; б)60^0; в)70^0.

Т9. Средняя линия треугольника ______________________ одной из его сторон и равна __________________________.

Т10. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении __________________, считая от ______________.

Решаем задачи

9. а) Дан треугольник *KPF*, в котором *KT*, *PC* и *FM* – медианы. Найдите *CO*, если *OP*=10 см.



б) Дан треугольник KPF, в котором *KT, PC* и *FM* – медианы. Найдите *MO,* если *OF=8* см.

в) Дан треугольник KPF, в котором *KT*, *PC* и *FM* – медианы. Найдите *TO,* если *OK=6* см.

10. а) На стороне BC треугольника ABC отмечена точка M так, что $BM:MC=3:10$. В каком отношении отрезок AM делит медиану BK треугольника ABC?

б) На стороне AB треугольника ABC отмечена точка M так, что $AM:MB=4:3$. В каком отношении медиана BK делится отрезком CM?

в) На стороне AB треугольника ABC отмечена точка M так, что $AM:MB=4:3$. В каком отношении медиана BK делит отрезок CM?

11. а) Основания трапеции равны 12 см и 22 см. найдите отрезки, на которые диагонали трапеции делят её среднюю линию.

б) Основания трапеции равны 18 см и 26 см. найдите отрезки, на которые диагонали трапеции делят её среднюю линию.

в) Основания трапеции равны 15 см и 27 см. найдите отрезки, на которые диагонали трапеции делят её среднюю линию.

12. а) Биссектриса BD делит сторону AC треугольника ABC на отрезки $AD=7$ см и $CD=10{,}5$ см, $AB=9$ см. Чему равен периметр треугольника ABC?

б) Биссектриса BD делит сторону AC треугольника ABC на отрезки $AD=8$ см и $CD=12$ см, $AB=10$ см. Чему равен периметр треугольника ABC?

в) Биссектриса BD делит сторону AC треугольника ABC на отрезки $AD=6$ см и $CD=9$ см, $AB=8$ см. Чему равен периметр треугольника ABC?

13. а) Периметр треугольника равен 70 см, две его стороны равны 24 см и 32 см. Найдите отрезки, на которые биссектриса треугольника делит его третью сторону.

б) Периметр треугольника равен 35 см, две его стороны равны 12 см и 16см. Найдите отрезки, на которые биссектриса треугольника делит его третью сторону.

в) Периметр треугольника равен 40 см, две его стороны равны 15 см и 9см. Найдите отрезки, на которые биссектриса треугольника делит его третью сторону.

14. а) В треугольнике ABC на стороне BC взята точка N так, что $NC=3BN$; на продолжении стороны AC за точку А взята точка M так, что $MA=AC$. Прямая MN пересекает сторону AB в точке F. Найдите отношение $\frac{BF}{FA}$.

б) На стороне PQ треугольника PQR взята точка N, а на стороне PR – точка L, причем NQ=LR. Точка пересечения отрезков QL и NR делит QL в отношении m:n, считая от точки Q. Найдите $\frac{PN}{PR}$.

в) В треугольнике ABC AD – медиана, точка O – середина медианы. Прямая BO пересекает сторону AC в точке K. В каком отношении точка K делит AC, считая от точки A?

Задачи с развернутым ответом

15. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K так, что AK:BK=1:3, а на стороне BC – точка L так, что CL:BL=2:1. Пусть Q – точка пересечения прямых AL и CK. Найти площадь треугольника ABC, если площадь треугольника BQC равна 2.

16. В треугольнике ABC, площадь которого равна 5, на стороне AB взята точка K, делящая эту сторону в отношении AK:BK=2:3, а на стороне AC – точка L, делящая её в отношении AL:AC=5:8. Точка Q пересечения прямых CK и BL удалена от прямой AB на расстояние 1. Найти длину стороны AB.

Занятие 3. Четырехугольники

<u>Повторяем теорию</u>

Четырехугольник – плоская фигура, ограниченная четырехзвенной простой замкнутой ломаной.

Выпуклый четырехугольник – четырехугольник, который лежит по одну сторону от прямой, содержащий любую из его сторон.

Невыпуклый четырехугольник – четырехугольник, который не лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащий хотя бы одну из его сторон.

Четырехугольники можно структурировать по их свойствам (Рис. 10).

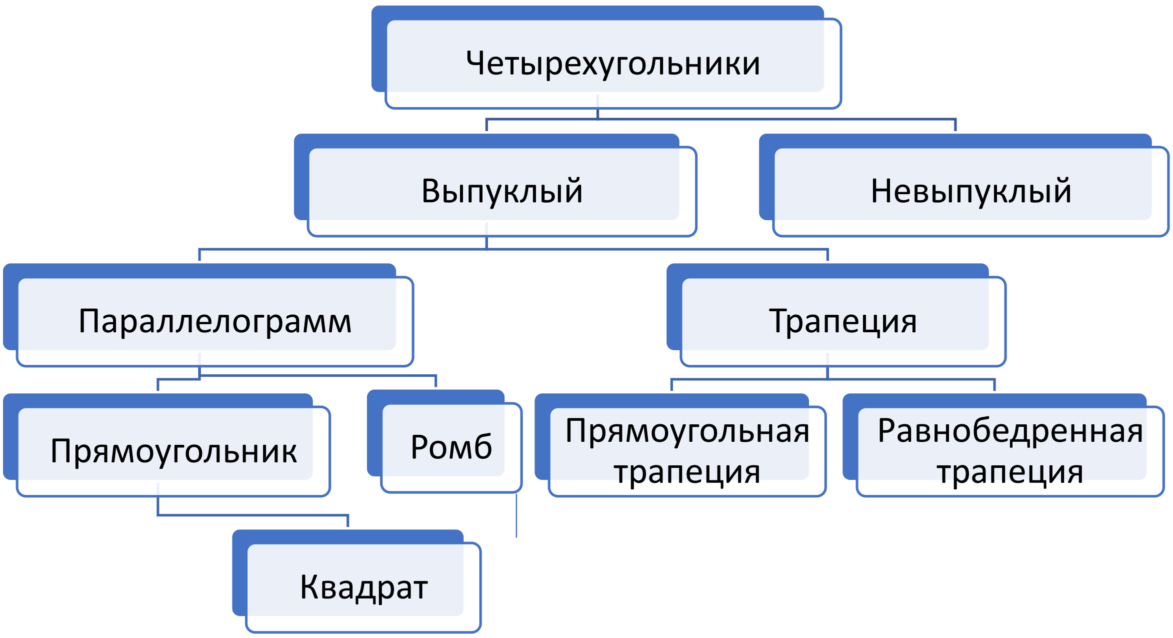


Рис. 10

Параллелограмм – это четырёхугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны

Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые.

Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Квадрат – это параллелограмм, у которого все углы прямые и все стороны равны.

Трапеция – это четырёхугольник, у которого две стороны параллельны (основания), а две другие стороны не параллельны (боковые стороны).

Равнобедренной называют трапецию, у которой боковые стороны равны.

Прямоугольной называют трапецию, у которой одна из боковых сторон перпендикулярна основаниям.

У выпуклого четырехугольника две диагонали, а сумма внутренних углов равна 360^0.

Полезные свойства параллелограмма:

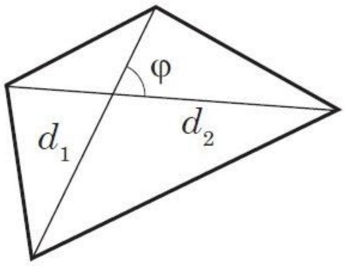
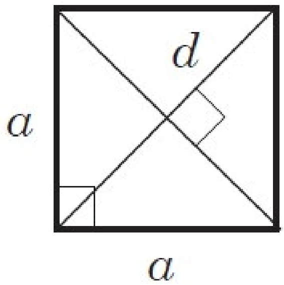
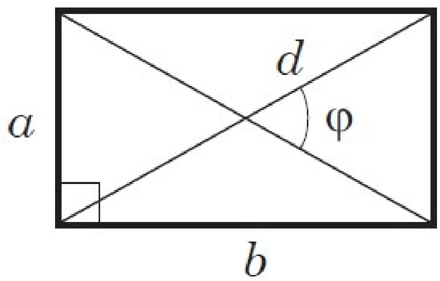
1. Противоположные углы равны.
2. Сумма углов, прилежащих к одной стороне равна 180°
3. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
4. Биссектрисы соседних углов взаимно перпендикулярны.
5. Биссектриса угла отсекает на противоположной стороне отрезок, равный прилежащей стороне.

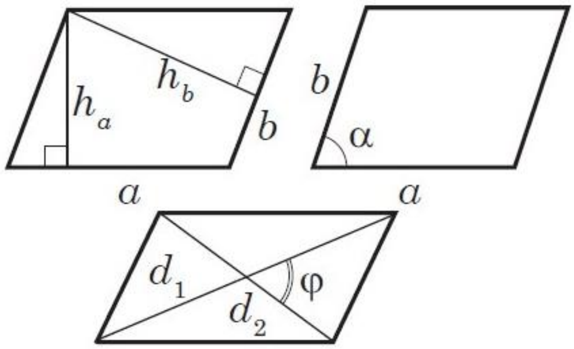
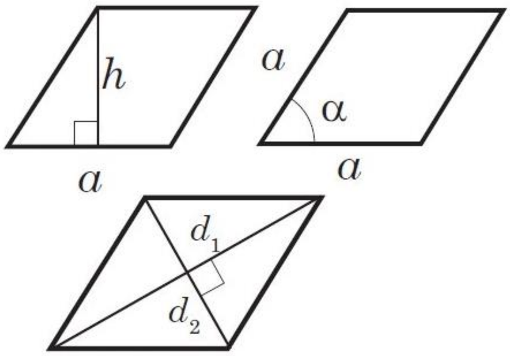
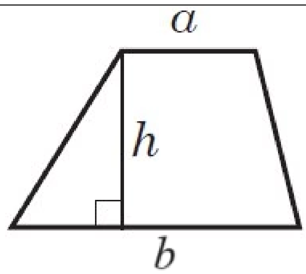
Полезные свойства равнобедренной трапеции:

1. Углы при основаниях равны.
2. Диагонали равны.
3. Если диагонали взаимно перпендикулярны, то высота равна полусумме оснований и равна ее средней линии.

Формулы площадей основных четырехугольников даны в таблице 1.

Таблица 1.

Формулы площадей четырехугольников	
Площадь любого *выпуклого четырёхугольника* равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$	
Площадь квадрата $S = a^2$ $S = \frac{d^2}{2}$	
Площадь прямоугольника $S = ab$ $S = \frac{1}{2} d^2 \sin\varphi$	

Площадь параллелограмма $S = ah_a = bh_b$ $S = ab\sin\alpha$ $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$	
Площадь ромба $S = ah$ $S = a^2 \sin\alpha$ $S = \frac{1}{2}d_1 d_2$	
Площадь трапеции $S = \frac{a+b}{2}h$	

Проверяем себя

Т11. Заполните пропуски:

а) Площадь любого выпуклого четырёхугольника равна ___________ произведения диагоналей на синус угла между ними.

Ответ: половине.

б) Четырехугольник имеет сумму внутренних углов равную ______, имеет две диагонали.

Т12. Укажите верные утверждения:

а) в параллелограмме все углы острые;

б) диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам;

в) биссектрисы соседних углов параллелограмма взаимно перпендикулярны

Т13. Укажите неверные утверждения:

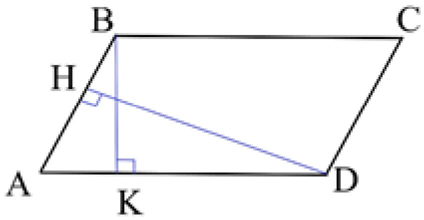
а) в любой трапеции углы при основаниях раны;

б) в равнобедренной трапеции диагонали равны;

в) если диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, то высота равна сумме оснований этой трапеции.

<u>Решаем задачи</u>

17. а) В параллелограмме *ABCD* *AB*=9, *AD*=3, $\sin A = \frac{2}{3}$. Найдите большую высоту параллелограмма.



б) В параллелограмме *ABCD* *AB*=5, *AD*=7, $\sin A = \frac{5}{7}$. Найдите большую высоту параллелограмма.

*Ответ: 5.*в) В параллелограмме *ABCD* *AB*=2, *AD*=3, $\sin A = \frac{1}{3}$ Найдите большую высоту параллелограмма.

18. а) Периметр прямоугольника равен 42, а площадь 90. Найдите большую сторону прямоугольника.

б) Периметр прямоугольника равен 46, а площадь 126. Найдите большую сторону прямоугольника.

в) Периметр прямоугольника равен 48, а площадь 108. Найдите большую сторону прямоугольника.

19. а) Периметр прямоугольника равен 28, а диагональ равна 13. Найдите площадь этого прямоугольника.

б) Периметр прямоугольника равен 84, а диагональ равна 41. Найдите площадь этого прямоугольника.

в) Периметр прямоугольника равен 22, а диагональ равна 10. Найдите площадь этого прямоугольника.

20. а) Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 18.

б) Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 12.

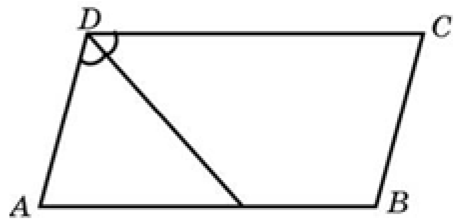
в) Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 24.

21. а) Площадь ромба равна 42. Одна из его диагоналей равна 6. Найдите другую диагональ.

б) Площадь ромба равна 56. Одна из его диагоналей равна 16. Найдите другую диагональ.

в) Площадь ромба равна 38. Одна из его диагоналей равна 4. Найдите другую диагональ.

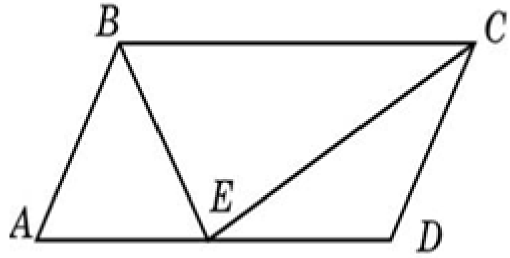
22. а) Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 2:7, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 44.



б) Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 1:3, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 40.

в) Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 5:8, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 126.

23. а) Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 14. Найдите его большую сторону.



б) Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 29. Найдите его большую сторону.

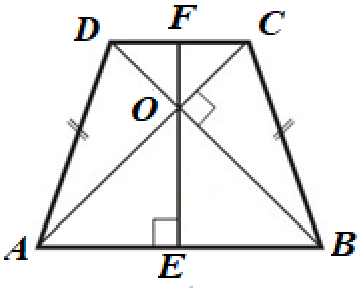
в) Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 31. Найдите его большую сторону.

24. а) Основания равнобедренной трапеции равны 12 и 24, а ее периметр равен 56. Найдите площадь трапеции.

б) Основания равнобедренной трапеции равны 17 и 23, а ее периметр равен 50. Найдите площадь трапеции.

в) Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 20, а ее периметр равен 44. Найдите площадь трапеции.

25. а) В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 18. Найдите ее среднюю линию.



б) В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 21. Найдите ее среднюю линию.

в) В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 26. Найдите ее среднюю линию.

Занятие 4. Правильные многоугольники

<u>Повторяем теорию</u>

Правильный многоугольник – это многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.

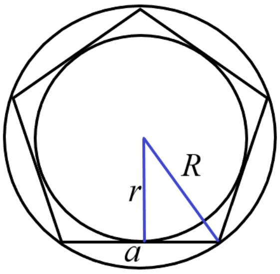
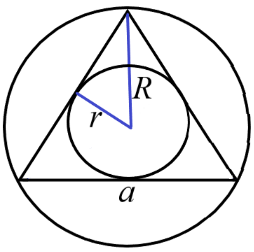
Сумма углов правильного n – угольника равна $(n\text{-}2)\cdot 180^0$.

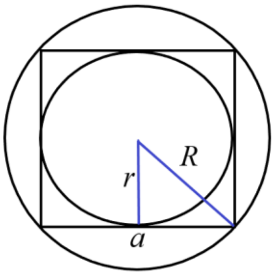
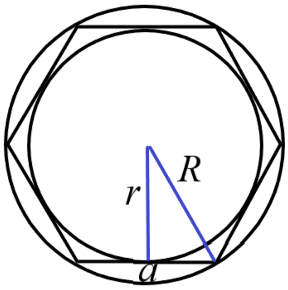
Каждый угол правильного многоугольника равен $\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}$, где n – число сторон (вершин) правильного многоугольника.

Любой правильный многоугольник можно *вписать в окружность* и вокруг любого правильного многоугольника можно *описать окружность*. Вписанная окружность касается всех сторон правильного многоугольника. Описанная окружность проходит через все вершины правильного многоугольника. Центры вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника совпадают. Эту точку называют *центром* правильного многоугольника.

Основные формулы для правильных многоугольников даны в таблице 2.

Таблица 2.

	Правильный многоугольник (n – угольник) $P = na$ $S = \frac{1}{2} P \cdot r$ $a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n}$ $r = R\cos\frac{180^0}{n}$
	Правильный треугольник $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, r = \frac{1}{3}h, R = \frac{2}{3}h$

	Правильный четырехугольник (квадрат) $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ $r = \frac{a}{2}$ $S = a^2$
	Правильный шестиугольник $R = a$ $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$

R – радиус описанной окружности;

r – радиус вписанной окружности;

a_n – сторона правильного многоугольника;

S_n – площадь n-угольника;

P_n – периметр n-угольника.

<u>Проверяем себя</u>

Т14. Заполните пропуски:

а) Многоугольник, у которого равны все стороны и все углы называется ___________

б) Сумма углов правильного пятиугольника равна ______

Т15. Укажите верные утверждения:

а) в правильном треугольнике все углы по 60^0;

б) центры вписанной и описанной окружностей любого многоугольника совпадают;

в) все высоты (биссектрисы, медианы) правильного треугольника равны и точкой пересечения O делятся в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

Т16. Укажите неверные утверждения:

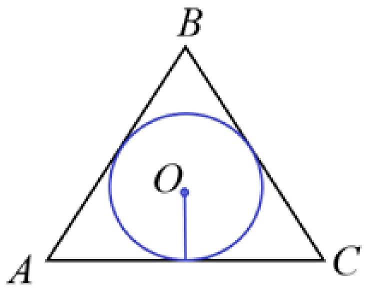
а) ромб является правильным четырехугольником;

б) центром окружности, описанной около квадрата, является точка пересечения его диагоналей;

в) любой правильный многоугольник можно вписать в окружность и вокруг любого правильного многоугольника можно описать окружность.

Решаем задачи

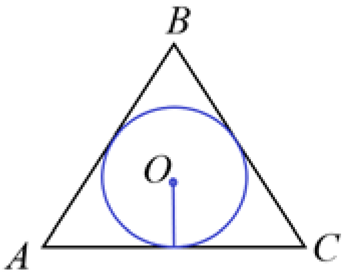
26. а) Сторона правильного треугольника равна $8\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



б) Сторона правильного треугольника равна $38\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

в) Сторона правильного треугольника равна $16\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

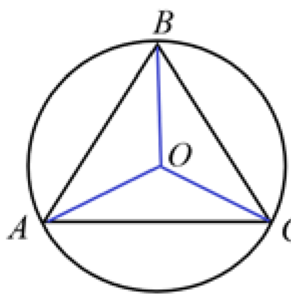
27. а) Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 39.



б) Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 45.

в) Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 84.

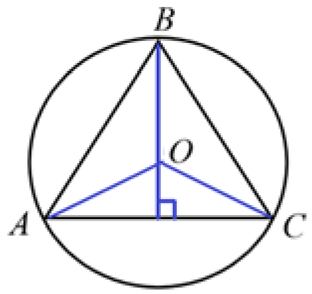
28. а) Сторона правильного треугольника равна $17\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



б) Сторона правильного треугольника равна $41\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

в) Сторона правильного треугольника равна $29\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

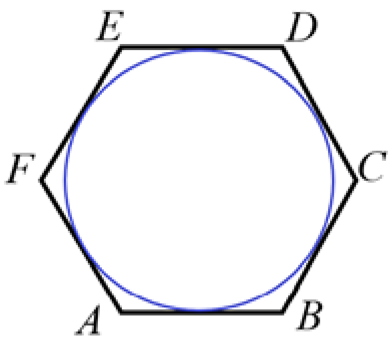
29. а) Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 82. Найдите высоту этого треугольника.



б) Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 76. Найдите высоту этого треугольника.

в) Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 54. Найдите высоту этого треугольника.

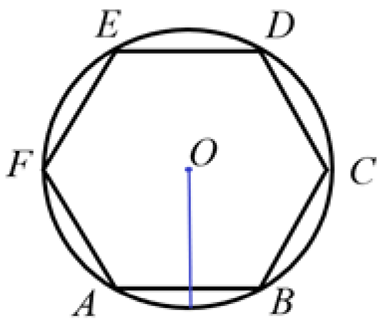
30. а) Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $17\sqrt{3}$.



б) Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $23\sqrt{3}$.

в) Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $14\sqrt{3}$.

31. а) Чему равна сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 12?



б) Чему равна сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 19?

в) Чему равна сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 17?

32. а) Угол между двумя соседними сторонами правильного многоугольника, вписанного в окружность, равен 140°. Найдите число вершин многоугольника.

б) Угол между двумя соседними сторонами правильного многоугольника, вписанного в окружность, равен 108°. Найдите число вершин многоугольника.

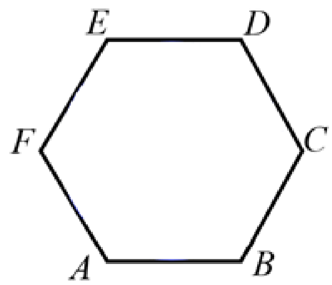
в) Угол между двумя соседними сторонами правильного многоугольника, вписанного в окружность, равен 135°. Найдите число вершин многоугольника.

33. а) Периметр правильного треугольника равен 36. Найдите его площадь.

б) Периметр правильного треугольника равен 180. Найдите его площадь.

в) Периметр правильного треугольника равен 72. Найдите его площадь.

34. а) Сторона правильного шестиугольника *ABCDEF* равна 6. Найдите его площадь.



б) Сторона правильного шестиугольника *ABCDEF* равна 4. Найдите его площадь.

в) Сторона правильного шестиугольника *ABCDEF* равна 8. Найдите его площадь.

Раздел 2. Прямые и плоскости в пространстве

Занятие 5. Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые в пространстве

<u>Повторяем теорию</u>

Прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются (Рис. 11).

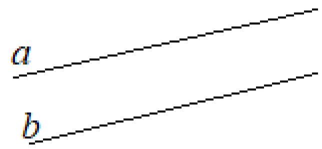


Рис. 11

Прямые на плоскости называются *пересекающимися*, если у них одна общая точка (Рис. 12).

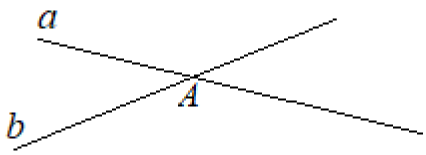


Рис. 12

Прямые на плоскости называются *совпадающими*, если у них бесконечное множество общих точек (Рис. 13).

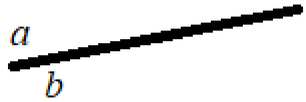
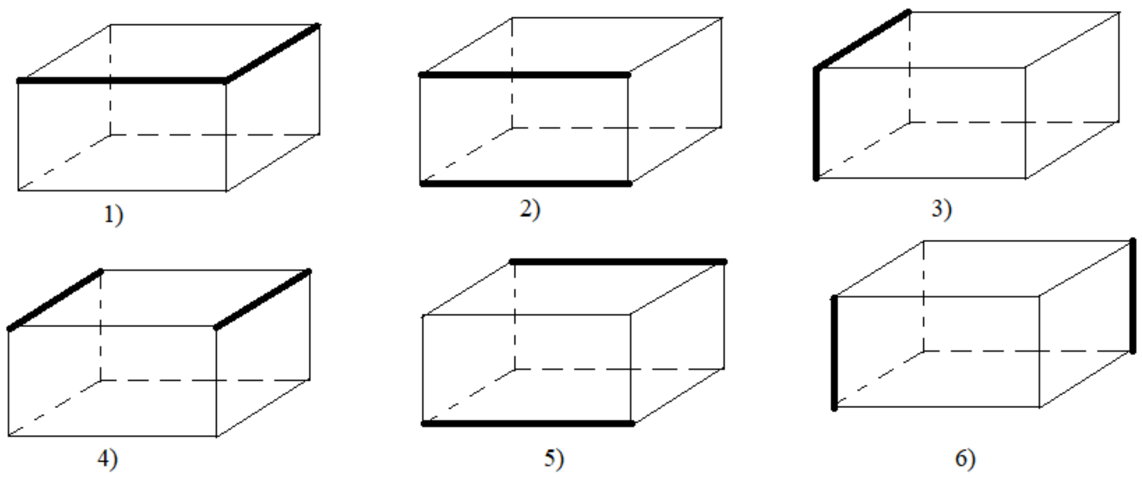


Рис. 13

<u>Проверяем себя</u>

Т17. а) Назовите параллельные прямые на окружающих предметах.
б) Назовите пересекающиеся прямые на окружающих предметах.

Т18. Задание по чертежу.



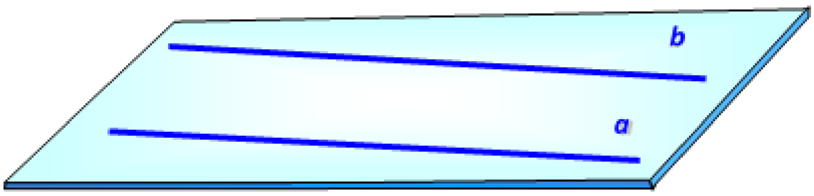
а) Назовите номера рисунков с пересекающимися прямыми.

б) Назовите номера рисунков с параллельными прямыми. Лежат ли эти прямые в разных плоскостях?

Т19. а) Можно ли утверждать, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую? (Перефразируйте задачу: если одна из параллельных прямых пересекает некоторую прямую, пересекает ли эту прямую вторая из параллельных прямых?)

б) Можно ли утверждать, что прямые, пересекающие каждую из двух параллельных прямых, лежат в плоскости данных прямых?

Повторяем теорию (продолжение)

Планиметрия	Стереометрия
Две прямые *на плоскости* называются *параллельными*, если они не пересекаются.	Две прямые *в пространстве* называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.
 $a \parallel b$	

Две прямые в пространстве называются *скрещивающимися*, если они не лежат в одной плоскости.

Скрещивающиеся прямые не параллельны и не пересекаются (Рис. 14).

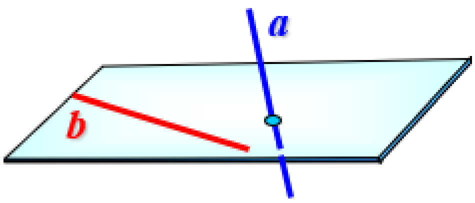
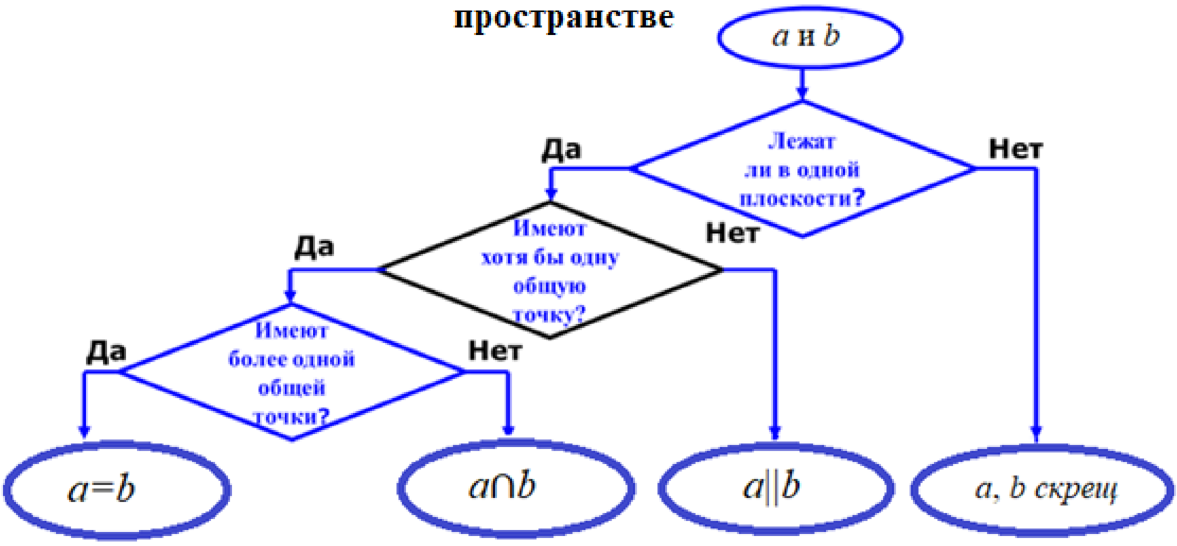


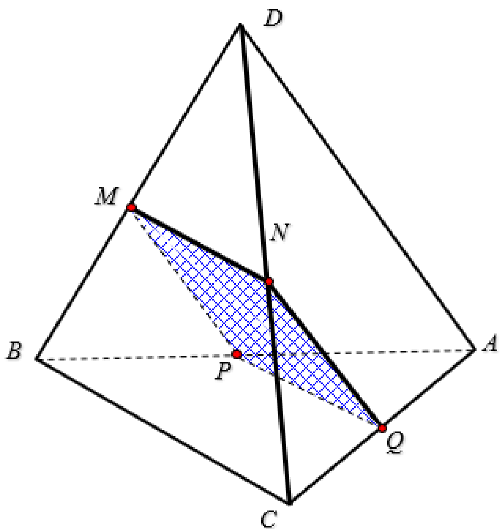
Рис. 14

Алгоритм распознавания взаимного расположения двух прямых в пространстве



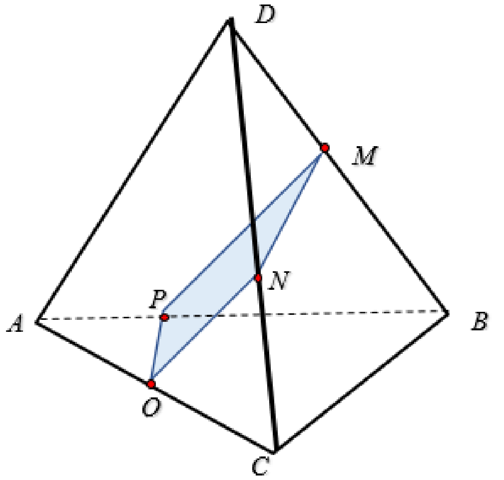
Решаем задачи

35. а) На рисунке точки *M*, *N*, *P* и *Q* – середины отрезков *BD*, *CD*, *AB* и *AC*. Найти периметр четырехугольника *MNQP*, если *AD*=12, *BC*=14.

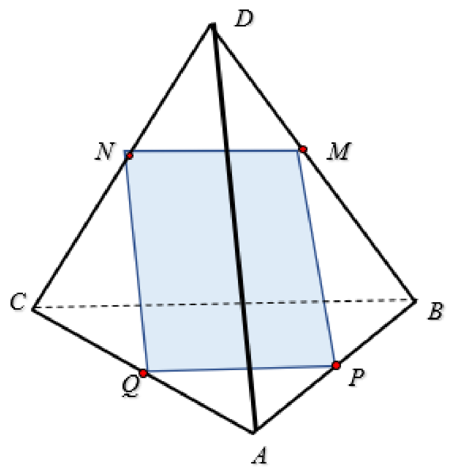


б) На рисунке точки *M*, *N*, *P* и *Q* – середины отрезков *BD*, *CD*, *AB* и *AC*.

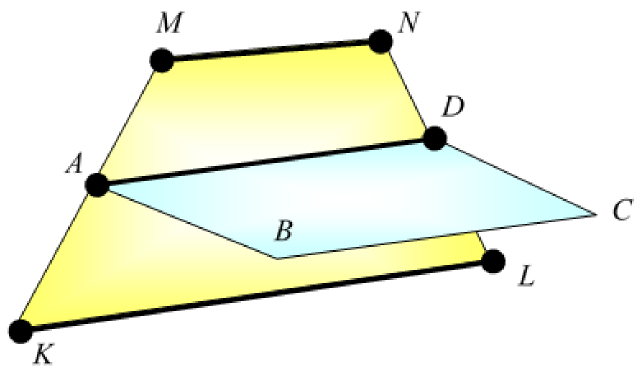
Найти периметр четырехугольника *MNQP*, если *AD*=18, *BC*=24.



в) На рисунке точки M, N, P и Q – середины отрезков BD, CD, AB и AC. Найти периметр четырехугольника $MNQP$, если AD=28, BC=26.



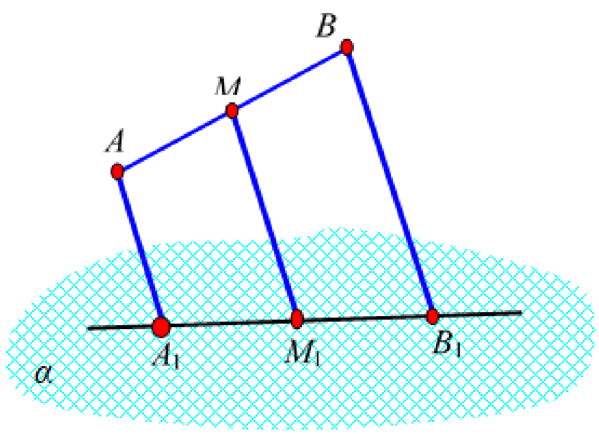
36. а) Квадрат $ABCD$ и трапеция $KMNL$ не лежат в одной плоскости. Точки A и D – середины отрезков KM и NL соответственно. Докажите, что $KL \| BC$. Найдите BC, если KL=10, MN=6.



б) Квадрат $ABCD$ и трапеция $KMNL$ не лежат в одной плоскости. Точки A и D – середины отрезков KM и NL соответственно. Докажите, что $KL \| BC$. Найдите BC, если KL=18, MN=12.

в) Квадрат $ABCD$ и трапеция $KMNL$ не лежат в одной плоскости. Точки A и D – середины отрезков KM и NL соответственно. Докажите, что $KL \| BC$. Найдите BC, если KL=28, MN=22.

37. а) Отрезок AB не пересекается с плоскостью α. Через концы отрезка AB и его середину, точку M, проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1 и M_1.



а) Докажите, что точки A_1, B_1 и M_1 лежат на одной прямой.

б) Найдите AA_1, если BB_1=12, MM_1=8.

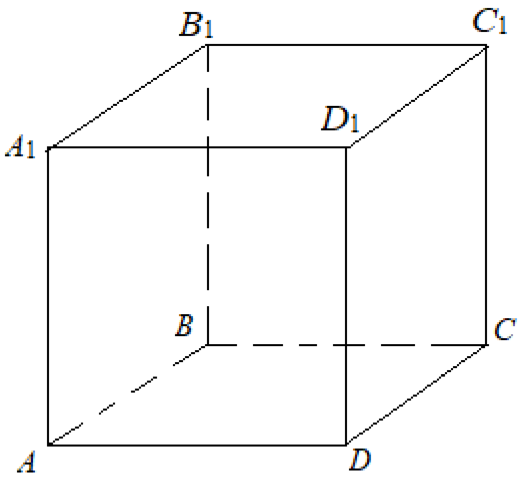
б) Отрезок AB не пересекается с плоскостью α. Через концы отрезка AB и его середину, точку M, проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1 и M_1.

Найдите AA_1, если BB_1=20, MM_1=15.

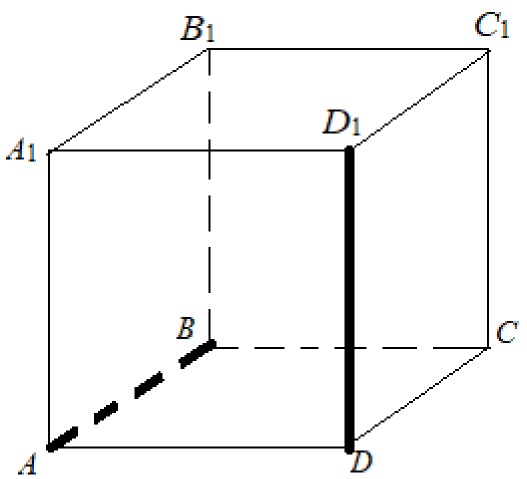
в) Отрезок AB не пересекается с плоскостью α. Через концы отрезка AB и его середину, точку M, проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1 и M_1.

Найдите AA_1, если BB_1=28, MM_1=19.

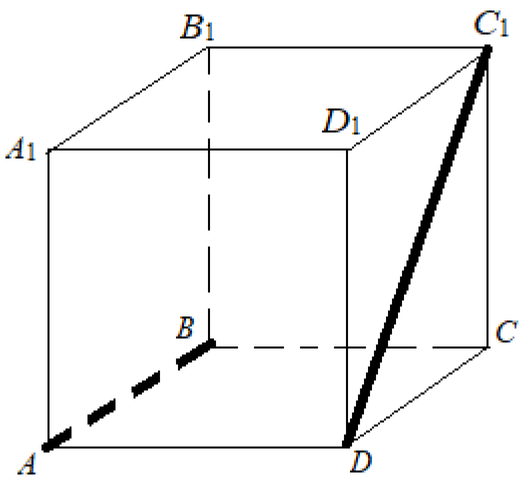
38. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



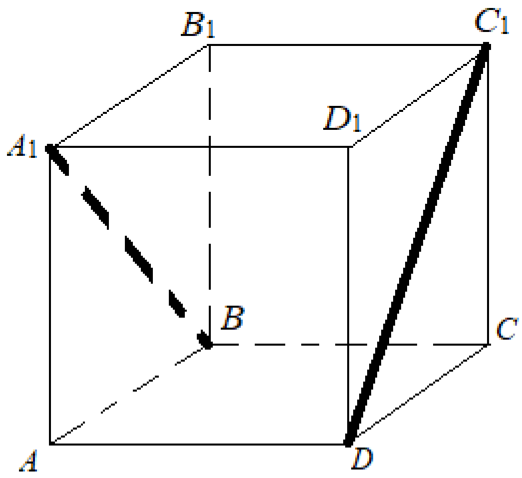
а) Найти расстояние между скрещивающими прямыми AB и DD_1.



б) Найти расстояние между скрещивающими прямыми AB и DC_1.



в) Найти расстояние между скрещивающими прямыми A_1B и DC_1.



Занятие 6. Параллельность прямой и плоскости

Повторяем теорию

1. Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

2. Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

3. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

4. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

5. *Признак параллельности прямой и плоскости.* Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

6. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

7. Прямые, которые не параллельны и не пересекаются, получили название скрещивающиеся. Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости

8. *Признак скрещивающихся прямых.* Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся

Проверяем себя

Т20. Заполните пропуски в предложениях.

1. Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая ________________ данной, и притом только одна.

2. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая _______________ эту плоскость.

3. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они __________________.

4. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она ___________________ данной плоскости.

5. Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые ________________.

6. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости _________________.

7. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения _______________.

8. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями ___________________.

Т21. Каким может быть взаимное расположение прямых a и b, если прямая a лежит в плоскости α, а прямая b параллельна этой плоскости?

а) параллельны или пересекаются;

б) скрещиваются или пересекаются;

в) параллельны или скрещиваются;

г) определить нельзя;

д) совпадают.

Т22. Выберите верное утверждение.

а) Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая лежит в данной плоскости.

б) Прямая и плоскость называются скрещивающимися, если они не имеют общих точек.

в) Если две прямые параллельны третьей прямой, то они скрещивающиеся.

г) Если две прямые пересекают плоскость, то они параллельны.

д) Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Т23. Какое из следующих утверждений верно?

а) Через любые три точки проходит плоскость, и притом только одна;

б) если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости;

в) если две плоскости имеют общую точку, то они не пересекаются;

г) через прямую и точку, лежащую на ней, проходит плоскость, и притом только одна;

д) через две пересекающиеся прямые плоскость провести нельзя.

2. Выберите верное утверждение.

а) Если одна точка прямой лежит в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости;

б) через две пересекающиеся прямые плоскость провести нельзя;

в) через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна;

г) любые две плоскости не имеют общих точек;

д) если четыре точки не лежат в одной плоскости, то какие-нибудь три из них лежат на одной прямой.

3. Сколько общих точек могут иметь две различные плоскости?

а) 2; б) 3; в) несколько; г) бесконечно много; д) бесконечно много или ни одной.

4. Прямая c, параллельная прямой a, пересекает плоскость β. Прямая b параллельна прямой a, тогда:

а) прямые b и c пересекаются;

б) прямая b лежит в плоскости β;

в) прямые b и c скрещиваются;

г) прямые b и c параллельны;

д) прямая a лежит в плоскости β.

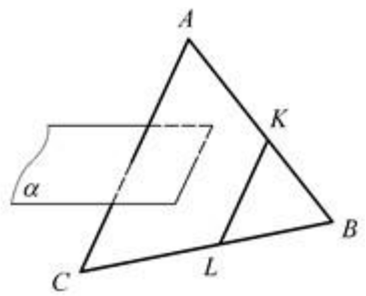
Решаем задачи

39. а) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E так, что DE=5 см и BD:DA=2:3. Плоскость α проходит через точки B и C и параллельна отрезку DE. Найдите длину отрезка BC.

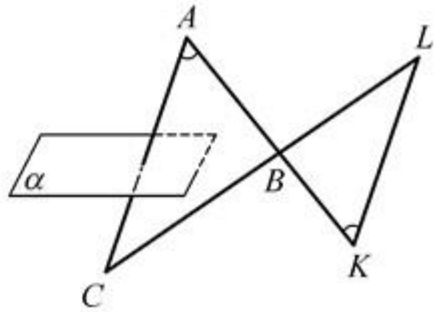
б) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E так, что DE=6 см и BD:DA=4:3. Плоскость α проходит через точки B и C и параллельна отрезку DE. Найдите длину отрезка BC.

в) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E так, что DE=4 см и $BD:DA$=2:1. Плоскость α проходит через точки B и C и параллельна отрезку DE. Найдите длину отрезка BC.

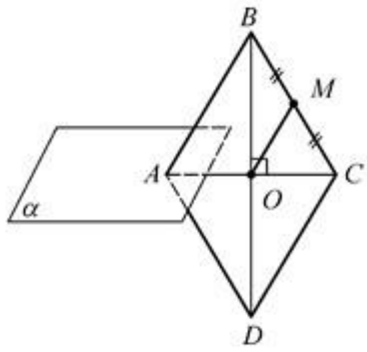
40. а) Дано:
ΔABC, $K \in AB$,
$\angle CAB=\angle LKB$, $AC \cap \alpha$.
Докажите, что $KL \cap \alpha$.



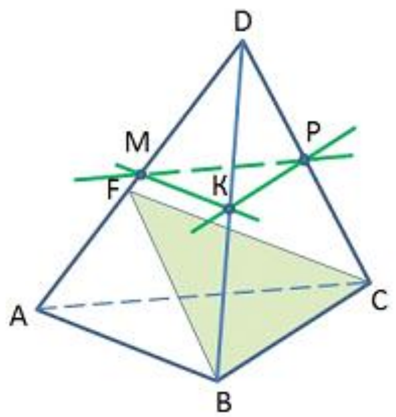
б) Дано:
$AK \cap CL = B$,
$\angle CAB = \angle LKB$, $AC \cap \alpha$.
Докажите, что $KL \cap \alpha$.



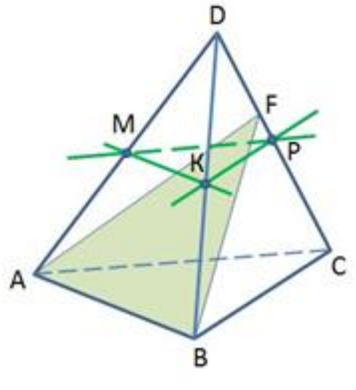
в) Дано:
$ABCD$ – ромб, $AB \cap \alpha = A$,
$AC \cap BD = O$, $BM = MC$.
Докажите, что $OM \cap \alpha$.



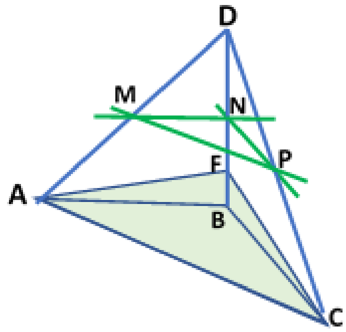
41. а) Точки M, P, K – середины ребер DA, DB, DC тетраэдра $DABC$. Определите прямую, параллельную плоскости FBC.



б) Точки M, P, K – середины ребер DA, DB, DC тетраэдра $DABC$. Определите прямую, параллельную плоскости FAB.

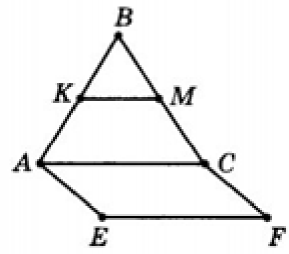


в) Точки *M*, *P*, *K* – середины ребер *DA*, *DB*, *DC* тетраэдра *DABC*. Определите прямую, параллельную плоскости *FAC*.



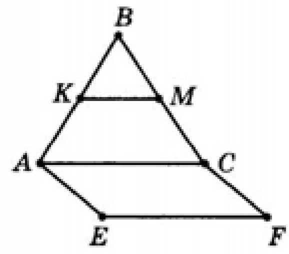
42. а) Треугольник *ABC* и квадрат *AEFC* не лежат в одной плоскости. Точки *K* и *M* – середины отрезков *AB* и *BC* соответственно.

1. Докажите, что *MK*||(*AEFC*).
2. Найдите *KM*, если *AE*=8.



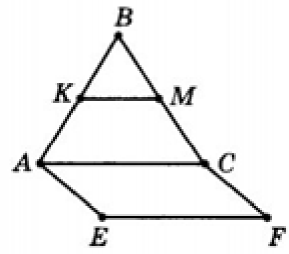
б) Треугольник *ABC* и квадрат *AEFC* не лежат в одной плоскости. Точки *K* и *M* – середины отрезков *AB* и *BC* соответственно.

Найдите *KM*, если *AE*=10.



в) Треугольник *ABC* и квадрат *AEFC* не лежат в одной плоскости. Точки *K* и *M* – середины отрезков *AB* и *BC* соответственно.

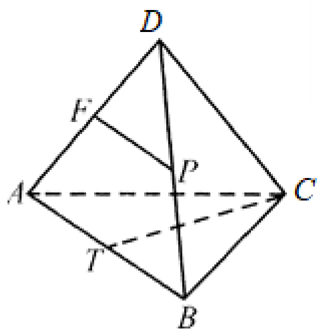
Найдите *KM*, если *AE*=12.



43. а) Дано:

$AF=FD$, $BP=PD$, $\angle ACB=90^0$, $AT=TB$, $CT=5$.

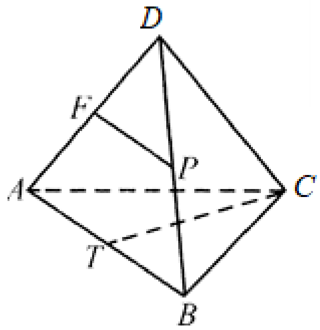
1. Доказать, что *FP*||(*ABC*).
2. Найти *FP*.



б) Дано:

$AF=FD$, $BP=PD$, $\angle ACB=90^0$, $AT=TB$, $CT=7$.

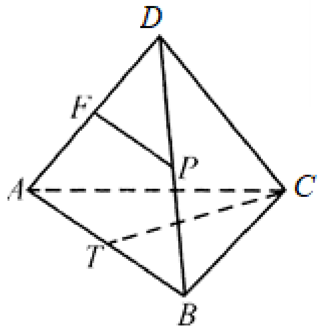
Найти FP.



в) Дано:

$AF=FD$, $BP=PD$, $\angle ACB=90^0$, $AT=TB$, $CT=13$.

Найти FP.



Задачи с развернутым ответом

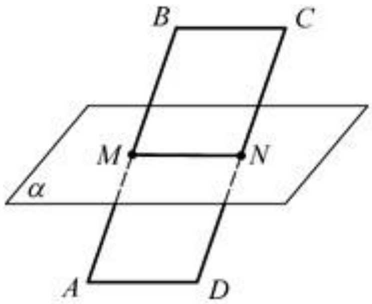
44. Сторона AC треугольника ABC параллельна плоскости α , а стороны AB и BC пересекаются с этой плоскостью в точках M и N. Докажите, что треугольники ABC и MBN подобны.

45. На ребре DC правильной треугольной пирамиды взята точка M, так что $MC=2DM$. Докажите, что $OM \| (ABD)$, где точка O – центр треугольника ABC.

46. Точки M и N – середины ребер AB и AC тетраэдра $ABCD$. Доказать, что прямая MN параллельна плоскости BCD.

47. Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $AB \cap \alpha = M$, $CD \cap \alpha = N$, $MN \| AD$.

Доказать: $BC \| \alpha$.



Занятие 7. Параллельность плоскостей

<u>Повторяем теорию</u>

Определение. Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то плоскости параллельны (Рис. 15).

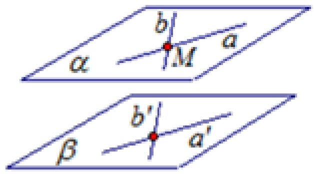


Рис. 15

Свойства.

1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны (Рис. 16).

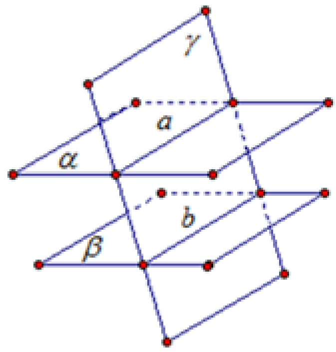


Рис. 16

2. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны (Рис. 17).

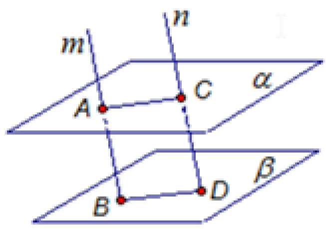


Рис. 17

3. Параллельные плоскости рассекают стороны угла на пропорциональные части (Рис. 18).

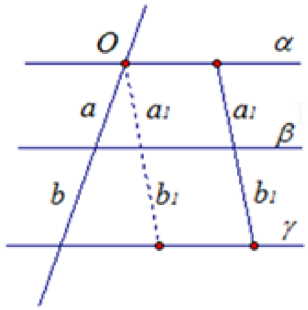


Рис. 18

<u>Проверяем себя</u>

Т24. 1) Плоскость α пересекает стороны BC и AC треугольника ABC соответственно в точках M и E. известно, что $AB \| \alpha$, тогда прямые AB и ME:

а) пересекаются;

б) параллельны;

в) скрещиваются.

2) Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC, точки P, O и M – середины отрезков DA, DB, DC соответственно. Каково взаимное расположение плоскостей ABC и POM?

а) плоскости параллельны;

б) плоскости пересекаются;

в) их расположение определить нельзя.

3) Прямые a и b лежат в параллельных плоскостях, следовательно, эти прямые:

а) скрещиваются или пересекаются;

б) скрещиваются или параллельны;

в) только скрещиваются;

г) только параллельны.

Т25. Укажите верные утверждения:

1. Если прямая a параллельна прямой b, а b параллельна плоскости α, то a тоже параллельна плоскости α?

2. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения этих плоскостей параллельна данной прямой?

3. Если две прямые параллельны плоскости, то эти прямые параллельны?

Т26. Укажите неверные утверждения:

1. Если одна точка прямой лежит в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

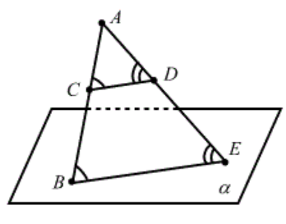
2. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

3. Через две пересекающие прямые плоскость провести нельзя.

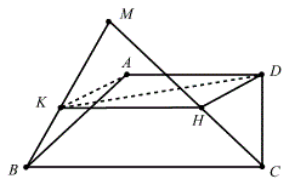
4. Любые две плоскости не имеют общих точек.

Решаем задачи

48. а) Точка C лежит на отрезке AB, причем AB:BC=4:3. Отрезок CD, равный 12 см, параллелен плоскости α, проходящей через точку B. Докажите, что прямая AD пересекает плоскость α в некоторой точке E и найдите отрезок BE.



б) В трапеции $ABCD$ основание BC равно 12 см. Точка M не лежит в плоскости трапеции, а точка K – середина отрезка BM. Докажите, что плоскость ADK пересекает отрезок MC в некоторой точке H. Найдите отрезок KH.



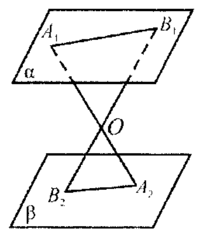
в) Точка C лежит на отрезке AB. Через A проведена плоскость, а через точки B и C – параллельные прямые, пересекающие эту плоскость соответственно в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если точка C – середина отрезка AB и BB_1=7 см.

49. а) Параллельные прямые a и b пересекают одну из двух параллельных плоскостей в точках A_1 и B_1, а другую – в точках A_2 и B_2 соответственно. Найдите $\angle B_1B_2A_2$, если $\angle B_1A_1A=50^0$.

б) Параллельные прямые a и b пересекают одну из двух параллельных плоскостей в точках A_1 и B_1, а другую – в точках A_2 и B_2 соответственно. Найдите $\angle A_2A_1B$, если $\angle A_1A_2B_2=140^0$.

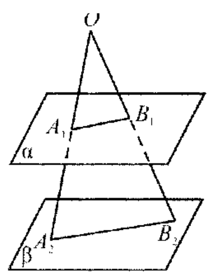
в) Точка C лежит на отрезке AB. Через A проведена плоскость, а через точки B и C – параллельные прямые, пересекающие эту плоскость соответственно в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если $AC:CB$=3:2 и BB_1=20 см.

50. а) Плоскости α и β параллельны. $A_1\in\alpha$, $A_2\in\beta$, $B_1\in\alpha$, $B_2\in\beta$; $A_1A_2\cap B_1B_2=O$. $A_1O=5$, $A_2O=3$, $A_2B_2=3$.Найти A_1B_1.



б) Плоскости α и β параллельны. $A_1\in\alpha$, $A_2\in\beta$, $B_1\in\alpha$, $B_2\in\beta$; $A_1A_2\cap B_1B_2=O$. $A_1A_2=14$, $B_1O:B_2O=3:4$. Найти A_1O.

в) Плоскости α и β параллельны. $A_1\in\alpha$, $A_2\in\beta$, $B_1\in\alpha$, $B_2\in\beta$; $A_1A_2\cap B_1B_2=O$. $A_1B_1=6$, $B_1O:B_1B_2=5:8$. Найти A_2B_2.



51. а) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ сторона равна $6\sqrt{2}$. Точка K – середина ребра SC. Через прямую AK проведено сечение, параллельное одной из диагоналей основания, площадь которого равна 60. Найдите расстояние от точки B до плоскости сечения.

б) В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ каждое ребро равно 12. На ребре PC отмечена точка K так, что PK:KC=1:3. Линия пересечения плоскостей ABK и PCD параллельна плоскости ABC. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью ABK.

в) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C. Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

52. а) Все ребра правильной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны по 2. Плоскость параллельная прямым AC и SB пересекает ребра AB и BC в точках M и N. Найдите периметр сечения пирамиды этой плоскостью, если $MN=\sqrt{2}$.

б) Плоскость, параллельная боковому ребру $AS=a\sqrt{2}$ и ребру $BC=a$ основания ABC правильной пирамиды $SABC$, проходит на расстоянии d от ребра AS. Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

в) В правильной пирамиде $SABC$ с высотой SH и ребром основания $AB=a$ угол между боковым ребром и плоскостью основания равен φ. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку H параллельно ребрам SA и BC.

Занятие 8. Параллельность плоскостей

Повторяем теорию

1. Если плоскость α параллельна плоскости β, а плоскость β параллельна плоскости γ, то плоскость α параллельна плоскости γ.

2. Через точку, не лежащую в плоскости, проходит единственная плоскость параллельная данной.

3. Противолежащие грани параллелепипеда лежат в параллельных плоскостях.

Проверяем себя

T27. Заполните пропуски:

а) Через прямую и не лежащую на ней точку, проходит ______ и притом только одна.

б) Через любую точку пространства, ______ на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна

Ответ: не лежащей.

T28. Укажите верные утверждения:

1) Прямые a и b пересекаются в точке M. Прямая c, не проходящая через точку M, пересекает прямые a и b. Лежат ли все эти прямые в одной плоскости?

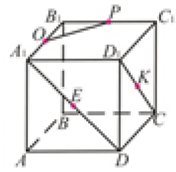
2) Прямые a и b скрещиваются с прямой c. Могут ли прямые a и b быть параллельными?

3) Две прямые параллельны одной и той же плоскости. Можно ли утверждать, что эти прямые параллельны между собой?

T29. Определи вид четырехугольника:

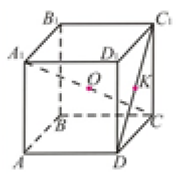
№1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки O, P, K и E – середины отрезков A_1B_1, B_1C_1, D_1C и A_1D соответственно. Четырёхугольник $OPKE$ является

1) произвольным четырёхугольником;
2) трапецией;
3)параллелограммом.



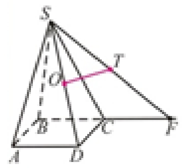
№2. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки O K – середины отрезков A_1C и C_1D соответственно. Четырёхугольник $AOKD$ является

1) произвольным четырёхугольником;
2) трапецией;
3) параллелограммом.



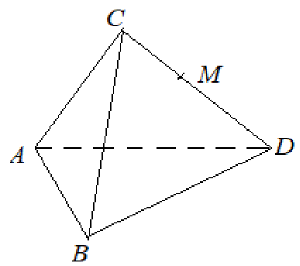
№3. Точка F лежит на продолжении ребра BC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ так, что $FC=BC$, точки O и T – середины отрезков SD и SF соответственно. Четырёхугольник $AOTC$ является

1) произвольным четырёхугольником;
2) трапецией;
3) параллелограммом.

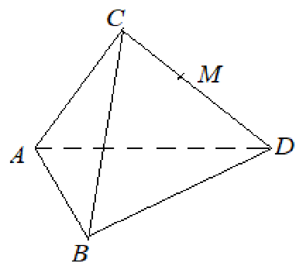


<u>Решаем задачи</u>

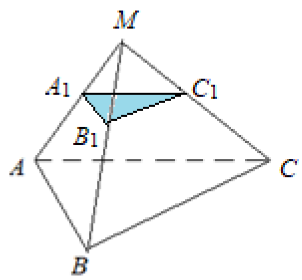
53. а) На рисунке изображен правильный тетраэдр $ABCD$, длина ребра которого равна 8, $CM=MD$. Проведите плоскость, проходящую через точку M параллельно плоскости ABC. Найдите периметр полученного сечения.



б) На рисунке изображен правильный тетраэдр $ABCD$, длина ребра которого равна 8, $DM:BM$=3:5. Проведите плоскость, проходящую через точку M параллельно плоскости ABC. Найдите периметр полученного сечения.



в) На рисунке изображена $MABC$ – пирамида, S_{ABC}=98, $A_1B_1C_1 \| ABC$, $MA_1:AA_1$=3:4. Найдите $S_{сеч}$.



54. а) Точка M – середина ребра BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Докажите, что плоскость AMB_1 параллельна прямой A_1C.

2) Найдите расстояние между прямой A_1C и плоскостью AMB_1, если параллелепипед прямоугольный, AB=12, AD=12 и AA_1=6.

б) Точка M – середина ребра BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Докажите, что плоскость AMB_1 параллельна прямой A_1C.

2) Найдите расстояние между прямой A_1C и плоскостью AMB_1, если параллелепипед прямоугольный, AB=8, AD=8 и AA_1=4.

в) В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB=BC$=6, AA_1=12 точки M и K – середины AB и BC соответственно, точка N

лежит на ребре BB_1, причем $BN=6$. Через точку D провели плоскость α параллельно плоскости KMN.

1) Докажите, что плоскость α проходит через точки A_1 и C_1.

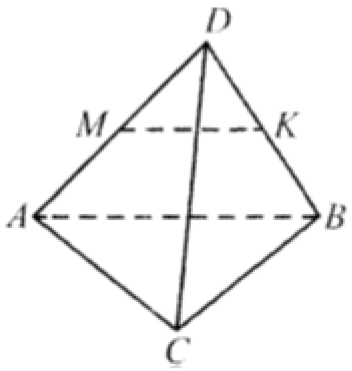
2) Найдите расстояние между плоскостями KMN и α.

55. а) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2. Плоскости A_1BD и B_1D_1C параллельны. Найдите расстояние между плоскостями A_1BD и B_1D_1C.

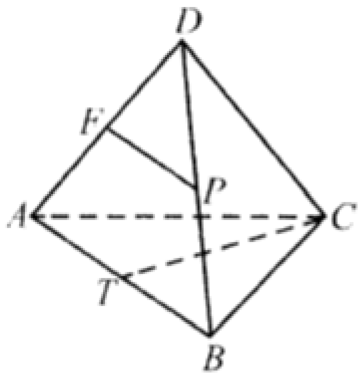
б) Точка Q симметрична вершине S правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ относительно плоскости основания ABC. Плоскости SBC и QDA параллельны. Найдите расстояние между плоскостями SBC и QDA, если сторона основания пирамиды $SABCD$ равна 2, а ее боковое ребро равно $\sqrt{2022}$.

в) Площадь сечения правильной треугольной пирамиды, проходящего через её боковое ребро, равное $\sqrt{13}$, и высоту, вдвое больше площади её основания. Найдите площадь её боковой грани.

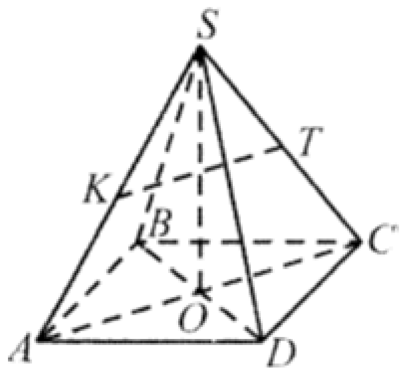
56. а) Дано: $DABC$ – пирамида; $\angle ABC=\angle ACB=60^0$; $MK||BC$; $AM=MD$, $AC=6\sqrt{2}$. Найти MK.



б) Дано: $DABC$ – пирамида; $AF=FD$, $FP||ABC$; $\angle ACB=90^0$; $AT=BT$, $CT=9$. Найти FP.



в) Дано: $SABCD$ – пирамида; $KT||BC$, $CT=ST$, $ABCD$ – ромб; $AD=15$, $BD:AC=3:4$. Найти KT.



57. а) Стороны AB=6 и CD основания $ABCD$ пирамиды $SABCD$ параллельны, AD=4, $AS=2\sqrt{14}$ и $\angle BAD=120^0$. Найдите объем пирамиды, если через каждую из прямых AB и CD можно провести по плоскости, которые не содержат основание пирамиды и пересекают её по равным четырехугольникам.

б) На ребре AS правильной пирамиды $SABC$ объёмом V взята такая точка D, что $SD:DA=m:n$. Расстояние от центра основания ABC до плоскости BCD равно d. Найдите площадь треугольника BCD.

в) На каком расстоянии от ребра SA правильной пирамиды $SABC$ с вершиной S должна проходить плоскость, параллельная ребрам $BC=a$ и $AS=b$, чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была максимальной?

Занятие 9. Прямоугольный параллелепипед

Повторяем теорию

Прямоугольный параллелепипед – это параллелепипед, у которого боковые рёбра перпендикулярны к основаниям, а основания представляют собой прямоугольники. На рисунке 19 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

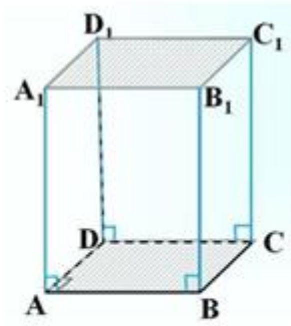


Рис. 19

AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – *боковые рёбра,* перпендикулярные основаниям.

$ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – *основания.*

ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DAA_1D_1 – *боковые грани.*

d – *диагональ* прямоугольного параллелепипеда.

a (длина), b (ширина), c (высота) – *измерения* прямоугольного параллелепипеда (Рис. 20).

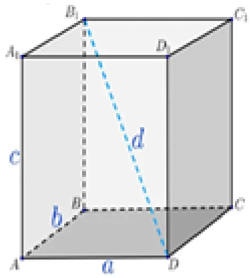


Рис. 20

Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда

$S_{пов}=2ab+2bc+2ac.$

Объём прямоугольного параллелепипеда

$V=abc.$

Свойства:

1. В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней – прямоугольники.
2. Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда – прямые.
3. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.
4. Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

Куб – это прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны. Все грани куба – равные друг другу квадраты (Рис. 21).

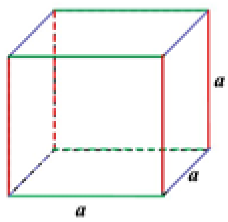


Рис. 21

Площадь поверхности куба

$S_{пов.}=6a^2$

Объём куба

$V=a^3$

Проверяем себя

Т30. Заполните пропуски:

а) Прямоугольный параллелепипед – это параллелепипед, у которого боковые рёбра _______ к основаниям, а основания представляют собой прямоугольники.

б) Куб – это прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения _______.

Т31. Ответьте на вопросы:

а) Сколько боковых рёбер в прямоугольном параллелепипеде?

б) Сколько оснований в прямоугольном параллелепипеде?

в) Сколько боковых граней в прямоугольном параллелепипеде?

г) Сколько всего диагоналей в прямоугольном параллелепипеде?

Т32. Укажите верные утверждения:

а) В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней – прямоугольники;

б) Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда – прямые;

в) Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме трёх его измерений.

Т33. Укажите неверное утверждение:

а) Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны;

б) Все грани куба – равные друг другу прямоугольники;

в) Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

Решаем задачи

58. а) Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 6,1 см, 7 см и 3,5 см. Найдите площадь его поверхности.

б) Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 94. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.

в) Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 дм и 4 дм. Диагональ параллелепипеда равна 6 дм. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.

59. а) Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда с размерами 60 см×20 см×50 см. Сколько литров составляет объём аквариума? В одном литре 1000 кубических сантиметров.

б) Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 38,6. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4,5. Найдите объем параллелепипеда.

в) Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 4, 6, 9. Найдите ребро равновеликого ему куба.

60. а) Бак имеет форму куба со стороной 40 см. Сколько литров составляет объём бака? В одном литре 1000 кубических сантиметров.

б) Объем куба равен 8. Найдите площадь его поверхности.

в) Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в три раза?

61. а) Рёбра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 20, 30 и 60. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда.

б) Площадь поверхности куба равна 18 см^2. Найдите его диагональ.

в) Если каждое ребро куба увеличить на 1 мм, то его площадь поверхности увеличится на 54 мм^2. Найдите ребро куба.

62. а) Объем первого куба в 8 раз больше объема второго куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?

б) Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 4,5. Найдите объем треугольной пирамиды AD_1CB_1.

в) Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, D, A_1, B, C, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого AB=3, AD=4, AA_1=5.

Занятие 10. Тетраэдр

Повторяем теорию

Определение тетраэдра. Поверхность, составленная из четырёх треугольников ΔABC, ΔDAB, ΔDBC и ΔDCA, называется тетраэдром и обозначается: $DABC$.

Тетраэдр – это многогранник, состоящий из плоскости треугольника и точки не лежащий в этой плоскости, трех отрезков, соединяющих эту точку с вершинами основания треугольника.

Построим ΔABC и точку D, не лежащую в плоскости этого треугольника. Соединим точку D с вершинами ΔABC, получим ΔDAB, ΔDBC, ΔDCA, получим $DABC$ – тетраэдр (Рис. 22).

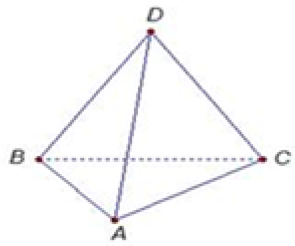


Рис. 22

Треугольники, из которых состоит тетраэдр, называются *гранями,* их стороны – *рёбрами*, а вершины – *вершинами* тетраэдра.

Ребро тетраэдра **–** линия пересечения двух плоскостей тетраэдра.

Тетраэдр имеет *четыре* грани, *шесть* рёбер и *четыре* вершины.

Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются *противоположными*.

Один из треугольников называется *основанием* тетраэдра. А три другие – *боковыми* гранями.

Тетраэдр называется правильным, если у него все четыре грани равносторонние треугольники.

Свойства правильного тетраэдра: все двугранные углы при рёбрах и все трёхгранные углы при вершинах равны, все рёбра имеют одинаковую длину, все грани имеют одинаковую площадь.

Элементы тетраэдра

A, B, C, D – вершины тетраэдра.

AB, AC, AD, BC, BD, CD – ребра тетраэдра.

ABC, ABD, BDC, ADC – грани тетраэдра.

Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой противоположной грани и перпендикулярный этой грани, называется его *высотой*, опущенной из данной вершины.

Площадь правильного треугольника, со стороной *a,* равна: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Площадь поверхности правильного тетраэдра равна: $S = a^2\sqrt{3}$.

Объём тетраэдра $V = \frac{1}{3}S \cdot H$, где S – площадь основания, а H – высота.

Проверяем себя

Т34. Заполните пропуски:

а) Тетраэдр – это _______, составленная из ________________________.

б) Треугольники, из которых состоит тетраэдр, называются__________.

в) Линии пересечения двух плоскостей тетраэдра, называются________.

Т35. Укажите верные утверждения:

а) фигура, состоящая из треугольников, называется тетраэдром;

б) у правильного тетраэдра все четыре грани равносторонние треугольники;

в) тетраэдр имеет четыре одинаковые грани.

Т36. Укажите неверные утверждения:

а) все грани тетраэдра имеют одинаковую площадь;

б) в каждой вершине тетраэдра сходятся три грани;

в) рёбра тетраэдра имеют одинаковую длину.

Решаем задачи

63. а) В правильном тетраэдре *SABC* точка *K* − середина ребра *BC*, *S* − вершина. Известно, что *SK*=4, а площадь боковой поверхности тетраэдра равна 54. Найдите длину ребра *AC*.

б) В правильном тетраэдре *SABC* точка *L* – середина ребра *AC*, *S* – вершина. Известно, что *BC*=6, а *SL*=5. Найдите площадь боковой поверхности тетраэдра.

в) В правильном тетраэдре *SABC*, *Q* − середина ребра *AB*, *S* − вершина. Известно, что *BC*=7, а площадь боковой поверхности тетраэдра равна 42. Найдите длину отрезка *SQ*.

64. а) Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?

б) Во сколько раз увеличили рёбра правильного тетраэдра, если площадь его поверхности увеличилась в 1296 раза?

в) Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в 5 раз?

65. а) В правильном тетраэдре $SABC$ точка R − середина ребра BC, S − вершина. Известно, что AB=1, а SR=2. Найдите площадь боковой поверхности.

б) В правильном тетраэдре $SABC$ точка R − середина ребра BC, S − вершина. Известно, что AB=7, а SR=16. Найдите площадь боковой поверхности.

в) В правильном тетраэдре $SABC$ точка Q − середина ребра AB, S − вершина. Известно, что BC=5, а SQ=6. Найдите площадь боковой поверхности.

66. а) Найдите объем тетраэдра, в основании которого лежит правильный треугольник, стороны которого равны 1, а высота равна $\sqrt{3}$.

б) Найдите объем тетраэдра, в основании которого лежит правильный треугольник, стороны которого равны 11, а высота равна $4\sqrt{3}$.

в) Найдите объем тетраэдра, в основании которого лежит правильный треугольник, стороны которого равны 3, а высота равна $6\sqrt{3}$.

67. а) Основанием тетраэдра является правильный треугольник со стороной 16, а боковые рёбра равны 10. Найдите площадь боковой поверхности этого тетраэдра.

б) Основанием тетраэдра является правильный треугольник со стороной 14, а боковые рёбра равны 25. Найдите площадь боковой поверхности этого тетраэдра.

в) Основанием тетраэдра является правильный треугольник со стороной 6, а боковые рёбра равны 5. Найдите площадь боковой поверхности этого тетраэдра.

Занятие 11. Практическая работа. Построение сечений многогранников

Повторяем теорию

Чтобы построить сечение многогранника плоскостью нужно указать точки пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника и соединить эти точки отрезками, принадлежащими граням многогранника. Для построения сечения многогранника плоскостью нужно в плоскости каждой грани указать две точки, принадлежащие сечению, соединить их прямой и найти точки пересечения этой прямой с рёбрами многогранника. При построении сечения многогранника получается плоская фигура.

При построении сечений используем свойства.

Свойства параллельных плоскостей:

Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

Если в параллелепипеде на одной из граней проведена линия, по которой плоскость сечения пересекает грань, а на параллельной ей грани есть точка, принадлежащая сечению, то через эту точку можно провести линию, параллельную линии сечения (Рис. 23).

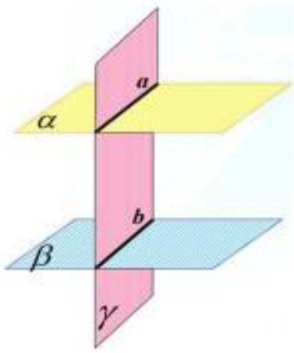


Рис. 23

Метод следов: Линия пересечения плоскости сечения и плоскости грани многогранника называется следом секущей плоскости на плоскости этой грани многогранника. Точка пересечения плоскости сечения и прямой, содержащей ребро многогранника, называется следом секущей плоскости на прямой, содержащей это ребро многогранника.

Соединяйте точки, которые лежат в одной грани.

Проверяем себя

Т37. Заполните пропуски:

а) Если две точки прямой принадлежат плоскости, то прямая_________.

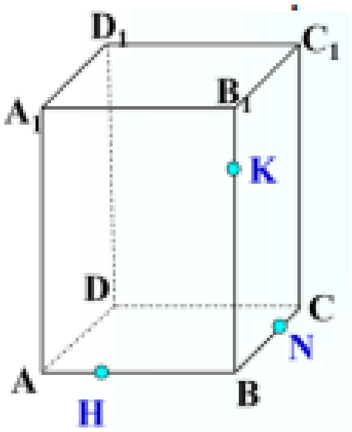
б) Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются _____.

в) Если плоскость пересекает две параллельные плоскости, то линии пересечения ___________________.

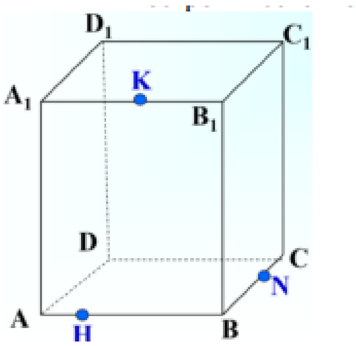
г) Соединяйте точки, которые лежат ___________________________.

Решаем задачи

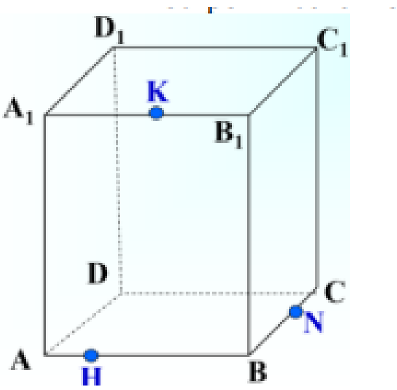
68. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки *K*, *H* и *N*.



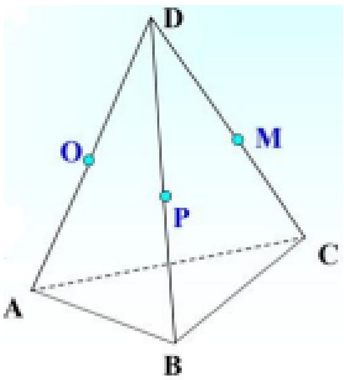
69. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки *K*, *H* и *N*.



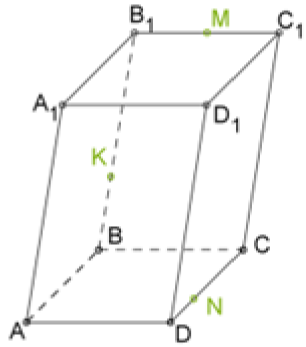
70. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки *K, H* и *N*, методом следов.



71. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки *O*, *M* и *P*.



72. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точки *K*, *M* и *N*.



Практическая работа. Построение сечений многогранников

Критерии оценивания:

1 балл за каждую правильную линию,

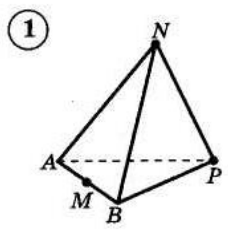
1 балл за описание построения,

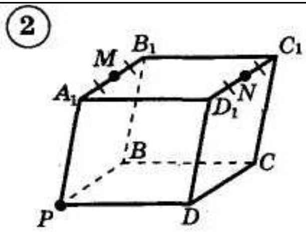
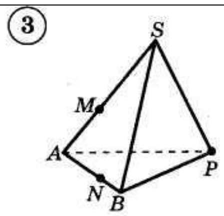
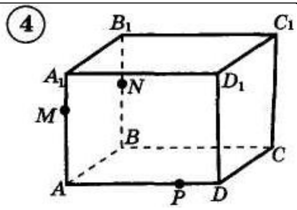
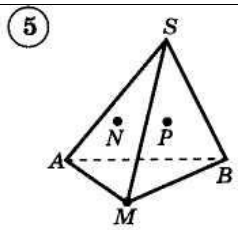
1 балл за штриховку сечения

Вариант 1		Вариант 2.	
0 – 11 баллов	«2»	0 – 11 баллов	«2»
12 – 16 баллов	«3»	12 – 16 баллов	«3»
17 – 25	«4»	17 – 25	«4»
26 баллов и более	«5»	26 баллов и более	«5»

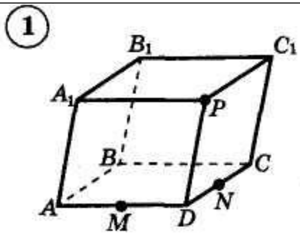
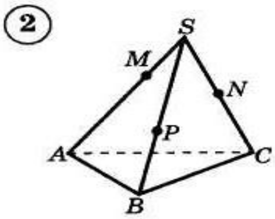
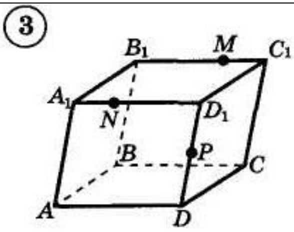
Вариант 1

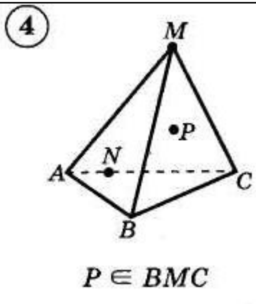
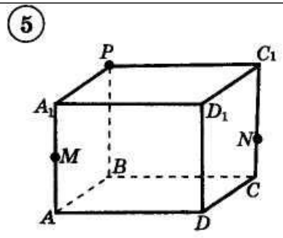
1. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки *M*, *N* и *P*.



2. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точки *M*, *N* и *P*.	
3. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки *M*, *N* и *P*.	
4. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точки *M*, *N* и *P*.	
5. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки *M*, *N* и *P*, где *N* принадлежит плоскости (*AMS*), *P* принадлежит плоскости (*MSB*)	

Вариант 2

1. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точки *M*, *N* и *P*.	
2. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки *M*, *N* и *P*.	
3. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точки *M*, *N* и *P*.	

4. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M, N и P, где P принадлежит плоскости (BMC).	
5. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точки M, N и P.	

Занятие 12. Перпендикулярность прямой и плоскости

Повторяем теорию

Прямая называется *перпендикулярной плоскости*, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости (Рис.24).

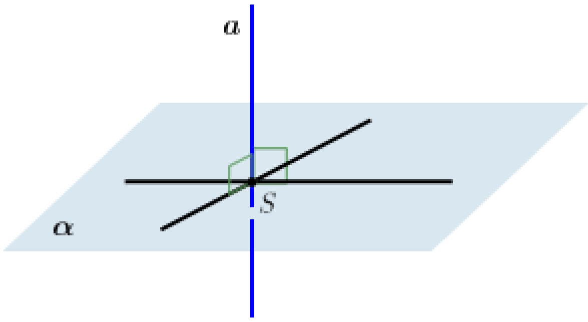


Рис. 24

Перпендикулярности прямой и плоскости:

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в данной плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Свойства:

- Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то эти прямые параллельны.
- Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой.
- Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.
- Если две различные плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то эти плоскости параллельны.

Проверяем себя

Т38. Заполните пропуски:

а) Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна третьей прямой, то другая прямая __________ к этой прямой.

б) Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они ______.

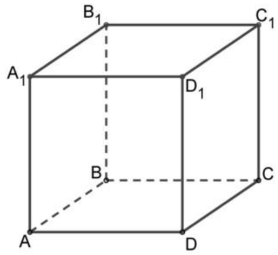
Т39. Закончите предложение, чтобы получились верные утверждения:

а) две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен _______.

б) если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она ___________________ и другой.

в) если две плоскости перпендикулярны прямой, то они______________.

Т40. Выпишите:



а) ребра, перпендикулярные плоскости DCC_1;

б) плоскости перпендикулярные ребру BB_1.

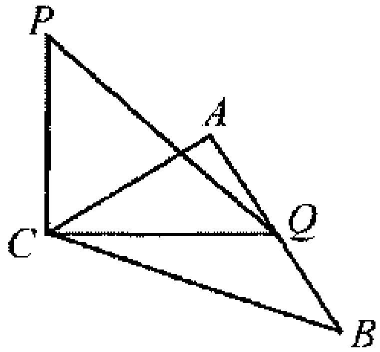
Ответ: а) AD, A_1D_1, BC, B_1C_1; *б*) ABC, $A_1B_1C_1$.

Решаем задачи

73. На готовых чертежах

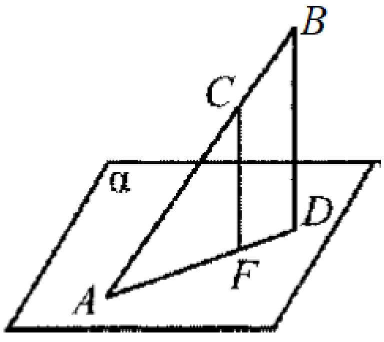
а) $CP \perp ABC$; $\angle ACB=90^0$; $AQ=QB$; $AB=4$; $PQ=3$.

CP–?

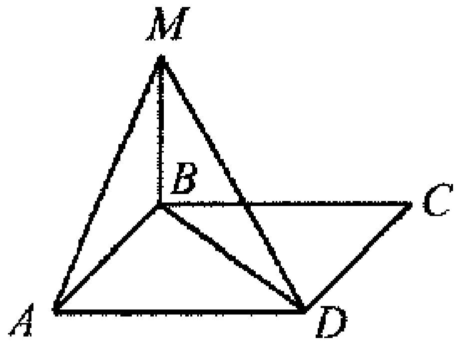


б) $AD \in \alpha$; $BD \perp \alpha$; $CF \perp \alpha$; $\frac{AF}{FD}=\frac{7}{3}$; $BD=6$.

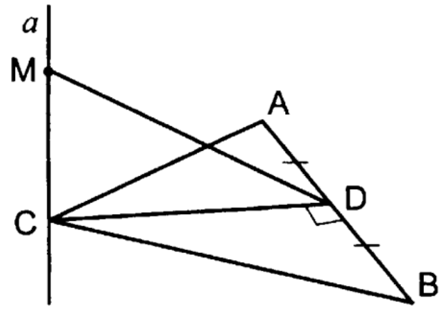
CF – ?



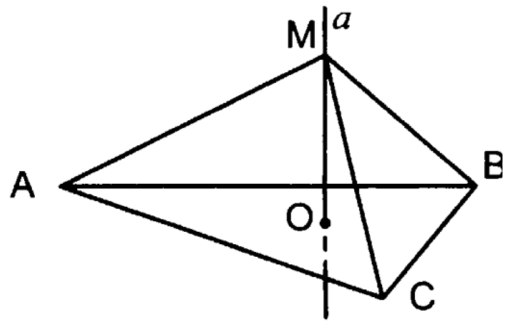
в) $BM \perp BC$; $BM \perp AB$; $ABCD$ – прямоугольник; $DM=8$; $\angle BDM=30^0$; $\angle MAB=45^0$. P_{ABCD} -?



г) Дано: $\angle ACB=90^0$, $AC=4$, $MD=3$. Найти MC.



д) Дано: $\triangle ABC$ – равносторонний. $AB=4\sqrt{3}$. O – центр окружности, описанной около $\triangle ABC$. $MO=3$. Найти MB.

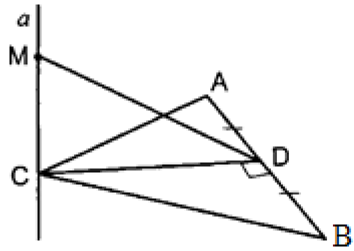


74. Прямая a перпендикулярна плоскости ABC.

а) Дано:

$\angle ACB=90^0$; $BC=4$, $MC=1$.

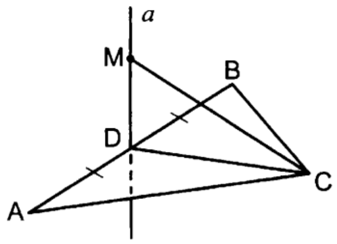
Найти MD.



б) Дано:

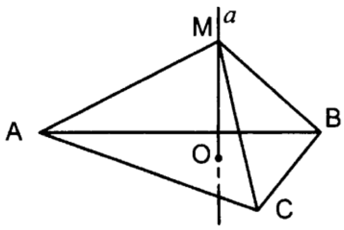
$\triangle ABC$ – равносторонний, $AB=2\sqrt{3}$, $MD=4$.

Найти MC.



в) Дано:

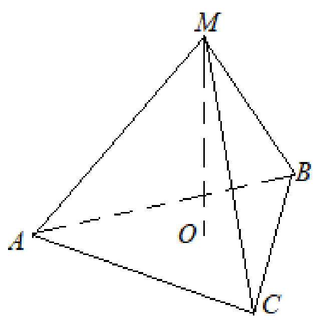
$\triangle ABC$ – равносторонний, $AB=3\sqrt{3}$. O – центр окружности, описанной около $\triangle ABC$, $MB=5$. Найти MO.



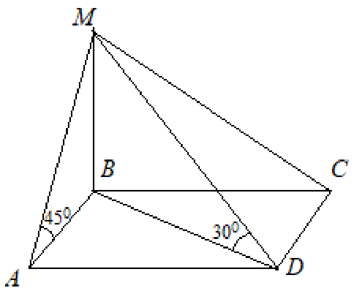
г) Дано:

O – центр окружности, описанной около $\triangle ABC$, $\angle ACB=120^0$, $AB=6$, $MO=2$.

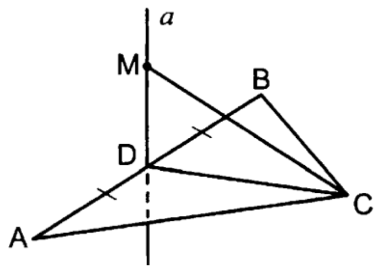
Найти MC.



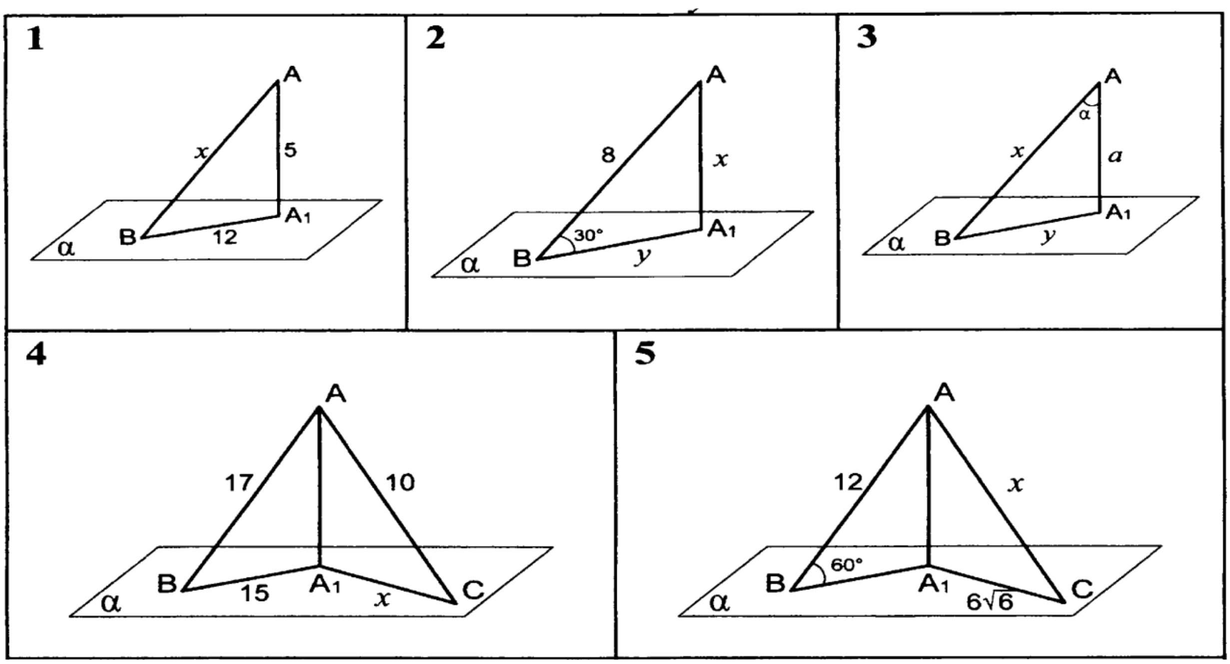
д) Дано: $ABCD$ – прямоугольник, $MB \perp ABCD$. $\angle MAB=45^0$, $\angle MDB=30^0$, $MD=8\sqrt{2}$. Найти AD.



е) Дано: $\triangle ABC$ – равносторонний, $AB=\dfrac{10}{\sqrt{3}}$; $MC=13$. Найти MD.



75. AA_1 – перпендикуляр к плоскости α, AB и AC – наклонные. Найти x и y.



Занятие 13. Перпендикулярность прямой и плоскости

Повторяем теорию

Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащей на прямой, перпендикулярной к плоскости.

Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием* перпендикуляра (Рис. 25).

Расстояние от точки до плоскости равно *длине перпендикуляра* из точки на эту плоскость.

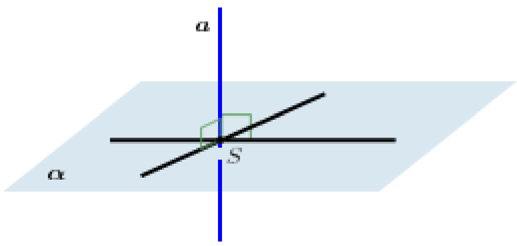


Рис. 25

Если из данной точки проведены перпендикуляр и наклонная, то перпендикуляр короче наклонной.

Проверяем себя

Т41. Закончите предложение, чтобы получилось верное утверждение:

а) Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она _______ к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

б) Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая ________

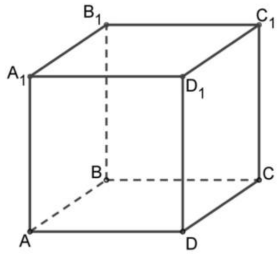
Т42. Ответьте на вопросы:

а) Сколько перпендикуляров можно провести через данную точку к данной прямой на плоскости?

б) Сколько перпендикуляров можно провести через данную точку к данной прямой в пространстве?

в) Что можно сказать о двух (трех, четырех) прямых, перпендикулярных к одной плоскости?

Т43. Дан параллелепипед



а) Назовите:

1) рёбра, перпендикулярные к плоскости ABB_1.

2) плоскости, перпендикулярные ребру A_1D_1.

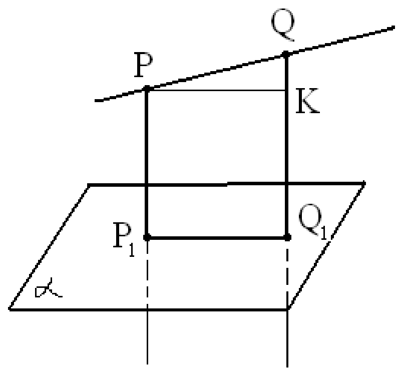
б) Определите взаимное расположение:

1) прямой AA_1 и плоскости (DCB).

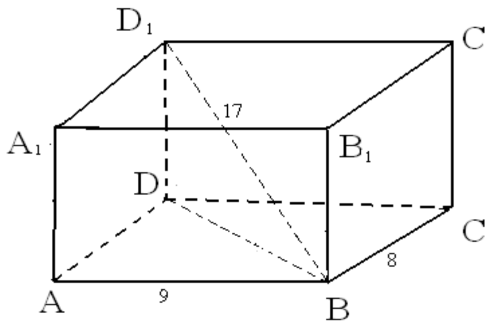
2) прямой B_1C_1 и плоскости (DCB).

Решаем задачи

76. а) Через точки P и Q прямой PQ проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α и пересекающие её соответственно в точках P_1 и Q_1. Найдите P_1Q_1, если PQ=15 см; PP_1=21,5 см; QQ_1=33,5 см.



б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB=9 см; BC=8 см; BD=17 см. Найдите площадь BDD_1B_1.



в) Отрезок MH пересекает плоскость α в точке K. Из концов отрезка проведены прямые ME и HP, перпендикулярные к плоскости α. HP=4 см; ME=12 см; HK=5 см. Найдите отрезок PE.

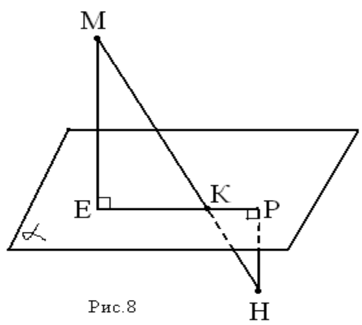
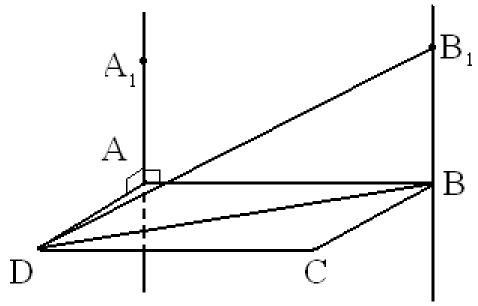
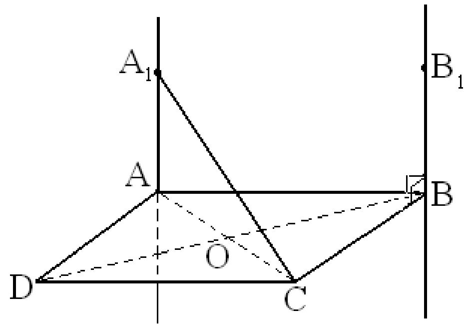


Рис.8

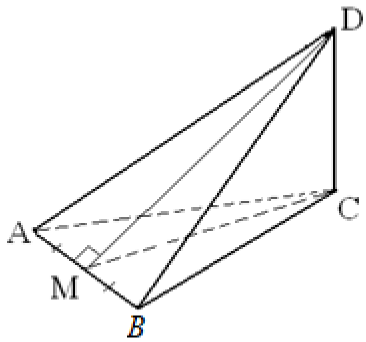
77. а) Через вершины A и B прямоугольника $ABCD$ проведены параллельные прямые AA_1 и BB_1, не лежащие в плоскости прямоугольника. Известно, что $AA_1 \perp AB$, $AA_1 \perp AD$. Найдите B_1B, если B_1D=25 см, AB=12 см, AD=16 см.



б) Через вершины A и B ромба $ABCD$ проведены параллельные прямые AA_1 и BB_1, не лежащие в плоскости ромба. Известно, что $BB_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AB$. Найдите A_1A, если A_1C=13 см, BD=16 см, AB=10 см.



в) В треугольнике ΔABC; $AB=AC=BC$; $CD \perp (ABC)$; $AM=MB$; DM=15дм, CD=12 дм. Найти: $S_{\Delta ADB}$.



78. а) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 5. На рёбрах SA, AB, BC взяты точки P, Q, R соответственно так, что $PA=AQ=RC$=2.

1) Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD.

2) Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR.

б) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что AK=1. Точки M и L – середины рёбер A_1C_1и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

1) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

2) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.

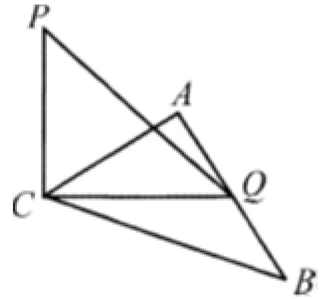
в) В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На ребрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём BK=4, C_1L=5. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

1) Докажите, что прямая AC_1 перпендикулярна плоскости γ.

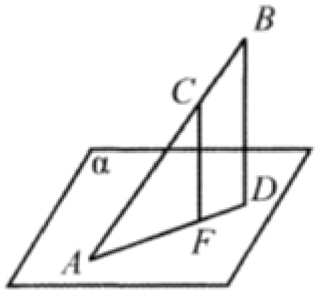
2) Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости γ.

79. На готовых чертежах.

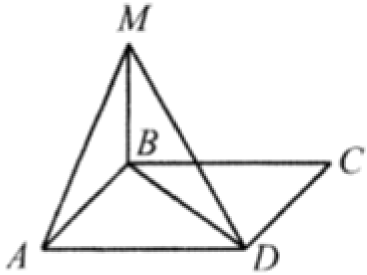
а) Дано: $CP\perp ABC$; $\angle ACB=90^0$; $AQ=QB$, $AB=4$, $PQ=3$. Найти CP.



б) Дано: $AD\in\alpha$, $BD\perp\alpha$, $CF\perp\alpha$; $AF:FD=7:3$; $BD=6$. Найти CF.



в) Дано: $BM\perp BC$, $BM\perp AB$, $ABCD$-прямоугольник, $DM=8$, $\angle BDM=30^0$, $\angle MAB=45^0$. Найти P_{ABCD}.



80. а) Точка S лежит вне плоскости прямоугольника $ABCD$. Известно, что $AB=8$, $BC=12$, $SA=6$, $SB=10$, $SD=6\sqrt{5}$. SA перпендикулярна плоскости ABC. Найдите расстояние от точки A до плоскости SCB.

б) Точка S лежит вне плоскости прямоугольника $ABCD$. Известно, что $AB=6\sqrt{21}$, $BC=5$, $SA=12$, $SB=30$, $SD=13$. Прямая SA перпендикулярна плоскости ABC. Найдите расстояние от точки A до плоскости SCB.

в) В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 5. На ребрах SA, AB, BC взяты точки P, Q, R соответственно так, что $PA=AQ=RC=2$. Плоскость PQR перпендикулярна ребру SD. Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR.

Занятие 14. Углы между прямой и плоскостью

<u>Повторяем теорию</u>

Плоскость – это бесконечная плоская поверхность, не имеющая толщины и неограниченно расширяющаяся во все стороны (Рис 26).

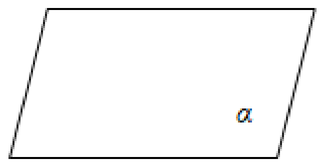


Рис 26

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости (Рис 27).

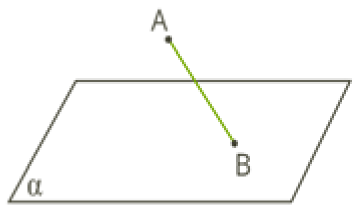


Рис 27

Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием наклонной.*

AB – наклонная,

B – основание наклонной.

Перпендикуляром, проведенным из данной точки к данной плоскости, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, и лежащей на прямой, перпендикулярной плоскости (Рис 28).

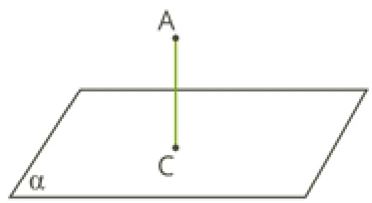


Рис 28

Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием перпендикуляра.*

AC – перпендикуляр,

C – основание перпендикуляра.

Расстояние от точки до плоскости называется *длиной перпендикуляра,* проведенного из этой точки к плоскости.

Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется *проекцией наклонной* (Рис 29).

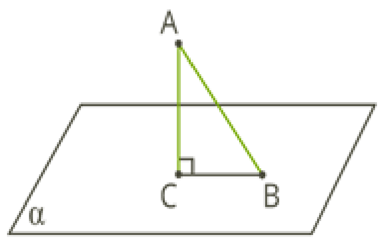


Рис 29

CB – проекция наклонной *AB* на плоскость α. Треугольник *ABC* прямоугольный.

Углом между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и её проекцией на плоскость (Рис 30).

$\angle CBA$ – угол между наклонной и плоскостью α.

Если $AD>AB$, то $DC>BC$.

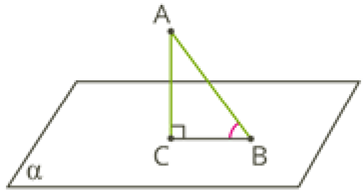


Рис 30

Если из данной точки к данной плоскости провести несколько наклонных, то большей наклонной соответствует большая проекция. $\angle DAB$ – угол между наклонными;

$\angle DCB$ – угол между проекциями (Рис 31).

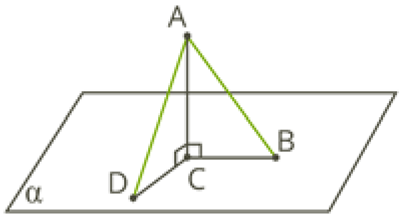


Рис 31

Отрезок DB – расстояние между основаниями наклонных (Рис 32).

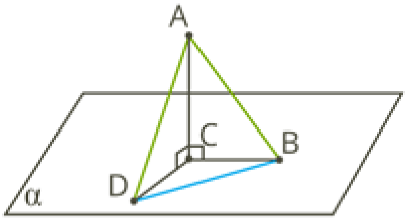


Рис 32

Проверяем себя

Т44. Заполните пропуски:

а) Углом между наклонной к плоскости и плоскостью называют угол между ______________________ и её проекцией на плоскость.

б) Если прямая _______________ плоскости, то угол между прямой и плоскостью считается равным 90^0.

Т45. Укажите верные утверждения:

а) проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную этой прямой является отрезок;

б) проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную этой прямой является прямая;

в) проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную этой прямой является наклонная.

Т46. Укажите неверные утверждения:

а) проекцией прямой на плоскость, может быть точка;

б) перпендикуляр, опущенный из точки, не принадлежащей данной плоскости, длиннее наклонной, проведенной из этой же точки к данной плоскости;

в) углом между прямой и плоскостью называется угол именно между прямой и любой прямой в плоскости.

<u>Решаем задачи</u>

Чтобы научиться находить угол между прямой и плоскостью при работе с многогранниками, обосновывать или опровергать выдвигаемые предположения, рассмотрите алгоритм:

– Найдите точку пересечения прямой и плоскости.

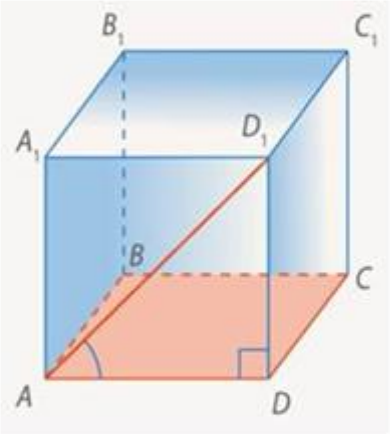
– Найдите точку прямой, не лежащую в плоскости.

– Найдите проекцию данной точки на плоскость.

– Соедините эти точки. Полученная прямая – это и есть проекция прямой на плоскость.

– Выделите цветом полученный угол.

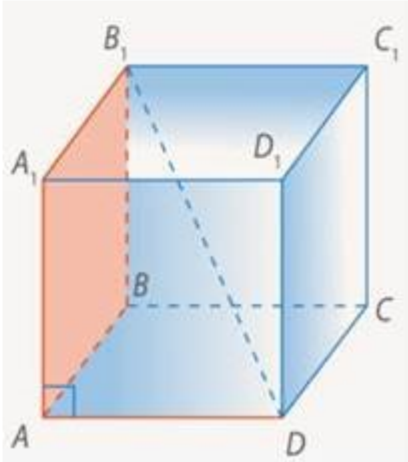
81. а) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямой AD_1 и плоскостью ABC.



б) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. $AB=8$, $AD=6$, $AA_1=\frac{10}{\sqrt{3}}$. Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью ABC.

в) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=3$, $AD=4$, $AA_1=5$. Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью ABC.

82. а) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямой B_1D и плоскостью ABB_1.



б) Из точки O к плоскости α проведена наклонная, длина которой равна 17 см, проекция наклонной равна 15 см. На каком расстоянии от плоскости находится точка O?

в) В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью DAB_1.

83. а) В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой DB_1 и плоскостью CC_1D_1.

б) В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью AB_1D_1.

в) В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите синус угла между прямой AC_1 и плоскостью DCC_1.

84. а) Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Найдите угол между прямой CD и плоскостью ABD.

б) Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Точка M – середина ребра AB. Найдите угол между прямой DM и плоскостью ADC.

в) Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Точки K и N – середины рёбер BD и AC соответственно. Найдите угол между прямой KN и плоскостью ADC.

85. а) Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Все рёбра пирамиды равны. Найдите угол между прямой AC и плоскостью ASB.

б) Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Все рёбра пирамиды равны, K – середина бокового ребра SC. Найдите угол между прямой AK и плоскостью BSC.

в) Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Все рёбра пирамиды равны. Найдите угол между прямой SA и плоскостью CSD.

86. а) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1. Точка M – середина ребра BC. Найдите угол между прямой A_1M и плоскостью ABC.

б) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1. Точка M – середина ребра BC. Найдите угол между прямой C_1M и плоскостью ABB_1.

в) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1. Точка M – середина ребра BC. Найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью A_1C_1M.

Занятие 15. Углы между прямой и плоскостью

Повторяем теорию

Проекция – это геометрическое изображение на плоскости, полученное проведением перпендикуляров из всех точек фигуры на плоскость.

Под углом между прямой и плоскостью в пространстве мы подразумеваем угол между прямой и её отображением на плоскость (Рис 33).

Определение. Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.

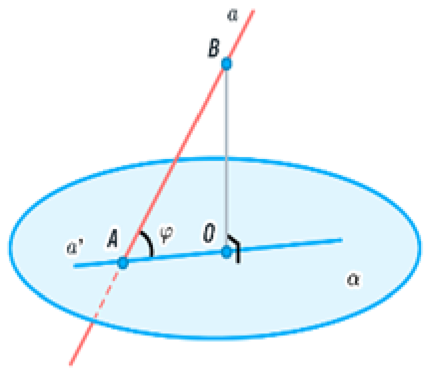


Рис. 33

Важное уточнение

1. Угол между прямой и плоскостью берется наименьший из двух углов между прямой и её проекцией на эту плоскость.

2. Если прямая перпендикулярна плоскости, то можно считать, что угол между ними равен 90°, что следует из определения перпендикулярности прямой и плоскости.

3. Если прямая параллельна плоскости, то у них нет ни одной общей точки, а значит, угол между ними не определяется.

Свойство угла между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью меньше любого из углов между прямой и произвольной прямой в плоскости.

Проверяем себя

Т47. Заполните пропуски:

а) Угол между прямой и плоскостью – это угол между _____________ и её _______________на эту плоскость.

б) *Проекция* — это геометрическое изображение на плоскости, полученное проведением _____________ из всех точек ___________ на плоскость.

Т48. Укажите верные утверждения:

а) если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между прямой и плоскостью не определяется;

б) угол между прямой и плоскостью меньше любого из углов между прямой и произвольной прямой в плоскости;

в) угол между прямой и плоскостью больше любого из углов между прямой и произвольной прямой в плоскости.

Т49. Укажите неверные утверждения:

а) из двух углов между прямой и плоскостью выбираем больший из углов между данной прямой и её проекцией на эту плоскость;

б) если прямая параллельна плоскости, то угол между ними не определяется;

в) если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ними равен 90°.

Решаем задачи

87. а) Дан единичный тетраэдр *ABCD*. Найдите косинус угла между прямой *DC* и плоскостью *ABC*.

б) В правильной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой *SA* и плоскостью *SBD*.

в) В правильной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой *AB* и плоскостью *SAD*.

88. а) Высота правильной треугольной пирамиды равна стороне основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

б) Высота основания правильной треугольной пирамиды в 1,5 раза больше высоты пирамиды. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.

в) Высота правильной треугольной пирамиды втрое меньше стороны основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

89. а) Боковые рёбра правильной треугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45^0 и равны $2\sqrt{6}$. Найдите сторону основания.

б) Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол, равный 30^0. Найдите сторону основания, если высота пирамиды равна 5.

в) Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол, равный 60^0. Найдите высоту пирамиды, если сторона основания равна 6.

90. а) В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны. Найдите угол наклона бокового ребра к основанию. Ответ дайте в градусах.

б) В правильной четырёхугольной пирамиде диагональ основания равна боковому ребру. Найдите угол между прямой, содержащей боковое ребро, и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

в) В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна половине ребра основания. Найдите угол между плоскостью основания и прямой, проходящей через середину ребра основания и вершину пирамиды, Ответ дайте в градусах.

Задачи с развернутым ответом

91. а) В основании четырёхугольной пирамиды *SABCD* лежит прямоугольник *ABCD* со сторонами $AB=4$ и $BC=3$. Боковое ребро *AS* перпендикулярно к плоскости основания и равно $\sqrt{11}$. Найдите угол между прямой *SC* и плоскостью *ASB*.

б) В основании четырёхугольной пирамиды *SABCD* лежит прямоугольник *ABCD* со сторонами $AB=5$ и $BC=12$. Боковое ребро *AS* перпендикулярно к плоскости основания и равно $\sqrt{27}$. Найдите синус угла между прямой *SC* и плоскостью *ASB*.

в) В основании четырёхугольной пирамиды *SABCD* лежит прямоугольник *ABCD* со сторонами $AB=8$ и $BC=6$. Боковое ребро *AS* перпендикулярно к плоскости основания и равно $\sqrt{21}$. Найдите косинус угла между прямой *SC* и плоскостью *ASD*.

Занятие 16. Проверочная работа

1 вариант

1. Основание AD трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α. Через точки B и C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках E и F соответственно.

а) Каково взаимное положение прямых EF и AB?

б) Чему равен угол между прямыми EF и AB, если $\angle ABC=150^0$? Ответ поясните.

2. Плоскость β пересекает стороны MP и KP треугольника MPK соответственно в точках N и E, причём $MK \parallel \beta$. Найдите NE, если $MN:NP=3:5$ и $MK=12$ см.

3. Через вершину A квадрата $ABCD$ проведена прямая KA, не лежащая в плоскости квадрата. Найдите угол между KA и CD, если $\angle AKB=85^0$, $\angle ABK=45^0$.

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $DB_1=21$ см, $CD=16$ см, $B_1C_1=11$ см. Найти длину ребра BB_1 и синус угла между диагональю DB_1 и плоскостью $ABCD$.

5. Через вершину равностороннего треугольника проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Найдите расстояние между этой прямой и противоположной стороной треугольника, если его площадь равна $12\sqrt{3}$.

2 вариант

1. Треугольники ABC и ADC лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону AC. Точка P – середина стороны AD, а K – середина стороны DC.

а) Каково взаимное положение прямых PK и AB?

б) Чему равен угол между прямыми PK и AB, если $\angle ABC=40^0$ и $\angle BCA=80^0$? Ответ поясните.

2. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D такая, что $BD:BA=1:3$. Плоскость, параллельная прямой AC и проходящая через точку D, пересекает отрезок BC в точке D_1. Найдите AC, если $DD_1= 4$ см.

3. Точка M не лежит в плоскости ромба $ABCD$. Найдите угол между MC и AD, если $\angle MBC=70^0$, $\angle BMC=65^0$.

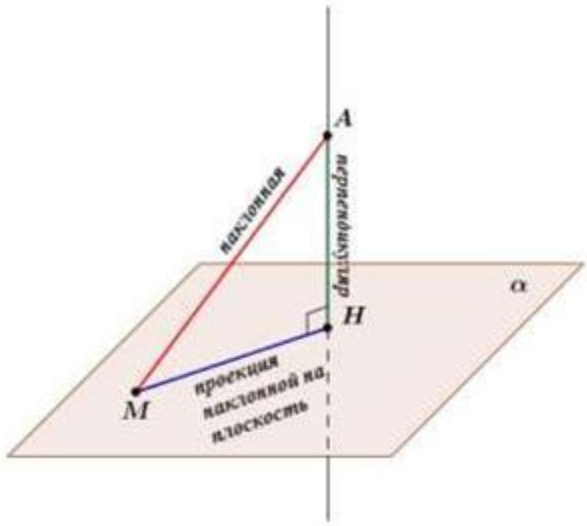
4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, CA_1=11 см, C_1D_1=2 см, A_1D_1=6 см. Найти длину ребра CC_1 и синус угла между диагональю CA_1 и плоскостью $ABCD$.

5. Через вершину равностороннего треугольника проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Найдите расстояние между этой прямой и противоположной стороной треугольника, если его периметр равен $42\sqrt{3}$.

Занятие 17. Расстояние от точки до плоскости

<u>Повторяем теорию</u>

Проведем через точку A, не лежащую в данной плоскости прямую, перпендикулярную к этой плоскости и обозначим буквой H точку пересечения этой прямой с плоскостью. Отрезок AH называется *перпендикуляром*, проведенным из точки A к плоскости, а точка H – *основанием перпендикуляра.*



Отметим в плоскости какую-нибудь точку M, отличную от H, и проведем отрезок AM. Он называется *наклонной,* проведенной из точки A к плоскости, а точка M – *основанием наклонной***.** Отрезок HM – называется *проекцией наклонной* на плоскость.

Перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости.

Наклонная, ее проекция и перпендикуляр образуют прямоугольный треугольник ABC, и длины этих отрезков по теореме Пифагора связаны отношением $AC^2=BC^2+AB^2$.

Длина перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости α, называется *расстоянием от точки A до плоскости α.*

Если из одной точки к плоскости проведены две наклонные, то равным наклонным соответствуют равные проекции, и наоборот: если проекции наклонных равны, то и сами наклонные равны.

Отсюда следует, что, *если в пирамиде боковые рёбра равны, то высота попадает в центр описанной вокруг основания окружности* (Рис. 34).

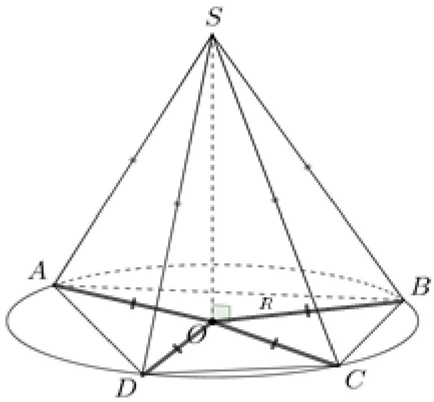


Рис. 34

З а м е ч а н и е 1. Если две плоскости параллельны, то все точки одной плоскости равноудалены от другой плоскости. Т.е. расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется *расстоянием между параллельными плоскостями* (Рис. 35).

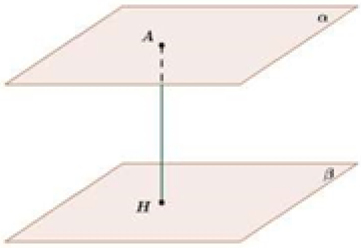


Рис. 35

З а м е ч а н и е 2. Если прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от этой плоскости. Т.е. расстояние от произвольной точки этой прямой до плоскости называется *расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью* (Рис. 36).

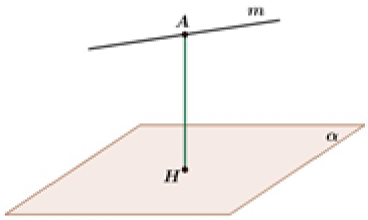


Рис. 36

З а м е ч а н и е 3. *Расстоянием между скрещивающимися прямыми* называется расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую, параллельно первой (Рис. 37).

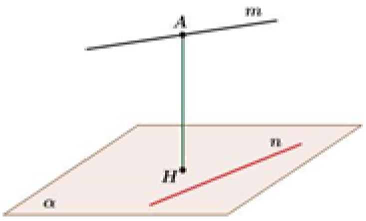


Рис. 37

Проверяем себя

Т50. Заполните пропуски:

а) Отрезок, проведенный из точки, не лежащей в плоскости, под прямым углом к этой плоскости, называется ___________.

б) Любой, отличный от перпендикуляра, отрезок, проведённый из точки к плоскости, называется ___________.

в) Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки к плоскости, называется ____________.

Т51. Укажите верные утверждения:

а) наклонная, ее проекция и перпендикуляр образуют тупоугольный треугольник;

б) если проекции наклонных равны, то равны и сами наклонные;

в) перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, больше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости.

Т52. Укажите неверные утверждения:

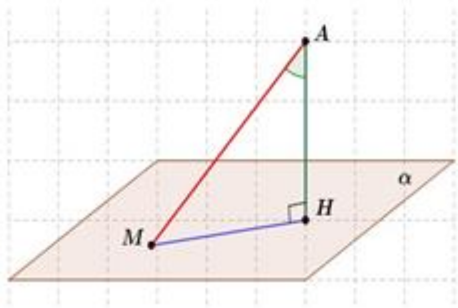
а) расстояние от точки A до плоскости α – это длина перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости α;

б) если из одной точки к плоскости проведены две наклонные, то больше та наклонная, проекция которой меньше;

в) расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью – *это* расстояние от произвольной точки этой прямой до плоскости.

Решаем задачи

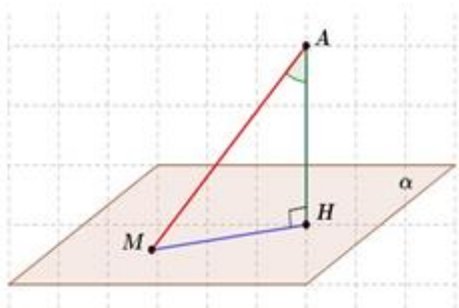
92. а) Найдите длину проекции наклонной AM, проведённой к плоскости α, если длина перпендикуляра AH к этой плоскости равна 5, а длина самой наклонной – 15.



б) Найдите длину перпендикуляра AH, проведённого из точки A к плоскости α, если длина наклонной AH и её проекции на эту плоскость равны соответственно 13 и 12.

в) Найдите длину наклонной AM, проведённой из точки A к плоскости α, если длина проекции наклонной и перпендикуляра AH к этой плоскости равны соответственно 35 и 12.

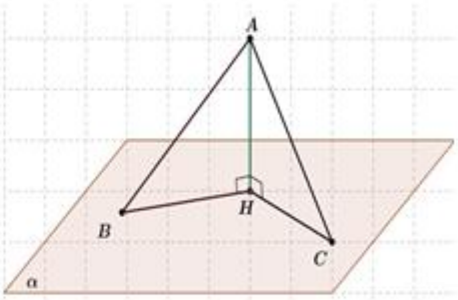
93. а) Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AH и наклонная AM. AM=27, угол между наклонной и перпендикуляром равен 60^0. Найдите длину перпендикуляра AH.



б) Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AH и наклонная AM. AH=21, угол между наклонной и её проекцией на плоскость равен 30^0. Найдите длину наклонной AM.

в) Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AH и наклонная AM. MH=13, угол между наклонной и её проекцией на плоскость равен 60^0. Найдите длину наклонной AM.

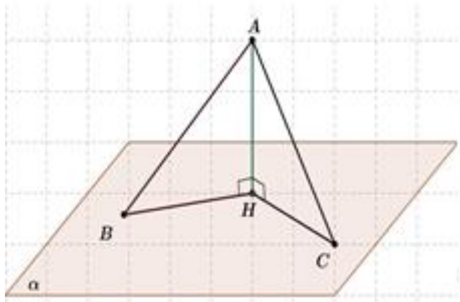
94. а) Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AH и наклонные AB и AC. Известно, что AB=10, AC=12, BH=8. Найдите проекцию наклонной AC.



б) Из точки A, не лежащей в плоскости α, проведены к этой плоскости перпендикуляр AH и наклонные AB и AC так, что AB=17, AC=20, AH=10. Найдите проекции наклонных AB и AC.

в) Из точки A, не лежащей в плоскости α, проведены к этой плоскости перпендикуляр AH=8 и наклонные AB и AC, длины которых равны соответственно 10 и 17. Найдите проекции наклонных AB и AC.

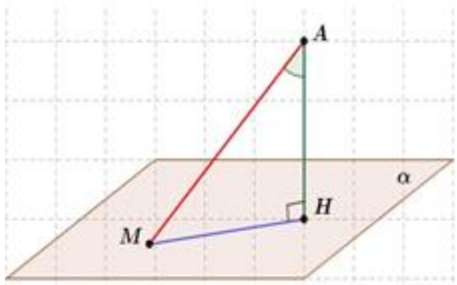
95. а) Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AH и наклонные AB и AC. AB=12, $AC=12\sqrt{2}$, угол между наклонной AB и её проекцией на плоскость равен 45^0. Найдите угол, образованный перпендикуляром и наклонной AC.



б) Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AH и наклонные AB и AC. Углы, образованные перпендикуляром и наклонными равны соответственно 60^0 и 45^0. Найдите проекции наклонных на эту плоскость.

в) Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AH и наклонные AB и AC. Углы, образованные перпендикуляром и наклонными равны соответственно 60^0 и 45^0. Длина перпендикуляра равна 30. Найдите длины наклонных на эту плоскость.

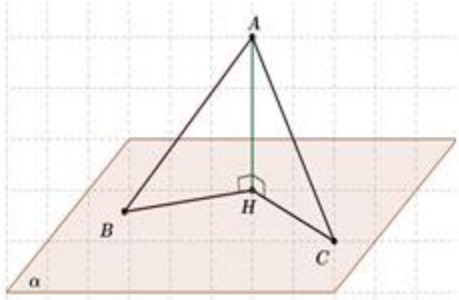
96. а) Угол между перпендикуляром AH и наклонной AM, проведёнными из точки A к плоскости α, равен 60^0. Проекция наклонной на эту плоскость равна $8\sqrt{3}$. Найдите AM.



б) Угол между наклонной AM и её проекцией MH на плоскость α равен 60^0. Длина проекции равна $\sqrt{3}$. Найдите длину перпендикуляра AH к этой плоскости.

в) Угол между перпендикуляром AH и наклонной AM, проведёнными из точки A к плоскости α, равен 30^0. $AH=\sqrt{3}$, найдите длину проекции наклонной на эту плоскость.

97. а) Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AH и наклонные AB и AC. Длины наклонных равны соответственно 15 и 41. Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если проекции наклонных на эту плоскость пропорциональны числам 3 и 10.



б) Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AH и наклонные AB и AC. Длины наклонных равны соответственно 10 и 17. Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если проекции наклонных на эту плоскость пропорциональны числам 2 и 5.

в) Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AH и наклонные AB и AC. Длины наклонных равны соответственно 12 и 18. Найдите проекции наклонных на эту плоскость, если одна из них на 10 больше другой.

98. а) Один конец данного отрезка лежит в плоскости α, а другой находится от неё на расстоянии 12 см. Найдите расстояние от середины данного отрезка до плоскости α.

б) Один конец данного отрезка лежит в плоскости α, а другой находится на некотором расстоянии от неё. Найдите это расстояние, если расстояние от середины данного отрезка до плоскости α равно 3,5 см.

в) Угол между перпендикуляром и наклонной, проведёнными из одной и той же точки к плоскости α, равен 30°. Найдите расстояние от середины наклонной до плоскости, если проекция наклонной на эту плоскость равна 10 см.

99. а) Концы отрезка отстоят от плоскости α на расстояниях 2 см и 9 см. Найдите расстояние от середины отрезка до плоскости α.

б) Расстояние от одного из концов отрезка до плоскости α равно 3 см. Найдите расстояние от другого конца отрезка до плоскости, если расстояние от его середины до этой плоскости равно 5 см.

в) Концы отрезка отстоят от плоскости α на расстояниях 3,25 см и 7,25 см. Найдите расстояние от середины отрезка до плоскости α.

Задачи с развернутым ответом

100. Расстояние от точки D до каждой из вершин правильного треугольника MNP равно 16 см. Найдите расстояние от точки D до плоскости MNP, если MN=12 см.

101. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Из точки O проведён к плоскости квадрата перпендикуляр OP. Найти расстояние от точки P до стороны BC, если AD=6 см, OP=4 см.

Занятие 18. Перпендикуляр и наклонная к плоскости

Повторяем теорию

Теорема о трёх перпендикулярах: прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной (Рис. 38).

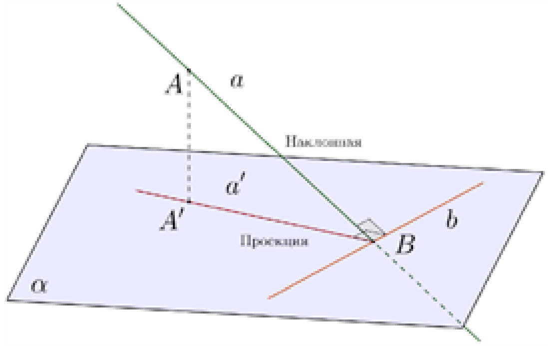


Рис. 38

Важно отметить, что прямая b не обязана проходить через точку B.

Обратная теорема: прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к её проекции.

Прямоугольной или ортогональной проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, проведённого из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости.

Чтобы построить *проекцию фигуры* на плоскость, нужно построить проекции всех точек этой фигуры на данную плоскость.

Пусть на плоскость α мы спроецировали многоугольник, тогда верна формула: *отношение площади проекции фигуры $S_{пр}$ к площади фигуры S равно косинусу угла γ между плоскостью α и плоскостью, в которой лежит многоугольник* (Рис. 39).

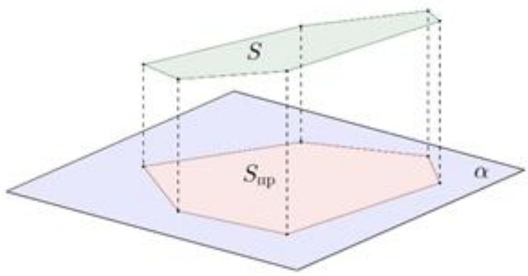


Рис. 39

Проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, *является прямая.*

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и её проекцией на плоскость. Угол φ_0 между данной прямой AM и плоскостью α – *наименьший из всех углов φ,*

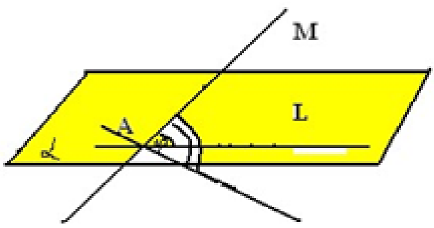


Рис. 40

которые данная прямая образует с прямыми, проведёнными в плоскости α через точку A (Рис. 40).

Если прямая перпендикулярна к плоскости, то ее проекцией на эту плоскость является точка пересечения этой прямой с плоскостью. В таком случае *угол между прямой и плоскостью равен* $90°$. *Если данная прямая параллельна плоскости***,** то ее проекцией на плоскость является прямая, параллельная данной. В этом случае считают, что *угол между прямой и плоскостью равен* 0^0.

Проверяем себя

Т53. Заполните пропуски:

а) Если две плоскости параллельны, то все точки одной плоскости ______________ от другой плоскости.

б) *Расстоянием между скрещивающимися прямыми* называется _____________ между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, _____________ через другую прямую, параллельно первой.

в) Расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется _____________ *между параллельными плоскостями*.

Т54. Восстановите утверждение о соотношении перпендикуляра и наклонной из частей:

1) проведённый из данной точки к плоскости; 2) проведённой из той же точки; 3) меньше любой наклонной; 4) перпендикуляр.

а) 4231;

б) 4132;

в) 2134

Т55. Укажите неверные утверждения:

а) если в пирамиде боковые рёбра равны, то высота попадает в центр описанной вокруг основания окружности;

б) если из одной точки к плоскости проведены две наклонные, то больше та наклонная, проекция которой больше;

в) расстояние от точки A до плоскости α – это длина наклонной, проведённой из точки A к плоскости α.

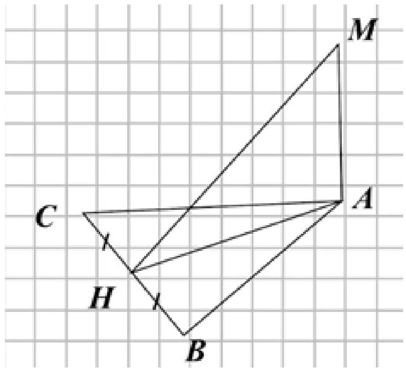
Решаем задачи

102. а) Из точки O к плоскости α проведена наклонная, длина которой равна 17 см, проекция наклонной равна 15 см. На каком расстоянии от плоскости находится точка O?

б) Точка O находится на расстоянии 12 дм от плоскости α. Найдите длину наклонной, проведённой из точки O к этой плоскости, если длина её проекции равна 35 дм.

в) Найдите длину проекции наклонной, проведённой из точки O к плоскости α, если длина наклонной равна 29 см, а расстояние от точки O до этой плоскости равно 21 см.

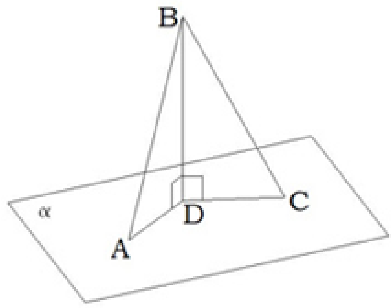
103. а) Прямая AM перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника ABC, точка H - середина стороны BC. Найдите угол между прямой MH и плоскостью ABC, если $AM=a$, $HB=a$.



б) Прямая AM перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника ABC, точка H – середина стороны BC. Найдите угол между прямой MH и плоскостью ABC, если $AM=5$, $HB=5$.

в) Прямая AM перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника ABC, точка H – середина стороны BC. Найдите угол между прямыми MH и MA, если $AM=a$, $HB=a$.

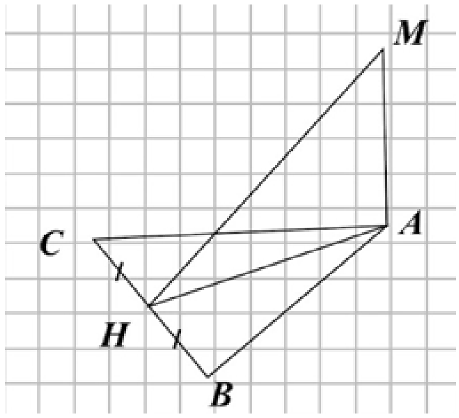
104. а) Известно, что отрезок BD перпендикулярен плоскости α, $\angle BAD=30^0$, $\angle BCD=60^0$. Укажите меньшую из проекций наклонных на плоскость α.



б) Известно, что отрезок BD перпендикулярен плоскости α, $\angle BAD=30^0$, $\angle BCD=60^0$. Укажите большую из наклонных, проведённых из точки B к плоскости α.

в) Известно, что отрезок BD перпендикулярен плоскости α, $\angle BAD=30^0$, $\angle BCD=60^0$, и AD большая из проекций наклонных, проведённых из точки В к плоскости α. Укажите меньшую из наклонных.

105. а) Прямая AM перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника ABC, точка H середина стороны BC. Найдите угол MHB.



б) Прямая AM перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника ABC, точка H середина стороны BC. Назовите все прямые углы.

в) Прямая AM перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника ABC, точка H середина стороны BC. Постройте и назовите все острые углы.

106. а) Из точки M к плоскости α проведены две наклонные, длины которых 101 см и 29 см. Расстояние от точки M до плоскости α равно 20 см. Найдите отношение проекций наклонных на эту плоскость (меньшей к большей).

б) Из точки M к плоскости α проведены две наклонные, длины которых 13 см и 15 см. Расстояние от точки M до плоскости α равно 12 см. Найдите отношение проекций наклонных на эту плоскость (меньшей к большей).

в) Из точки M к плоскости α проведены две наклонные, длины которых 41 см и 15 см. Расстояние от точки M до плоскости α равно 9 см. Найдите отношение проекций наклонных на эту плоскость (меньшей к большей).

Задачи с развернутым ответом

107. Отрезок AB длины 16 см пересекает плоскость α в точке O. Расстояния от концов отрезка до плоскости α соответственно равны 3 см и 5 см. Найдите острый угол, который образует отрезок AB с плоскостью α.

108. Дан треугольник ABC. $\angle ACB=90^0$. Точка O – центр окружности, описанной около этого треугольника. $AM=MC$. Отрезок OD перпендикулярен плоскости треугольника. $AB=10$, $AC=6$, $DO=2\sqrt{3}$. Найдите MD.

Занятие 19. Двугранный угол, линейный угол двугранного угла

Повторяем теорию

Определение 1. *Двугранным углом* называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a, не принадлежащими одной плоскости.

Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются *гранями*. Прямая a – общая граница полуплоскостей – называется *ребром* двугранного угла.

Определение 2. *Линейным углом двугранного угла* называется угол, образованный лучами с вершиной на граничной прямой, стороны которого лежат на гранях двугранного угла и перпендикулярны граничной прямой.

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

Все линейные углы двугранного угла равны друг другу (Рис. 41).

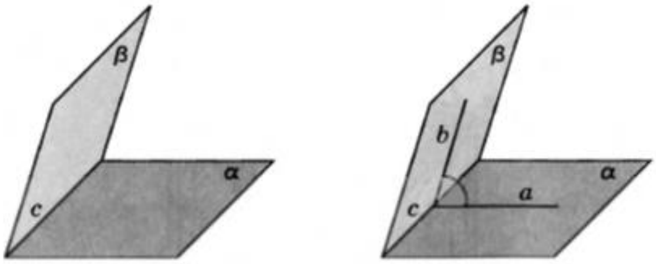


Рис. 41

Величина двугранного угла принадлежит интервалу $0^0<\alpha<180^0$. Величина угла между пересекающимися плоскостями принадлежит промежутку $0^0<\alpha<90^0$. Угол между двумя параллельными плоскостями считается равным нулю.

Чтобы построить линейный угол между двумя плоскостями, часто находят отрезок, перпендикулярный к одной из плоскостей, и концы которого лежат в этих плоскостях. Затем, из основания этого перпендикуляра проводят прямую перпендикулярно к линии пересечения этих двух плоскостей, и тогда перпендикуляр из другого конца отрезка к линии пересечения плоскостей автоматически попадет в ту же точку (по теореме о трех перпендикулярах).

В некоторых задачах является эффективным метод, при котором вместо угла между пересекающимися плоскостями ищется угол *между плоскостями, параллельными рассматриваемым* (или между одной из данных плоскостей и плоскостью, параллельной другой из них).

Также не следует забывать, что *угол между двумя плоскостями равен углу между прямыми, которые к этим плоскостям перпендикулярны,* т.е. нахождение угла между плоскостями можно свести к нахождению угла между прямыми.

Проверяем себя

Т56. Вставьте пропущенные слова:

а) Общая граница полуплоскостей называется ______________ ______________ угла.

б) Гранями двугранного угла являются _______________, не лежащие в одной плоскости.

в) Все линейные углы двугранного угла _____________ друг другу.

г) Величиной двугранного угла называется ____________ ____________ угла.

Т57. Выберите верное утверждение:

а) Верно ли, что угол BAC – линейный угол двугранного угла, если лучи AB, AC перпендикулярны его ребру?

б) Верно ли, что угол BAC – линейный угол двугранного угла, если лучи AB, AC лежат на гранях двугранного угла?

в) Верно ли, что угол BAC – линейный угол двугранного угла, если лучи AB, AC перпендикулярны его ребру, а точки B и C лежат на его гранях?

Т58. Выберите верное утверждение:

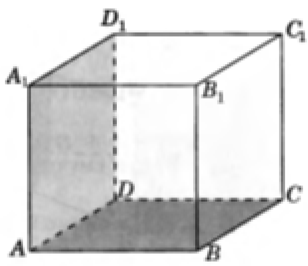
а) Угол ABC – линейный угол двугранного угла с ребром a. Тогда прямая a перпендикулярна плоскости ABC?

б) Линейный угол двугранного угла равен 80^0. Тогда в одной из граней угла существует прямая, перпендикулярная другой грани.

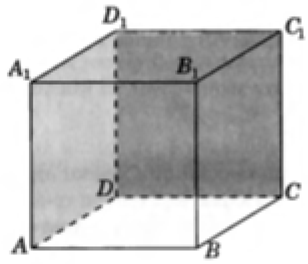
в) Все прямые, перпендикулярные данной плоскости и пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости.

Решаем задачи

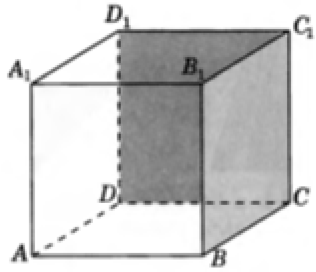
109. а) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и ADD_1.



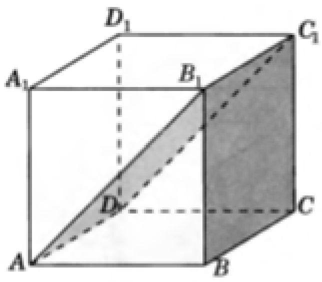
б) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол плоскостями CDD_1 и ADD_1.



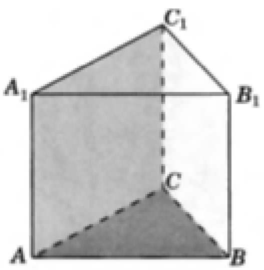
в) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями CDD_1 и BCC_1.



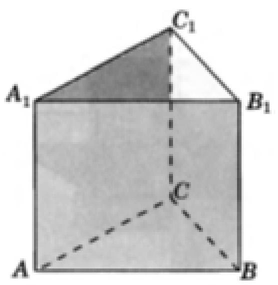
110. а) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями BCC_1 и AB_1C_1.



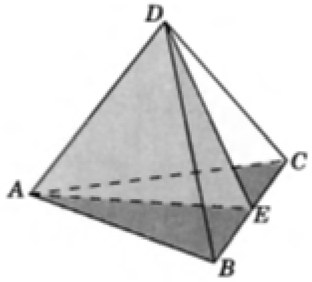
б) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ найдите угол между плоскостями ABC и ACC_1.



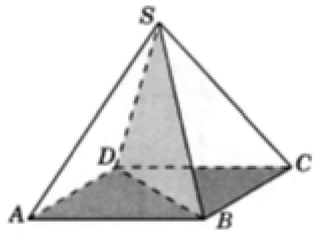
в) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ найдите угол между плоскостями ABB_1 и ACC_1.



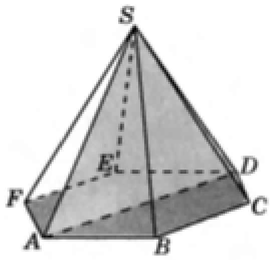
111. а) В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E – середина ребра BC. Найдите угол между плоскостями ABC и ADE.



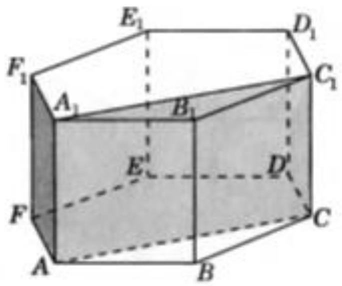
б) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ найдите угол между плоскостями ABC и SBD.



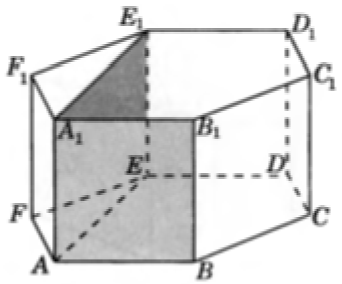
в) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ найдите угол между плоскостями ABC и SAD.



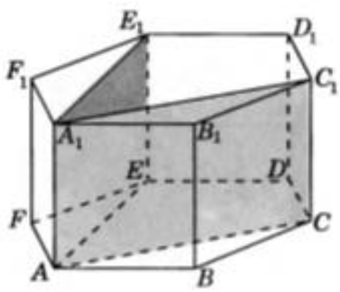
112. а) В правильной шестиугольной призме $ABC....F_1$ найдите угол между плоскостями AFF_1 и ACC_1.



б) В правильной шестиугольной призме $ABC....F_1$ найдите угол между плоскостями ABB_1 и AEE_1.



в) В правильной шестиугольной призме $ABC....F_1$ найдите угол между плоскостями ACC_1 и AEE_1.



Задачи с развернутым ответом

113. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка S – вершина. Точка M – середина ребра SA, точка K – середина ребра SB. Найдите угол между плоскостями CMK и ABC, если $SC=6$, $AB=4$.

114. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Все рёбра пирамиды равны. Найдите угол между плоскостями SAD и SBC.

Занятие 20. Двугранный угол, линейный угол двугранного угла

Повторяем теорию

Угол между двумя плоскостями равен углу между прямыми, которые к этим плоскостям перпендикулярны, т.е. нахождение угла между плоскостями можно свести к нахождению угла между прямыми (Рис. 42).

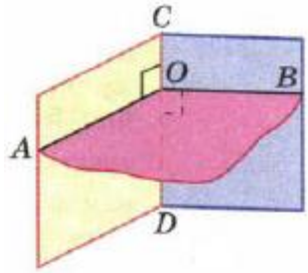


Рис. 42

Для нахождения угла между двумя плоскостями можно использовать *теорему о площади ортогональной проекции многоугольника.*

При применении этого метода угол φ между плоскостями α и β можно вычислить, используя формулу $S_{пр}\cos\varphi = S$, где S – площадь многоугольника, лежащего в плоскости α, $S_{пр}$ – площадь его ортогональной проекции на плоскость β (Рис. 43).

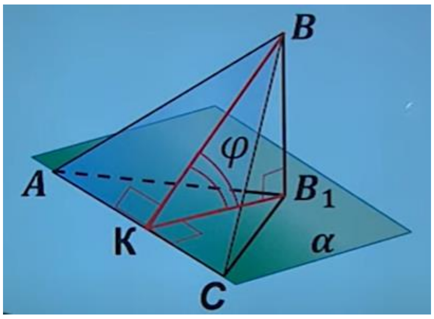


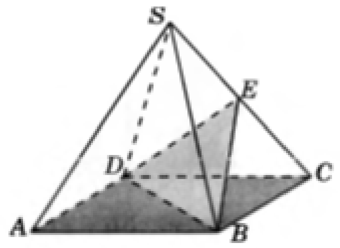
Рис. 43

Обычно этот метод применяют при вычислении угла между плоскостью сечения и плоскостью какой-либо грани многогранника (часто в качестве такой грани выступает основание пирамиды или призмы). Этот метод применяют, когда нахождение площадей является более простой задачей, чем непосредственное вычисление двугранного угла.

Нахождение угла между плоскостями координатным методом. Так как угол между двумя плоскостями равен углу между прямыми, которые к этим плоскостям перпендикулярны, то можно сказать, что угол между плоскостями равен углу между нормальными векторами этих плоскостей. Поэтому если удалось найти нормальные вектора этих плоскостей n_1 и n_2, то используя скалярное произведение находят косинус угла между ними, который будет являться косинусом угла между плоскостями. Если косинус получился равен отрицательному значению, то берем это значение по модулю.

Проверяем себя

Т59. На чертеже изображена правильная пирамида $SABCD$, все рёбра которой равны 1, точка E – середина ребра SC. Вставьте пропущенные слова.



а) Плоскости ABC и BED пересекаются по прямой ____________.

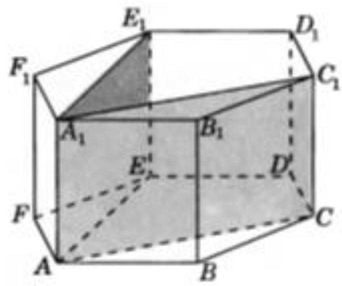
б) По условию пирамида правильная, значит ΔSBC _____________ ΔSDC, медианы BE и DE _______________ .

в) Треугольник BED _______________________________.

г) Высота из вершины E ΔBED пересекает BD в __ ____________. Диагонали основания AC и BD пересекаются под ____________ ______ и точкой пересечения _______ _________.

д) Пусть точка пересечения диагоналей – точка O. Тогда угол EOC – _____ ________ _______________ угла между плоскостями ABC и _____.

Т60. На чертеже изображена правильная шестиугольная призма. Выберите неверное утверждение:



а) Четырёхугольник ACC_1A_1 является параллелограммом.

б) AC перпендикулярно AA_1.

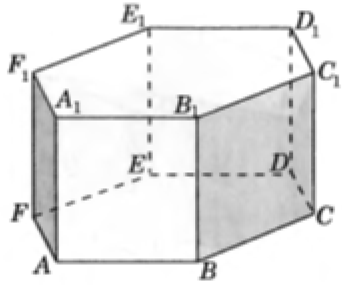
в) AE перпендикулярно AF.

г) Угол CAE – линейный угол двугранного угла между плоскостью CAA_1E и плоскостью основания.

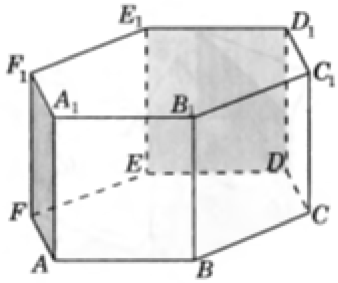
д) Угол CAE равен 60^0.

Решаем задачи

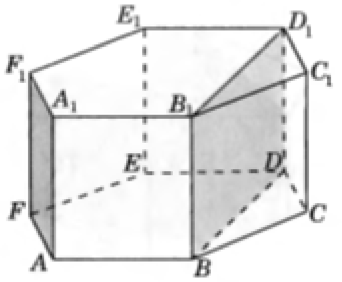
115. а) В правильной шестиугольной призме $ABC....F_1$ найдите угол между плоскостями AFF_1 и BCC_1.



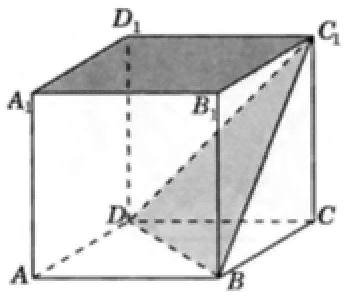
б) В правильной шестиугольной призме $ABC....F_1$ найдите угол между плоскостями AFF_1 и DEE_1.



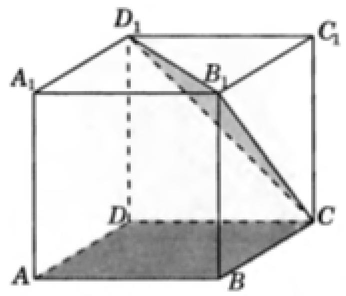
в) В правильной шестиугольной призме $ABC....F_1$ найдите угол между плоскостями AFF_1 и BDD_1.



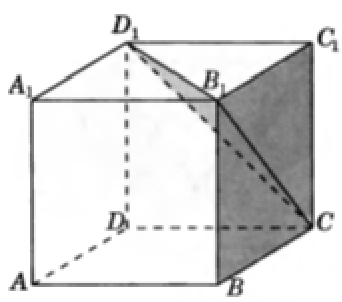
116. а) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и BDC_1.



б) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями ABC и B_1D_1C.



в) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями BCC_1 и B_1D_1C.

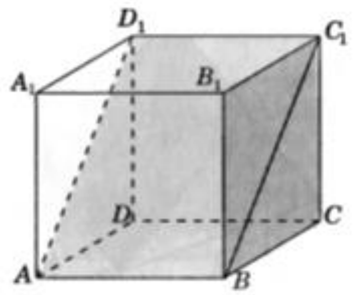


117. а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: AB=8, AD=6, CC_1=6. Найдите угол между плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1.

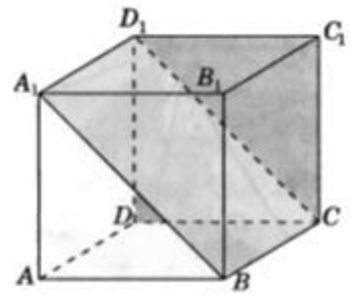
б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: AB=8, AD=6, CC_1=5. Найдите угол между плоскостями BDD_1 и AD_1B_1.

в) Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Боковое ребро AA_1 равно стороне основания $ABCDEF$. Найдите угол между плоскостями ABC и DB_1F_1.

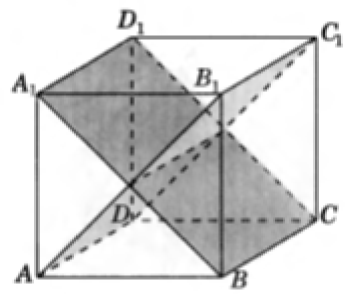
118. а) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями ABC_1 и BCC_1.



б) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями BCD_1 и CDD_1.



в) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и BCD_1.



Задачи с развернутым ответом

119. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые ребра 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1=3:2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

120. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S. Боковое ребро вдвое больше стороны основания. Найдите угол между плоскостями SAF и SBC.

Занятие 21. Перпендикулярность плоскостей

Повторяем теорию

Определение: две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90^0 (Рис. 44).

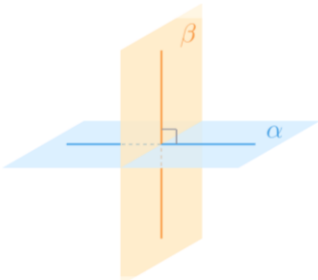


Рис. 44

Признак перпендикулярности плоскостей: если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Следствие из признака перпендикулярности плоскостей: плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.

Проверяем себя

Т61. Какое утверждение верно?

а) Ребро двугранного угла не может быть не перпендикулярным любой прямой, лежащей в плоскости его линейного угла.

б) Две плоскости, перпендикулярные третьей, не могут быть непараллельными.

в) Две плоскости, перпендикулярные одной плоскости, не могут быть параллельными.

Т62. Какое утверждение верно?

а) Через произвольную точку пространства нельзя провести три плоскости, каждые две из которых взаимно перпендикулярны.

б) Не существует прямой, пересекающей две данные скрещивающиеся прямые и перпендикулярной каждой из них.

в) Плоскость не может быть не перпендикулярной данной плоскости, если она проходит через прямую, перпендикулярную данной плоскости.

Т63. Какое утверждение неверно?

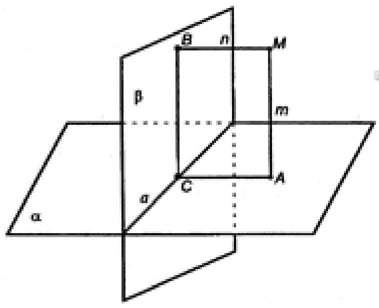
а) Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

б) Если плоскости перпендикулярны, то линия их пересечения перпендикулярна любой прямой, лежащей в одной из данных плоскостей.

в) Плоскость, перпендикулярная линии пересечения двух данных плоскостей, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей

Решаем задачи

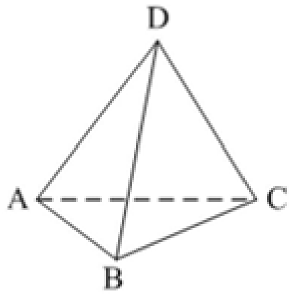
121. а) Плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой a. Из точки M проведены перпендикуляры MA и MB к этим плоскостям соответственно. Прямая a пересекает плоскость AMB в точке C. Найдите расстояние от точки M до прямой a, если AM=3, BM=4.



б) Плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой a. Из точки M проведены перпендикуляры MA и MB к этим плоскостям соответственно. Прямая a пересекает плоскость AMB в точке C. Найдите расстояние от точки M до прямой a, если AM=6, BM=8.

в) Плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой a. Из точки M проведены перпендикуляры MA и MB к этим плоскостям соответственно. Прямая a пересекает плоскость AMB в точке C. Найдите расстояние от точки M до прямой a, если AM=12, BM=5.

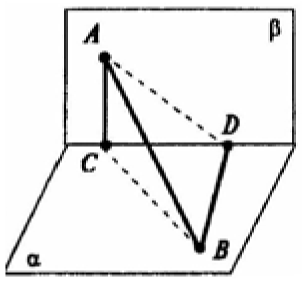
122. а) Общая сторона AC треугольников ABC и ACD равна 10 см. Плоскости этих треугольников взаимно перпендикулярны. Найдите BD, если эти треугольники равносторонние.



б) Общая сторона AC треугольников ABC и ACD равна 20 см. Плоскости этих треугольников взаимно перпендикулярны. Найдите BD, если эти треугольники равносторонние.

в) Общая сторона AC треугольников ABC и ACD равна 14 см. Плоскости этих треугольников взаимно перпендикулярны. Найдите BD, если эти треугольники равносторонние.

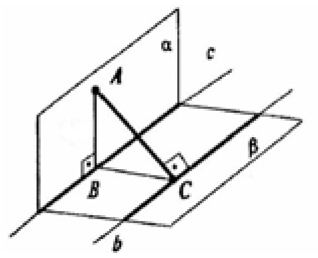
123. а) На двух перпендикулярных плоскостях лежат две точки A и B, из которых опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB, если AC=6 см, BD=7 см, CD=6 см.



б) На двух перпендикулярных плоскостях лежат две точки A и B, из которых опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB, если AC=3 см, BD=4 см, CD=12 см.

в) На двух перпендикулярных плоскостях лежат две точки A и B, из которых опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB, если AC=15 см, BD=17,5 см, CD=15 см.

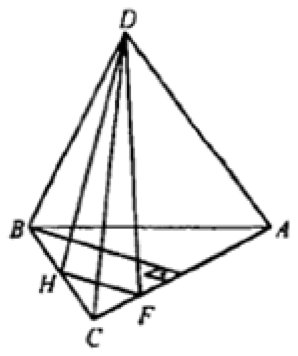
124. а) Плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости α взята точка A, расстояние от которой до прямой c (линии пересечения плоскостей) равно 4 м. В плоскости β проведена прямая b, параллельная прямой c и отстоящая от неё на расстоянии 9,6 м от неё. Найдите расстояние от точки A до прямой b.



б) Плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости α взята точка A, расстояние от которой до прямой c (линии пересечения плоскостей) равно 12 м. В плоскости β проведена прямая b, параллельная прямой c и отстоящая н от неё на расстоянии 16 м.. Найдите расстояние от точки A до прямой b.

в) Плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости α взята точка A, расстояние от которой до прямой c (линии пересечения плоскостей) равно 15 м. В плоскости β проведена прямая b, параллельная прямой c и отстоящая от неё на расстоянии 8 м. Найдите расстояние от точки A до прямой b.

125. а) Сторона правильного треугольника ABC равна 4. Треугольник DBC – равнобедренный (DB=DC). Их плоскости взаимно перпендикулярны. Плоскость ADC составляет с плоскостью ABC угол 60^0. Найдите площадь треугольника DBC.



б) Сторона правильного треугольника ABC равна 10. Треугольник DBC – равнобедренный (DB=DC). Их плоскости взаимно перпендикулярны. Плоскость

ADC составляет с плоскостью *ABC* угол 60^0. Найдите площадь треугольника *DBC*.

в) Сторона правильного треугольника *ABC* равна 14. Треугольник *DBC* – равнобедренный (*DB*=*DC*). Их плоскости взаимно перпендикулярны. Плоскость *ADC* составляет с плоскостью *ABC* угол 60^0. Найдите площадь треугольника *DBC*.

Занятие 22. Теорема о трёх перпендикулярах

Повторяем теорию

Определение: прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой из этой плоскости.

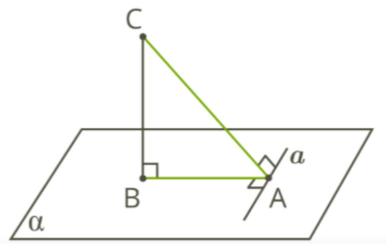


Рис. 45

Признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости (Рис. 45).

Перпендикуляр к плоскости CB – отрезок прямой, перпендикулярной плоскости, один из концов которого лежит на плоскости (основание перпендикуляра).

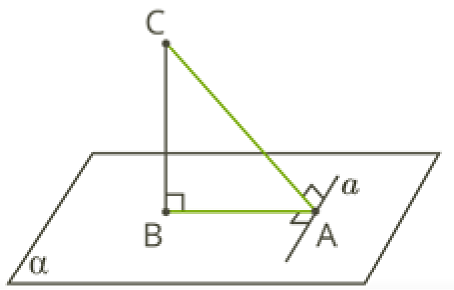


Рис. 46

Наклонная к плоскости CA – отрезок прямой, не перпендикулярной плоскости, один из концов которого лежит на плоскости (основание наклонной).

Проекция наклонной BA – отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной (Рис. 46).

Теорема о трех перпендикулярах (ТТП):	*Обратная ТТП:*
Если прямая, проведённая на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна её проекции, то она перпендикулярна и самой наклонной. $a \in \alpha, a \perp BA, BC \perp BA \Rightarrow a \perp CA$	Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной. $a \in \alpha, a \perp CA, BC \perp BA \Rightarrow a \perp BA$

Проверяем себя

Т64. Укажите верный ответ:

1) Расстояние от точки до прямой равно длине _______________

а) наклонной; б) биссектрисы; в) проекции; г) перпендикуляра.

2) Прямая, проведенная в плоскости и перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и ___________________.

а) самой себе; б) самой наклонной; в) самой проекции;

г) самому перпендикуляру.

Т65. Заполните пропуски:

а) Из двух наклонных, исходящих из одной точки, не лежащей на данной плоскости, больше та, у которой_______________.

б) Если равны проекции наклонных к плоскости, проведённых из одной точки, то равны и__________.

Т66. Какое из следующих утверждений неверно?

а) перпендикуляр и наклонная, выходящие из одной точки, имеют разную длину;

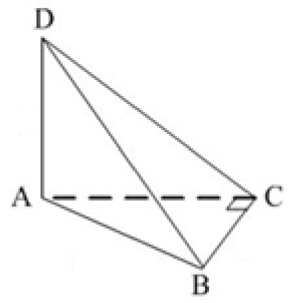
б) расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной плоскости;

в) равные наклонные, проведенные к плоскости из одной точки, имеют разные проекции;

г) проекцией точки на плоскость является точка.

Решаем задачи

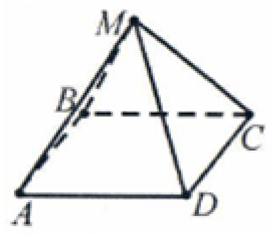
126. а) В треугольнике АВС известно, что $\angle ACB = 90^0$, AB=15 см, ВС=9 см, $AD \perp (ABC)$, AD=5 см. Найдите расстояние от точки D до прямой BC.



б) В треугольнике ABC известно, что $\angle ACB = 90^0$, AB=10 см, BC=6 см, $AD \perp (ABC)$, AD=6 см. Найдите расстояние от точки D до прямой BC.

в) В треугольнике АВС известно, что $\angle ACB = 90^0$, AB=20 см, BC=16 см, $AD \perp (ABC)$, AD=5 см. Найдите расстояние от точки D до прямой BC.

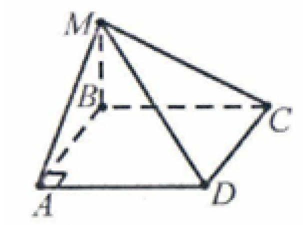
127. а) $ABCD$ – квадрат. $M \notin (ABC)$, MA=MB=MC=MD=5 см. Расстояние от точки M до DC равно 4 см. Найдите площадь квадрата $ABCD$.



б) $ABCD$ – квадрат. $M \notin (ABC)$, MA=MB=MC=MD=10 см. Расстояние от точки M до DC равно 8 см. Найдите площадь квадрата $ABCD$.

в) $ABCD$ – квадрат. $M \notin (ABC)$, MA=MB=MC=MD=13 см. Расстояние от точки M до DC равно 12 см. Найдите площадь квадрата $ABCD$.

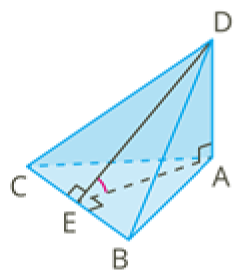
128. а) $ABCD$ – прямоугольник. $MB \perp (ABC)$, MA=13, MD=20, MC=16. Найдите MB.



б) $ABCD$ – прямоугольник. $MB \perp (ABC)$, MA=13, MD=15, MC=9. Найдите MB.

в) $ABCD$ – прямоугольник. $MB \perp (ABC)$, MA=10, MD=17, MC=15. Найдите MB.

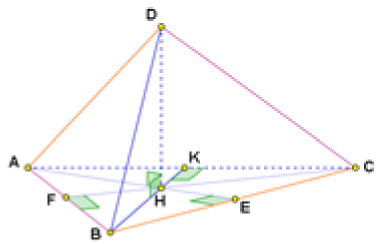
129. а) Отрезок AD перпендикулярен плоскости треугольника ABC и имеет длину 12 см. Найдите расстояние от точки D до прямой BC, если AB=AC=20 см, BC=24 см.



б) Отрезок AD перпендикулярен плоскости треугольника ABC и имеет длину 8 см. Найдите расстояние от точки D до прямой BC, если AB=AC=25 см, BC=40 см.

в) Отрезок AD перпендикулярен плоскости треугольника ABC и имеет длину 45 см. Найдите расстояние от точки D до прямой BC, если AB=AC=30 см, BC=36 см.

130. а) В правильном треугольнике ABC точка H – центр. DH – перпендикуляр к плоскости ABC. Найдите расстояние от точки D до стороны AB, если AB=10 см, DH=5 см. В ответ запишите число, умноженное на $\sqrt{3}$.



б) В правильном треугольнике *ABC* точка *H* – центр. *DH* – перпендикуляр к плоскости *ABC*. Найдите расстояние от точки *D* до стороны *AB*, если *AB*=12 см, *DH*=6 см. В ответ запишите число, умноженное на $\sqrt{3}$.

в) В правильном треугольнике *ABC* точка *H* – центр. *DH* – перпендикуляр к плоскости *ABC*. Найдите расстояние от точки *D* до стороны *AB*, если *AB*=14 см, *DH*=7 см. В ответ запишите число, умноженное на $\sqrt{3}$.

Раздел 3. Многогранники

Занятие 23. Многогранники. Призма

Повторяем теорию

Многогранник – геометрическое тело, ограниченное конечным числом плоских многоугольников.

Грани многогранника – многоугольники, ограничивающие многогранники.

Ребра многогранника – стороны граней многогранника.

Вершины многогранника – концы ребер многогранника (вершины граней многогранника).

Диагональ многогранника – отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани.

Выпуклый многогранник – многогранник, расположенный по одну сторону от плоскости его любой грани.

Невыпуклый многогранник – многогранник, у которого найдется по крайней мере одна грань такая, что плоскость, проведенная через эту грань, делит данный многогранник на две или более частей.

Призма – многогранник, составленный из равных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов.

Боковые грани – все грани, кроме оснований.

Боковые ребра – общие стороны боковых граней.

Основания призмы – равные многоугольники, расположенные в параллельных плоскостях.

Прямая призма – призма, боковые ребра которой перпендикулярны основаниям.

Правильная призма – прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник.

Боковая поверхность призмы состоит из параллелограммов. Вместе с основаниями боковая поверхность составляет полную поверхность призмы.

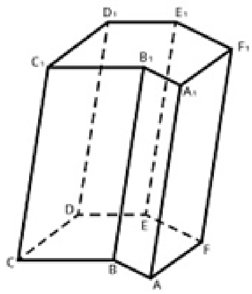
Диагональ призмы – это отрезок, соединяющий две её вершины, не принадлежащие одной грани.

Расстояние между основаниями призмы называется *высотой* призмы.

Объем призмы равен произведению площади основания на высоту $V = S_{осн} \cdot H$.

Проверяем себя

Т67. Заполните пропуски в тексте:
У данного многогранника количество вершин ___, ребер ___, граней ___. Количество боковых ребер равно ___, а количество боковых граней – ____.



Т68. Заполните пропуски:

а) В основании призмы лежат_______________________________

б) Боковые рёбра призмы ______________ и ___________________.

в) Призма имеет 20 граней. В её основании лежит (какой многоугольник) ______________.

Т69. Заполните пропуски:

а) _______, ограничивающие многогранник, называются его гранями.

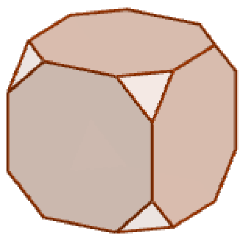
б) Стороны граней называются _________.

в) Концы ребер многогранника называются _________.

г) Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется _______ многогранника.

Решаем задачи

131. а) От деревянного кубика отпилили все его вершины. Сколько ребер у получившегося многогранника (невидимые рёбра на рисунке не изображены)?



б) От деревянного кубика отпилили все его вершины. Сколько граней у получившегося многогранника (невидимые ребра на рисунке не обозначены)?

в) От деревянного кубика отпилили все его вершины. Сколько вершин у получившегося многогранника (невидимые рёбра на рисунке не изображены)?

132. а) В основании прямой призмы лежит прямоугольник со сторонами 12 см и 5 см. Диагональ призмы образует с плоскостью основания угол в 30^0. Найдите боковое ребро призмы.

б) В основании прямой призмы лежит прямоугольник со сторонами 24 см и 10 см. Диагональ призмы образует с плоскостью основания угол в 45^0. Найдите боковое ребро призмы.

в) В основании прямой призмы лежит прямоугольник со сторонами 24 см и 18 см. Диагональ призмы образует с плоскостью основания угол в 60^0. Найдите боковое ребро призмы.

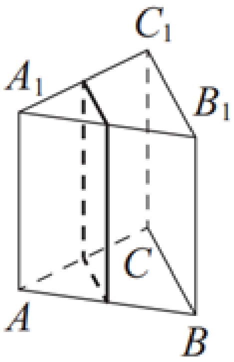
133. а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро AB=2 см, ребро $AD=\sqrt{5}$ см, ребро AA_1=2 см. Точка K – середина ребра BB_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки A_1, D_1 и K.

б) В прямоугольном параллелепипеде $MNPRM_1N_1P_1R_1$ ребро MN = 4 см, ребро $MR=\sqrt{20}$ см, ребро MM_1=4 см. Точка K – середина ребра NN_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки M_1, R_1 и K.

б) В прямоугольном параллелепипеде $ASDFA_1S_1D_1F_1$ ребро AS=6 см, ребро $AF=5\sqrt{5}$ см, ребро AA_1=6 см. Точка K – середина ребра SS_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки A_1, F_1 и K.

134. а) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 6 см, боковые рёбра равны 8 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр основания призмы.

б) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 2 см, боковые рёбра равны 3 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1.

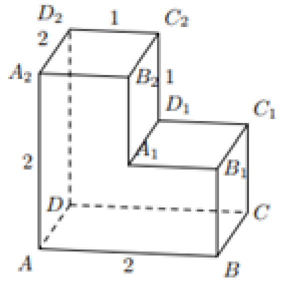


в) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 13 см, боковые рёбра равны 6 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1.

135. а) На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите расстояние между вершинами A и C_2.

б) На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите расстояние между вершинами A и C_1.

в) На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и D_1.



136. а) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известно, что $AB = \sqrt{3}AA_1$. Найдите угол между прямыми AB_1 и CC_1. Ответ дайте в градусах.

б) В правильной треугольной призме $GHFG_1H_1F_1$ известно, что $GG_1 = \sqrt{3}GH$. Найдите угол между прямыми GH_1 и GG_1. Ответ дайте в градусах.

в) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известно, что $AB_1 = \sqrt{2}AB$. Найдите угол между прямыми AB_1 и CC_1. Ответ дайте в градусах.

137. а) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны $2\sqrt{3}$, боковые рёбра равны 5. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB и A_1B_1 и точку C.

б) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны $6\sqrt{3}$, боковые рёбра равны 7. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB и A_1B_1 и точку C.

в) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 8, боковые рёбра равны $\sqrt{3}$. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB и A_1B_1 и точку C.

138. а) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 3. Найдите расстояние между точками A и E_1.

б) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3. Найдите расстояние между точками B и E_1.

в) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 2. Найдите расстояние между точками A и C_1.

Занятие 24. Многогранники. Призма

Повторяем теорию

Призма – многогранник, составленный из равных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов (Рис. 47).

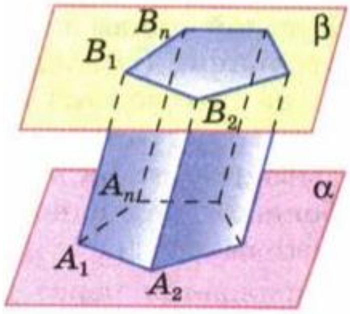


Рис. 47

Боковые грани – все грани, кроме оснований.

Боковые ребра – общие стороны боковых граней.

Основания призмы – равные многоугольники, расположенные в параллельных плоскостях.

Прямая призма – призма, боковые ребра которой перпендикулярны основаниям. В противном случае – *наклонная* (Рис. 48).

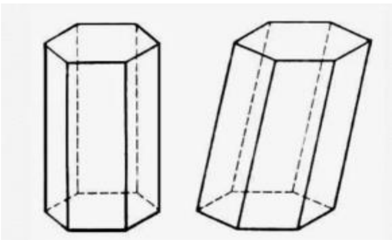


Рис.48

Правильная призма – прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник (Рис. 49).

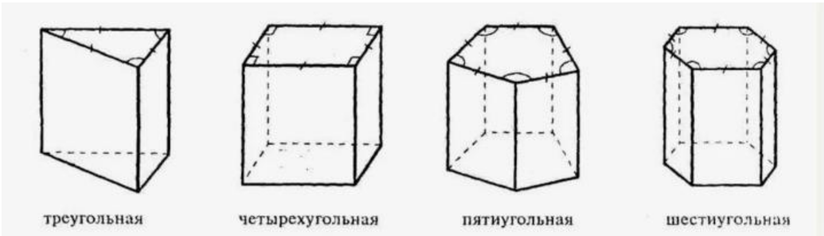


Рис.49

Площадь боковой поверхности призмы – сумма площадей ее боковых граней.

Площадь полной поверхности призмы – сумма площадей всех ее граней.

$$S_{\text{пол.п.}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$$

Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда

S=2(ab+bc+ac), где a, b, c измерения прямоугольного параллелепипеда.

Площадь поверхности куба $S=6a^2$.

Проверяем себя

Т70. Выберите правильное определение правильной призмы.

а) Прямая призма называется правильной, если в основании лежит правильный многоугольник.

б) Призма называется правильной, если в основании лежит правильный многоугольник.

в) Прямая призма называется правильной, если в основании лежит многоугольник.

г) Призма называется правильной, если в основании лежит многоугольник.

Т71. Какая фигура не может быть в основании призмы?

а) Трапеция.

б) Круг.

в) Треугольник.

г) Квадрат.

Т72. Площадь полной поверхности призмы:

а) $2S_{\text{осн}} + 2S_{\text{бок}}$.

б) $S_{\text{осн}} + 2S_{\text{бок}}$

в) $S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$.

Решаем задачи

139. а) Основанием прямой треугольной призмы является прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, боковое ребро призмы равно 10. Найдите площадь боковой поверхности.

б) Основанием прямой треугольной призмы является прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4, боковое ребро призмы равно 12. Найдите площадь боковой поверхности.

в) Основанием прямой треугольной призмы является прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Площадь боковой поверхности равна 288. Найдите боковое ребро призмы.

140. а) Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8, и боковым ребром, равным 10.

б) Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 20 и 48, и боковым ребром, равным 5.

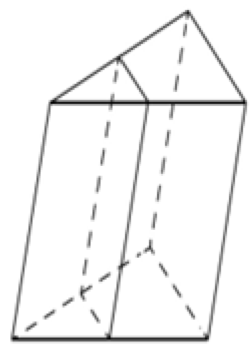
в) В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными10 и 24. Площадь её поверхности равна 396. Найдите боковое ребро этой призмы.

141. а) Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна 5, высота равна 10. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

б) Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна 12, высота равна 5,5. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

б) Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна 16, площадь боковой поверхности призмы 480. Найдите высоту призмы.

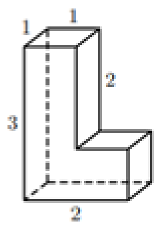
142. а) Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 126. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



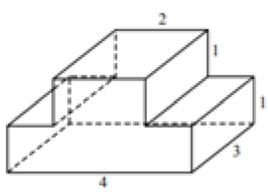
б) Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 252. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.

в) Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 132. Через центр основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.

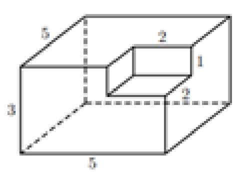
143. а) Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



б) Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



в) Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



144. а) Основание прямой призмы – ромб со стороной 5 и тупым углом 120^0. Боковая поверхность призмы имеет площадь 240. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.

б) Основание прямой призмы – ромб со стороной 5 и тупым углом 120^0. Боковая поверхность призмы имеет площадь 300. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.

в) Основание прямой призмы – ромб с острым углом 60^0. Боковое ребро призмы равно 10, а площадь боковой поверхности – 240. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.

145. а) Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетами 15 и 20. Большая боковая грань и основание призмы равновелики. Найдите площадь полной поверхности призмы.

б) Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетами 18 и 24. Большая боковая грань и основание призмы равновелики. Найдите площадь полной поверхности призмы.

в) Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с гипотенузой 25 и катетом 20. Меньшая боковая грань и основание призмы равновелики. Найдите площадь полной поверхности призмы.

Задачи с развернутым ответом

146. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

а) Докажите, что $AA_1=AC$.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC=6$, $BC=3$.

Занятие 25. Многогранники. Пирамида

<u>Повторяем теорию</u>

Многогранник, одна грань которого n-угольник, а остальные грани – треугольники, имеющие общую вершину, называют *n-угольной пирамидой* (Рис. 50).

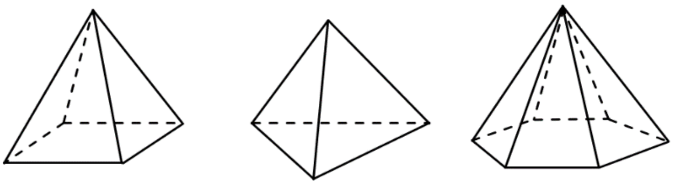


Рис. 50

Треугольники, имеющие общую вершину, называют *боковыми гранями пирамиды*; общую вершину – *вершиной пирамиды*; n-угольник – *основанием пирамиды*; отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания – *боковыми рёбрами пирамиды*.

В зависимости от количества сторон основания пирамиды она бывает *треугольной, четырехугольной, пятиугольной* и т.д.

Высотой пирамиды называют перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания (Рис. 51).

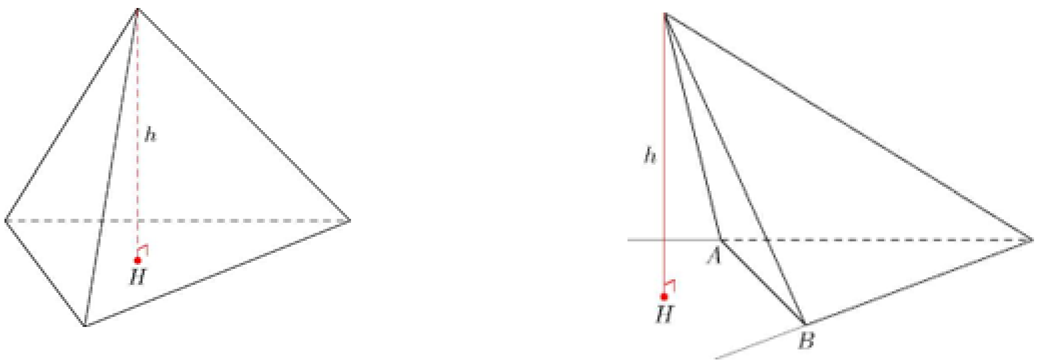


Рис. 51

Основные свойства пирамиды

1. Если все боковые ребра равны, то вокруг основания пирамиды можно описать окружность, а центр основания совпадает с центром окружности. Также перпендикуляр, опущенный из вершины, проходит через центр основания (круга).

2. Если все боковые ребра равны, то они наклонены к плоскости основания под одинаковыми углами.

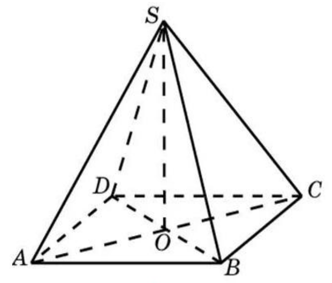
3. Боковые ребра равны тогда, когда они образуют с плоскостью основания равные углы или, если вокруг основания пирамиды можно описать окружность.

4. Если боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом, то в основание пирамиды можно вписать окружность, а вершина пирамиды проектируется в ее центр.

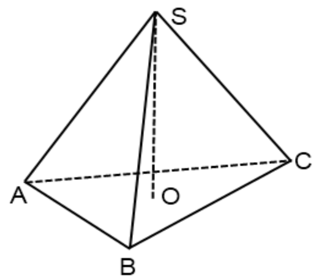
5. Если боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом, то апофемы боковых граней равны.

6. Если боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом, то в основание пирамиды можно вписать окружность, а центр основания совпадает с центром окружности.

Пирамиду называют *правильной*, если в её основании лежит правильный многоугольник и основание высоты пирамиды является центром этого многоугольника (Рис. 52).



SABCD – правильная четырехугольная пирамида, в основании лежит квадрат *ABCD*



SABC – правильная треугольная пирамида, в основании лежит равносторонний $\triangle ABC$

Рис. 52

Важно: в правильной треугольной пирамиде боковое ребро может быть не равно стороне основания; иными словами, боковые грани правильной треугольной пирамиды – равнобедренные, но не обязательно равносторонние треугольники. В правильном тетраэдре все шесть граней – равносторонние треугольники.

Апофема – это высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из её вершины.

Свойства правильной пирамиды.

1. Все боковые рёбра правильной пирамиды равны.

2. Все боковые ребра наклонены под одинаковыми углами к основанию.

3. Все боковые грани правильной пирамиды – равные равнобедренные треугольники.

4. Все апофемы правильной пирамиды равны.

5. Площади всех боковых граней равны.

6. Все грани имеют одинаковые двугранные (плоские) углы.

7. Вокруг пирамиды можно описать сферу. Центром описанной сферы будет точка пересечения перпендикуляров, которые проходят через середину ребер.

8. В пирамиду можно вписать сферу. Центром вписанной сферы будет точка пересечения биссектрис, исходящие из угла между ребром и основанием.

9. Если центр вписанной сферы совпадает с центром описанной сферы, то сумма плоских углов при вершине равна π или наоборот, один угол равен π/n, где n – это количество углов в основании пирамиды.

Площадью боковой поверхности пирамиды называют сумму площадей всех ее боковых граней.

Теорема. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра её основания и апофемы.

$$S_{бок}=\frac{1}{2}\,pd\,,$$

где p – периметри основания пирамиды, а d – длина апофемы правильной пирамиды.

Площадь полной поверхности правильной пирамиды равна сумме площадей боковой поверхности и основания

$$S_{полн} = S_{бок}+ S_{осн}.$$

Пересечем произвольную пирамиду плоскостью, параллельной основанию пирамиды, эта плоскость разбивает данную пирамиду на два многогранника:один многогранникявляется пирамидой, другой называется *усечённой пирамидой.*

$A_1A_2A_3\ldots A_nB_1B_2B_3\ldots B_n$ – усечённая пирамида.

$A_1A_2A_3\ldots A_n$ и $B_1B_2B_3\ldots B_n$ – основания усечённой пирамиды.

$A_1B_1B_2A_2$ – боковые грани усеченной пирамиды (трапеция) (Рис. 53).

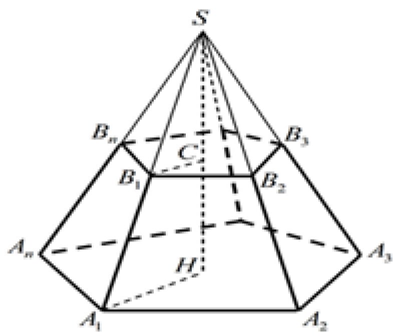


Рис. 53

Высотой усечённой пирамиды называют перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки плоскости одного основания на плоскость другого.

Апофемой правильной усечённой пирамиды называют отрезок, соединяющий середины рёбер оснований, принадлежащих одной боковой грани.

Теорема. Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды равна полусумме периметра ее оснований и апофемы

$$S_{бок}=\frac{1}{2}\,(P_{осн}+p_{осн})\;d.$$

Проверяем себя

Т73. Что представляет собой боковая грань пирамиды?
а) треугольник;
б) параллелограмм;
в) прямоугольник.

Т74. Апофема – это:
а) высота боковой грани пирамиды;
б) высота боковой грани правильной пирамиды;
в) высота грани пирамиды.

Т75. Сколько оснований имеет правильная пирамида?
а) одно;
б) два;
в) три;
г) много.

Т76. Боковые рёбра пирамиды – это…
а) отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания;
б) отрезки, соединяющие вершину с серединами сторон снования;
в) отрезки, соединяющие вершины основания.

Т77. Пирамида называется правильной, если…
а) её основание правильный многоугольник;
б) основание высоты совпадает с центром основания пирамиды;
в) её основание правильный многоугольник и основание высота совпадает с центром этого многоугольника.

Т78. Что представляет собой боковая грань усеченной пирамиды?
а) прямоугольник;
б) треугольник;
в) параллелограмм;
г) трапеция;
д) другое.

Т79. Боковая поверхность правильной пирамиды равна…
а) произведению периметра основания на апофему;
б) произведению полупериметра основания на апофему;

в) произведению полупериметра основания на высоту пирамиды.

Решаем задачи

147. а) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 9, боковое ребро равно 6. Найдите угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.

б) Апофема правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{7}$, боковое ребро равно 7. Найдите угол между плоскостью боковой грани пирамиды и плоскостью ее основания. Ответ дайте в градусах.

в) Апофема правильной треугольной пирамиды равна $\sqrt{6}$, сторона основания равна 6. Найдите угол между плоскостью боковой грани пирамиды и плоскостью ее основания. Ответ дайте в градусах.

148. а) Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно $2\sqrt{13}$, а сторона основания равна $6\sqrt{3}$. Найдите высоту пирамиды.

б) В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро равно 17, а сторона основания равна 8. Найдите высоту пирамиды.

в) В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно 5, а высота пирамиды равна 4. Найдите сторону основания пирамиды.

149. а) В правильной четырёхугольной пирамиде боковое ребро равно 22, а тангенс угла между боковой гранью и плоскостью основания равен $\sqrt{14}$. Найдите сторону основания пирамиды.

б) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ высота SO равна 13, диагональ основания BD равна 8. Точки K и M − середины ребер CD и BC соответственно. Найдите тангенс угла между плоскостью SMK и плоскостью основания ABC.

в) В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 1. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.

150. а) Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 10, а боковое ребро равно 13.

б) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка M − середина ребра AB, S − вершина. Известно, что BC=3, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 45. Найдите длину отрезка SM.

в) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ Q − середина ребра AB, S − вершина. Известно, что BC=7, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 42. Найдите длину отрезка SQ.

151. а) Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 14, боковые ребра равны 25. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

б) Во сколько раз уменьшится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его рёбра уменьшить в 1,6 раза?

в) Площадь боковой поверхности пятиугольной пирамиды равна 13. Чему будет равна площадь боковой поверхности пирамиды, если все ее ребра уменьшить в 2 раза?

Задачи с развернутым ответом

152. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* сторона основания *AB* равна боковому ребру *SA*. Медианы треугольника *SBC* пересекаются в точке *M*.

а) Докажите, что $AM=AD$.

б) Точка *N* – середина *AM*. Найдите *SN*, если $AD=6$.

Занятие 26. Многогранники. Пирамида

Повторяем теорию

Треугольную пирамиду называют *тетраэдром* («тетраэдр» в переводе с греческого означает «четырехгранник»). Любая грань тетраэдра служит его основанием (Рис. 54).

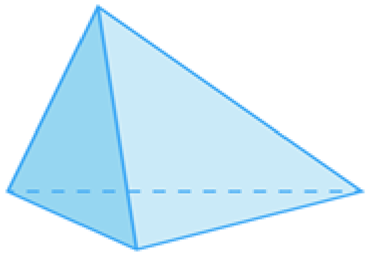


Рис. 54

Правильную треугольную пирамиду, у которой все грани равны называют *правильным тетраэдром.*

Если прямые, содержащие высоты тетраэдра, пересекаются в одной точке, то такой тетраэдр называют *ортоцентрическим*.

Отрезок, соединяющий середины скрещивающихся ребер тетраэдра, называют *средней линией тетраэдра*.

Теорема. Средние линии тетраэдра пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани, называют *медианой тетраэдра.*

Теорема. Медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 3:1, считая от вершины тетраэдра.

Объем пирамиды равен одной трети, произведения площади основания на высоту.

$$V=\frac{1}{3}\ S_{осн}\, h,$$

где $S_{осн}$ – площадь основание, а h – высота пирамиды.

Объем усеченной пирамиды равен произведению трети её высоты на сумму площадей оснований и квадратного корня из произведения площадей оснований.

$$V=\frac{1}{3}\cdot h\cdot\left(S_{ниж}+\sqrt{S_{ниж}\cdot S_{верх}}+S_{верх}\right).$$

Проверяем себя

Т80. Из каких геометрических фигур состоит тетраэдр?
а) треугольников;
б) параллелограммов;
в) прямоугольников.

Т81. Какие элементы имеются у тетраэдра?
а) стороны;
б) грани;
в) ребра.

Т82. Сколько оснований имеет тетраэдр?
а) одно;
б) два;
в) три;
г) четыре.

Т83. Сколько диагоналей у тетраэдра?
а) 2;
б) 3;
в) не имеет диагоналей.

Т84. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 9, а сторона основания 4. Чему равен объём?
а) 36;
б) 48;
в) 12.

Т85. Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?
а) в 2 раза;
б) в 8 раз;
в) в 4 раза.

Решаем задачи

153. а) Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4. Ее объем равен 16. Найдите высоту этой пирамиды.

б) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 2, объем пирамиды равен 4. Найдите длину отрезка OS.

в) Ребра тетраэдра равны 12. Найдите объём тетраэдра.

154. а) Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60^0. Высота пирамиды равна 6. Найдите объем пирамиды.

б) Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объем пирамиды.

в) Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 12. Точка E – середина ребра SB. Найдите объем треугольной пирамиды $EABC$.

155. а) Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2, боковое ребро равно 4. Найдите объем пирамиды.

б) Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а высота равна $\sqrt{3}$.

в) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания пересекаются в точке M. Площадь треугольника ABC равна 3, $MS=1$. Найдите объем пирамиды.

156. а) В правильном тетраэдре $SABC$ медианы основания пересекаются в точке P. Объем пирамиды равен 1, $PS=1$. Найдите площадь треугольника ABC.

б) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка L – середина ребра BC, S – вершина. Известно, что $SL=2$, а площадь боковой поверхности равна 3. Найдите длину отрезка AB.

в) Найдите расстояние между скрещивающимися рёбрами правильного тетраэдра, если его рёбра равны $\sqrt{2}$.

157. а) От треугольной пирамиды, объем которой равен 12, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.

б) Объем треугольной пирамиды равен 15. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 1:2, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объемов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.

в) Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 9. Найдите объем треугольной пирамиды $ABCA_1$.

Задачи с развернутым ответом

158. Правильные треугольники ABC и MBC лежат в перпендикулярных плоскостях, $BC = 8$. Точка P – середина CM, а точка T делит отрезок BM так, что $BT:TM = 1:3$.

а) Докажите, что $CT > BP$.

б) Вычислите объём пирамиды $MPTA$.

159. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

160. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 6. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM=2$, $CN=1$.

а) Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.

б) Найдите объём тетраэдра $MNBB_1$.

Занятие 27. Практическая работа. «Развертки многогранников»

Развёрткой называют плоскую фигуру, полученную путем совмещения всей поверхности, ограничивающей предмет, с одной плоскостью.

Правильные многогранники или *платоновы тела* – это выпуклые многогранники, грани которых являются равными правильными многоугольниками.

Работа в группах.

Рассмотреть многогранники, у которых:

1 группа: грани – равносторонние треугольники;

2 группа: грани – правильные четырехугольники.

Задание на карточке 1 группе:

- Чему равен угол правильного треугольника?
- Вычислить сумму плоских углов при вершине, в которой сходится 3, 4, 5 равносторонних треугольников и сделать вывод о возможности существования таких многогранников.

Задание на карточке 2 группе:

- Чему равен угол правильного четырехугольника?
- Вычислить сумму плоских углов при вершине, в которой сходится 3, 4 правильных четырехугольника, сделать вывод о возможности существования таких многогранников.

Историческая справка

Все правильные многогранники были известны еще в Древней Греции, и им посвящена заключительная, 13-я книга знаменитых «Начал» Евклида.

Правильные многогранники иногда называют *Платоновыми телами*, поскольку именно Платон (ок. 428 – ок. 348 до н.э.), великий мыслитель Древней Греции, разработал философскую картину мира, где правильные многогранники занимали видное место.

Платон считал, что мир строится из четырех «стихий» – огня, земли, воздуха и воды, а атомы этих «стихий» имеют форму четырех правильных многогранников.

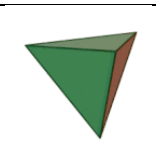
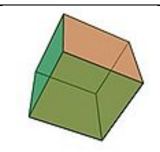
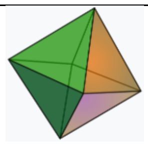
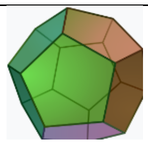
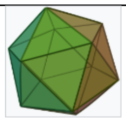
Тетраэдр олицетворял огонь, поскольку его вершина устремлена вверх, как у разгоревшегося пламени. Икосаэдр – как самый обтекаемый – воду. Куб – самая «устойчивая» из фигур – землю. Октаэдр – воздух – как самый «воздушный» многогранник. Пятый многогранник – додекаэдр – воплощал в себе «всё сущее», «Вселенский разум», символизировал весь мир и считался главной геометрической фигурой мироздания. В наше время эту систему можно сравнить с четырьмя состояниями вещества – твёрдым, жидким, газообразным и плазменным.

Это была одна из первых попыток ввести в науку идею систематизации.

Введение теоремы Эйлера.

Установим взаимосвязь между элементами правильных многогранников (табл. 2).

Таблица 2.

Изображение	Правильный многогранник	Число вершин	Число ребер	Число граней
	Тетраэдр	4	6	4
	Гексаэдр	8	12	6
	Октаэдр	6	12	8
	Додекаэдр	20	30	12
	Икосаэдр	12	30	20

Рассматривая таблицу, зададимся вопросом: «нет ли закономерности в возрастании чисел в каждом столбце?» Очевидно, нет. Рассмотрим новую таблицу подсчетов (табл. 3).

Таблица 3.

Правильный многогранник	**Число**	
	граней и вершин (*Г* + *В*)	**рёбер (*Р*)**
Тетраэдр	4+4=8	6
Куб	6+8=14	12
Октаэдр	8+6=14	12
Додекаэдр	12+20=32	30
Икосаэдр	20+12=32	30

Теперь закономерность видна. Сформулируем ее так: «Сумма числа граней и вершин больше числа ребер на два»

$$Г + В - Р = 2.$$

Итак, получена формула, которая была подмечена уже Декартом в 1640 г., а позднее переоткрыта Эйлером (1752), имя которого с тех пор она и носит. Формула Эйлера верна для *любых выпуклых многогранников.*

Практическая работа.

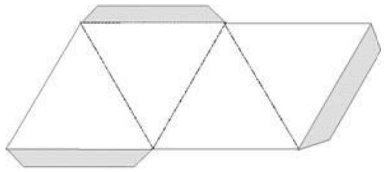
Работу выполняют в парах. Каждая парта работает с одной моделью правильного многогранника (тетраэдр, октаэдр)

- Сколько граней имеет ваш многогранник?
- Что представляет собой каждая грань многогранника?
- Как найти площадь поверхности многогранника?
- Выведите формулу для вычисления площади поверхности вашего многогранника.
- Склейте модель вашего многогранника

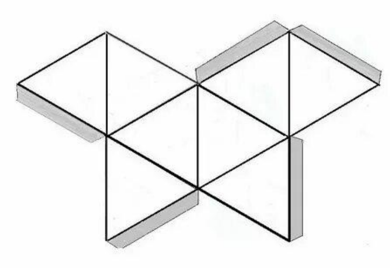
$S_{тетр.} = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$

$S_{окт.} = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}$

Развертка тетраэдра



Развертка октаэдра



Домашнее задание. Склеить модель более сложного многранника по выбору обучающегося.

Занятие 28. Объемы многогранников. Призма

<u>Повторяем теорию</u>

Призма – это многогранник, составленный из двух равных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях, и *n* параллелограммов (Рис. 55).

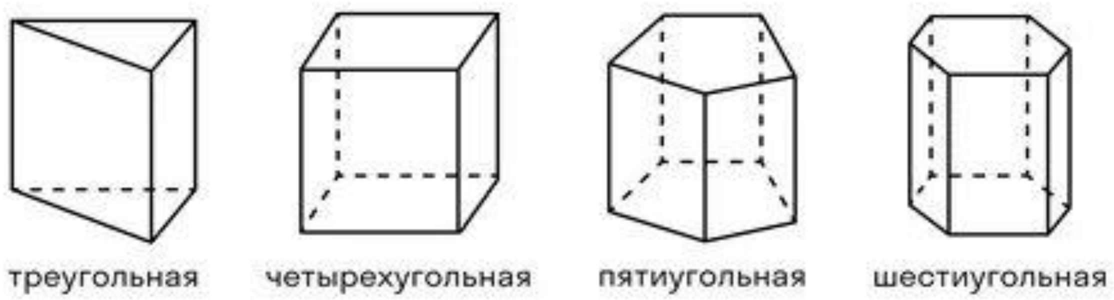


Рис. 55

Многоугольники, расположенные в параллельных плоскостях, называются *основаниями*. Боковые грани являются параллелограммами (Рис. 56).

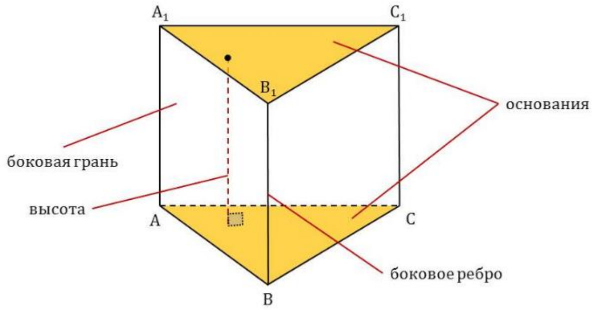


Рис. 56

Отрезки, соединяющие соответственные вершины многоугольников называют *боковыми ребрами.*

Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называют *высотой* призмы (Рис. 57).

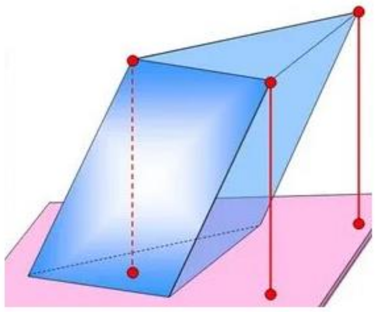


Рис. 57

Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется *прямой*, в противном случае – *наклонной*. Высота прямой призмы равна ее боковому ребру.

Прямая призма называется *правильной*, если ее основания – правильные многоугольники. Все боковые ребра правильной призмы равны. Все боковые грани правильной призмы – равные прямоугольники (Рис. 58).

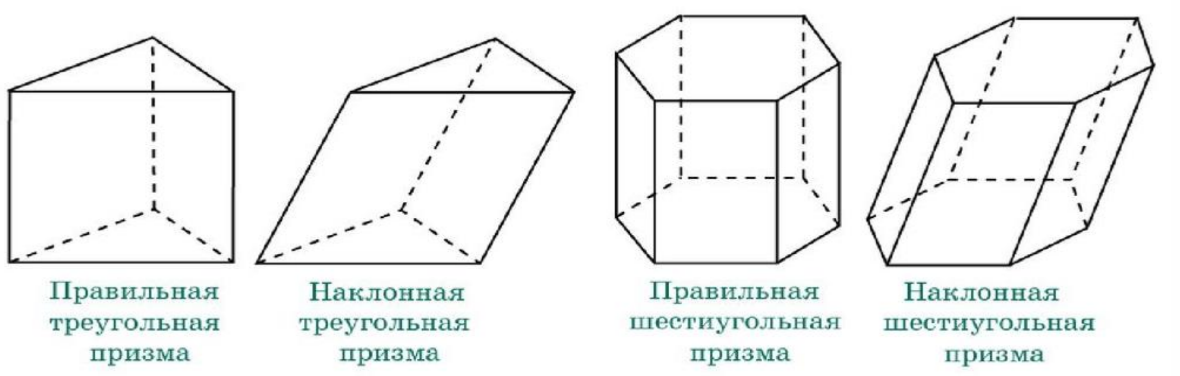


Рис. 58

Площадь боковой поверхности призмы – это сумма площадей боковых граней.

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

Площадь полной поверхности призмы – сумма площадей всех ее граней.

Объем призмы равен произведению площади основания на высоту.

Проверяем себя

Т86. Заполните пропуски:

а) *Призма* – это __________, основаниями которого являются __________, а боковые грани представляют собой __________.

б) *Правильная призма* – призма, основаниями которой являются __________, а боковые ребра ____________ основаниям.

Т87. Укажите верные утверждения:

а) все боковые грани призмы - квадраты;

б) боковые грани призмы - параллелограммы;

в) боковые ребра призмы равны.

Т88. Укажите неверные утверждения:

а) все боковые грани призмы - треугольники;

б) боковые грани прямой призмы – равные прямоугольники;

в) боковые ребра правильной призмы не равны.

Решаем задачи

161. а) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины D, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 12, а боковое ребро равно 2.

б) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины D, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 10, а боковое ребро равно 3.

в) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины D, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 7.

162. а) Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 919. Найдите ребро куба.

б) Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 127. Найдите ребро куба.

в) Если каждое ребро куба уменьшить на 1, то его объем увеличится на 61. Найдите ребро куба.

163. а) Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, D, E, A_1, B_1, D_1, E_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 2.

б) Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, D, E, A_1, B_1, D_1, E_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ площадь основания которой равна 14, а боковое ребро равно 3.

в) Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, D, E, A_1, B_1, D_1, E_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 12.

164. а) Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 5. Объем призмы равен 30. Найдите ее боковое ребро.

б) Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 4 и 6. Объем призмы равен 48. Найдите ее боковое ребро.

в) Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Объем призмы равен 48. Найдите ее боковое ребро.

165. а) Объём куба равен 12. Найдите объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.

б) Объём куба равен 8. Найдите объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.

в) Объём куба равен 24. Найдите объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.

Занятие 29. Объемы многогранников. Призма

Повторяем теорию

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ и n параллелограммов $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, …, $A_nA_1B_1B_n$, называется n-угольной призмой, которая обозначается $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ (Рис. 59).

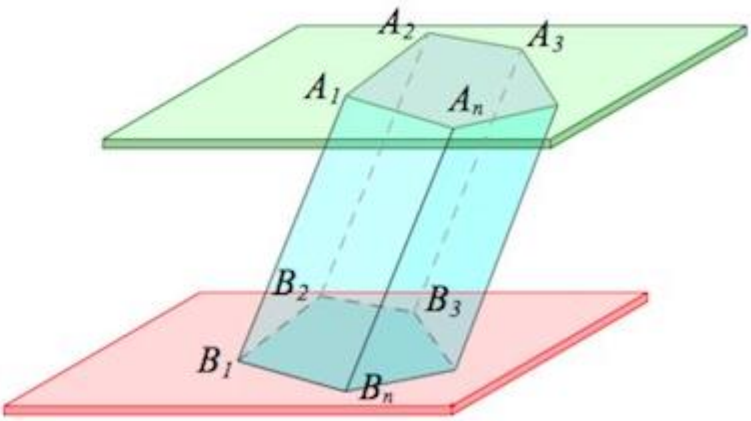


Рис. 59

Прямая призма – призма, в которой все боковые грани перпендикулярны основанию. Высота прямой призмы равна длине бокового ребра.

Наклонная призма – призма, в которой боковые грани не перпендикулярны основанию. Высота наклонной призмы меньше длины бокового ребра.

Диагональное сечение призмы – пересечение призмы плоскостью, проходящей через диагональ основания призмы и боковое ребро. Треугольная призма не имеет диагональных сечений (Рис. 60).

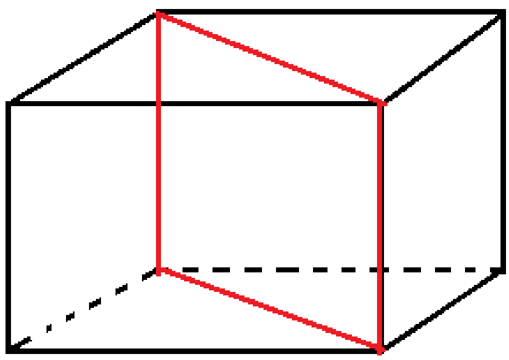


Рис. 60

Перпендикулярное сечение – пересечение призмы плоскостью, пересекающей боковые ребра под прямым углом. Перпендикулярное сечение перпендикулярно всем боковым ребрам и боковым граням (Рис. 61).

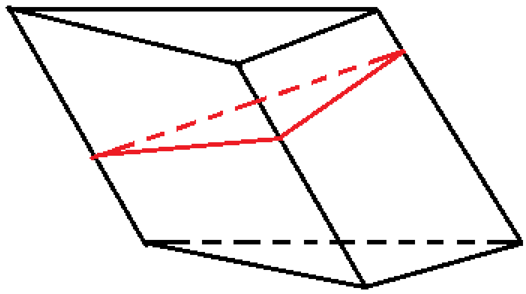


Рис. 61

Формула для нахождения *объема призмы* $V=S_{осн}H$.

Формула для нахождения ***объема наклонной призмы***, где S_n – площадь перпендикулярного сечения и L – длина бокового ребра $V=S_nL$.

Объём правильной прямой призмы через высоту h, длину боковой стороны a, и количество сторон n

$$V=\frac{n}{4}ha^2 ctg\frac{\pi}{n}.$$

Объём призмы, усеченной плоскостью, не параллельной основанию равен $V=Sh$, где S – площадь перпендикулярного сечения, h – расстояние между центрами тяжести верхнего и нижнего оснований (Рис. 62).

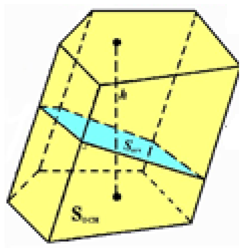


Рис. 62

Объём треугольной призмы, усеченной плоскостью, не параллельной основанию равен $V=\frac{1}{3}(a+b+c)S$, где S – площадь сечения, перпендикулярного сечения, a, b, c – длины боковых ребер.

<u>Проверяем себя</u>

Т89. Заполните пропуски:

а) *Перпендикулярное сечение* – пересечение призмы плоскостью, пересекающей боковые ребра под _________ углом.

б) *Прямая призма* – призма, боковые грани которой __________ основанию.

Т90. Укажите верные утверждения:

а) треугольная призма имеет 3 диагональных сечения;

б) высота прямой призмы равна длине бокового ребра;

в) треугольная призма не имеет диагональных сечений.

Решаем задачи

166. а) Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем этой призмы, если объем отсечённой треугольной призмы равен 6.

б) Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем этой призмы, если объем отсечённой треугольной призмы равен 8.

в) Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной призмы, если объем исходной треугольной призмы равен 48.

167. а) Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 2, а боковые ребра равны $10\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30^0.

б) Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 3, а боковые ребра равны $10\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30^0.

в) Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 4, а боковые ребра равны $10\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30^0.

168. а) Если каждое ребро куба увеличить на 3, то его площадь поверхности увеличится на 162. Найдите ребро куба.

б) Если каждое ребро куба увеличить на 3, то его площадь поверхности увеличится на 234. Найдите ребро куба.

в) Если каждое ребро куба уменьшить на 1, то его площадь поверхности уменьшится на 114. Найдите ребро куба.

169. а) Площадь поверхности куба равна 54. Найдите его объем.

б) Площадь поверхности куба равна 24. Найдите его объем.

в) Объем куба равен 125. Найдите площадь его поверхности.

170. а) Площадь перпендикулярного сечения призмы равна 20, боковое ребро 10. Найдите объем призмы.

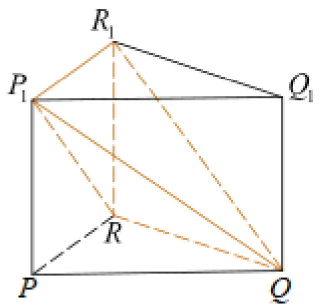
б) Найдите площадь перпендикулярного сечения призмы, если объем призмы равен 28, а боковое ребро 4.

в) Объем призмы равен 125. Найдите боковое ребро, если площадь перпендикулярного сечения равна 25.

Задачи с развернутым ответом

171. Основанием прямой треугольной призмы $PQRP_1Q_1R_1$ является прямоугольный треугольник PQR с прямым углом R. Диагонали боковых граней PP_1Q_1Q и PP_1R_1R равны 17 и 15 соответственно, $PQ=10$.

Найдите объем пирамиды P_1QRR_1.



172. Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.

а) Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны.

б) Найдите объем призмы, если $A_1C=BD=2$.

Занятие 30. Объемы многогранников. Пирамида

<u>Повторяем теорию</u>

Пирамида – это многогранник, основанием которого является многоугольник, а остальные грани представляют собой треугольники с общей вершиной (Рис. 63).

Рис. 63

У пирамиды есть *основание* и *боковые грани* с общей вершиной – *вершиной пирамиды*.

Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называют *ребрами.*

Перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания – *высота* пирамиды. Высота может лежать внутри пирамиды, вне пирамиды, может быть одним из боковых ребер (Рис. 64).

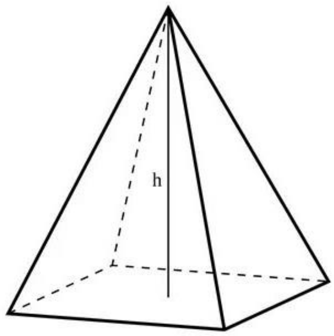


Рис. 64

Правильная пирамида – пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является высотой.

Все боковые ребра правильной пирамиды равны.

Боковые грани правильной пирамиды являются равными равнобедренными треугольниками (Рис. 65).

Рис. 65

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется *апофемой* (Рис. 66).

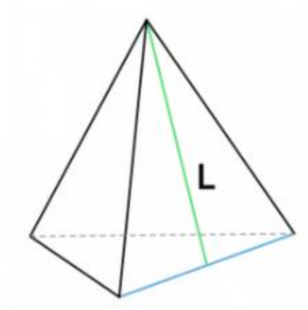


Рис. 66

Треугольная пирамида – это *тетраэдр* (Рис. 67).

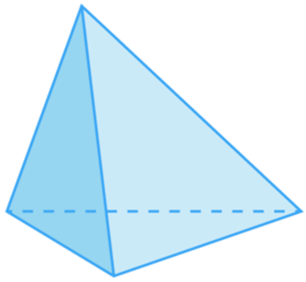


Рис. 67

Площадь боковой поверхности пирамиды – это сумма площадей боковых граней.

Площадь полной поверхности пирамиды – сумма площадей всех ее граней.

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

<u>Проверяем себя</u>

Т91. Заполните пропуски:

а) *Пирамида* – это ___________, основанием которого является ___________, а остальные грани представляют собой ___________ с общей вершиной.

б) *Правильная пирамида* – пирамида, в основании которой лежит ___________, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ___________.

Т92. Укажите верные утверждения:

а) все боковые грани пирамиды - квадраты;

б) боковые грани пирамиды - треугольники;

в) боковые ребра пирамиды равны.

Т93. Укажите неверные утверждения:

а) все боковые грани пирамиды – треугольники;

б) боковые грани пирамиды – равные треугольники;

в) боковые ребра правильной пирамиды не равны.

<u>Решаем задачи</u>

173. а) В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, SO=15, BD=16. Найти боковое ребро SA.

б) В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, SO=4, BD=6. Найти боковое ребро SA.

в) В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, SO=6, BD=16. Найти боковое ребро SA.

174. а) Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 48, а высота равна 7.

б) Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6, а высота равна 4.

в) Найдите площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 16, а высота равна 6.

175. а) Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в десять раз?

Ответ: 10.

б) Во сколько раз уменьшится объем пирамиды, если ее высоту уменьшить в десять раз?

в) Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в 2 раза?

176. а) Найдите объем пирамиды, высота которой равна 4, а основание – прямоугольник со сторонами 8 и 3.

б) Найдите объем пирамиды, высота которой равна 6, а основание – квадрат со стороной 9.

в) Найдите объем пирамиды, высота которой равна $4\sqrt{3}$, а основание – равносторонний треугольник со стороной 4.

177. а) Найдите объём правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 48, а высота равна 9.

б) Найдите объём правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6, а высота равна 4.

в) Найдите объём правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 16, а высота равна 6.

Занятие 31. Объемы многогранников. Пирамида

Повторяем теорию

Рассмотрим многоугольник $A_1A_2...A_n$, лежащий в плоскости α, и точку P, не лежащую в этой плоскости. Если соединить точку P отрезками с вершинами многоугольника, то образуется n треугольников PA_1A_2, PA_2A_3, …, PA_nA_1. Многогранник, составленный из n-угольника $A_1A_2...A_n$ и этих треугольников, называется n-угольной пирамидой $PA_1A_2… A_n$ (Рис. 68).

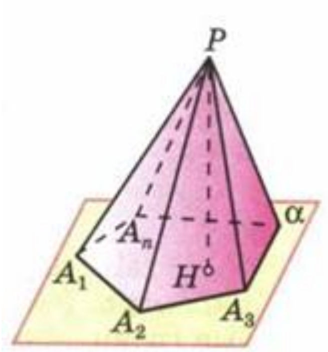


Рис. 68

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Часть пирамиды, заключенная между двумя плоскостями – плоскостью основания и секущей плоскостью, проведенной параллельно основанию, называют *усеченной пирамидой* (Рис. 69).

Основание пирамиды и сечение пирамиды параллельной плоскостью называются *основаниями* усеченной пирамиды. Остальные грани называют *боковыми*. Расстояние между плоскостями оснований называют *высотой* усеченной пирамиды. Ребра, которые не принадлежат основаниям, называются *боковыми*.

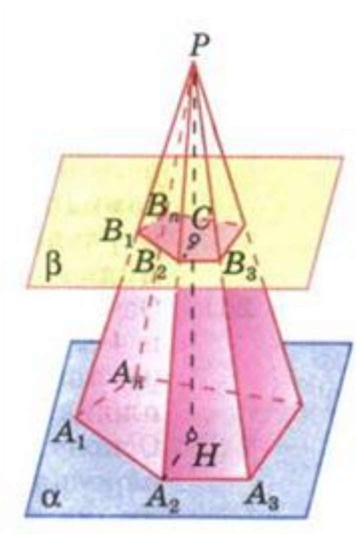


Рис. 69

Основания усеченной пирамиды *подобные n-угольники*. Если основания усеченной пирамиды – правильные многоугольники, а все боковые ребра равны между собой, то такая усеченная пирамида называется *правильной*. *Объём усечённой пирамиды* равен суме объёмов трёх пирамид, которые имеют высоту, одинаковую с высотой усечённой пирамиды, а основания: одно – нижнее основание данной пирамиды, второе – верхнее, а третья – основание, площадь которого равна среднему геометрическому площадей верхнего и нижнего основания.

Пусть площади оснований усечённой пирамиды равны S_1 и S_2, а высота равна h, тогда объём: $V = \frac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})$.

Проверяем себя

Т94. Заполните пропуски:

а) *Усеченная пирамида* – это часть __________, заключенная между двумя плоскостями – плоскостью основания и ___________, проведенной параллельно основанию.

б) *Правильная пирамида* – пирамида, в основании которой лежит __________, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ___________.

Т95. Укажите верные утверждения:

а) все боковые грани усеченной пирамиды – квадраты;

б) боковые грани усеченной пирамиды – трапеции;

в) боковые ребра усеченной пирамиды равны.

Решаем задачи

178. а) Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 5, а объем равен $6\sqrt{3}$.

б) Найдите объём правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 8, а высота равна $6\sqrt{3}$.

в) Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 6, а объем равен $6\sqrt{3}$.

179. а) Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 6, а угол между боковой гранью и основанием равен 45^0. Найдите объем пирамиды.

б) Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 8, а угол между боковой гранью и основанием равен 45^0. Найдите объем пирамиды.

в) Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2, а угол между боковой гранью и основанием равен 45^0. Найдите объем пирамиды.

180. а) Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 4 и 5. Ее объем равен 80. Найдите высоту этой пирамиды.

б) Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 6 и 5. Ее объем равен 90. Найдите высоту этой пирамиды.

в) Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 14 и 3. Ее объем равен 420. Найдите высоту этой пирамиды.

181. а) Объем треугольной пирамиды *SABC*, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF* равен 1. Найдите объем шестиугольной пирамиды.

б) Объем треугольной пирамиды *SABC*, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF* равен 3. Найдите объем шестиугольной пирамиды.

в) Объем треугольной пирамиды *SABC*, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF* равен 5. Найдите объем шестиугольной пирамиды.

182. а) В треугольной усеченной пирамиде с высотой, равной 10, стороны одного из оснований равны 27, 29 и 52. Определите объем усеченной пирамиды, если периметр другого основания равен 72.

б) В треугольной усеченной пирамиде с высотой, равной 10, стороны одного из оснований равны 4, 13 и 15. Определите объем усеченной пирамиды, если периметр другого основания равен 64.

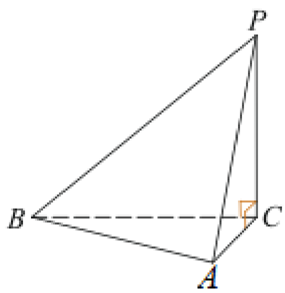
в) В треугольной усеченной пирамиде с высотой, равной 5, стороны одного из оснований равны 26, 28 и 30. Определите объем усеченной пирамиды, если периметр другого основания равен 42.

Задачи с развернутым ответом

183. В треугольной пирамиде *PABC* с основанием *ABC* известно, что *AB*=13, *PB*=15, $\cos\angle PBA = \frac{48}{65}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка *C*. Прямые *PA* и *BC* перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник *ABC* прямоугольный.

б) Найдите объем пирамиды *PABC*.



184. В основании четырехугольной пирамиды *PABCD* лежит трапеция *ABCD* с большим основанием *AD*. Известно, что сумма углов *BAD* и *ADC* равна 90^0, плоскости *PAB* и *PCD* перпендикулярны основанию, прямые *AB* и *CD* пересекаются в точке *K*.

а) Докажите, что плоскость *PAB* перпендикулярна плоскости *PDC*.

б) Найдите объем *PKBC*, если *AB*=3, *BC*=5, *CD*=4, а высота пирамиды *PABCD* равна 7.

Занятие 32. Подобные тела в пространстве

Повторяем теорию

Два тела называются *подобными,* если одно из них получено путем уменьшения или увеличения всех его линейных размеров в одном и том же отношении (Рис.70).

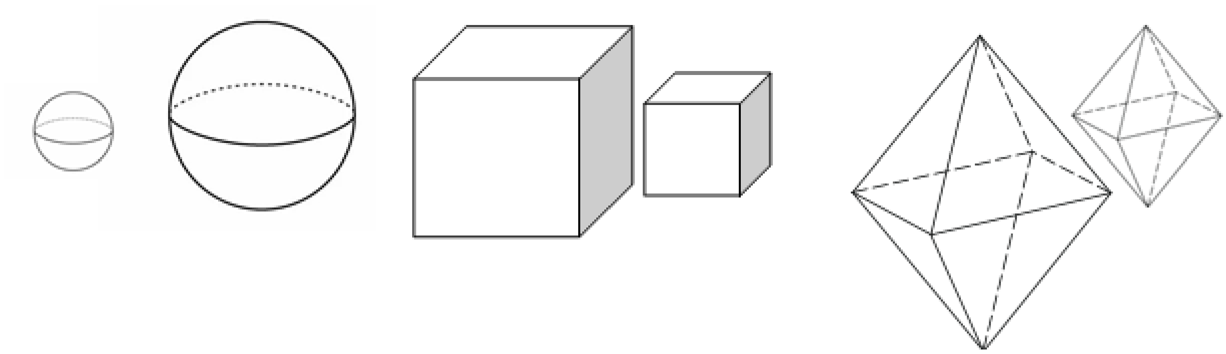


Рис.70

Две правильные пирамиды с одним и тем же числом граней подобны, если радиусы окружностей, описанных около оснований, пропорциональны их высотам.

Два конуса подобны, если радиусы их оснований пропорциональны их радиусам (Рис. 71).

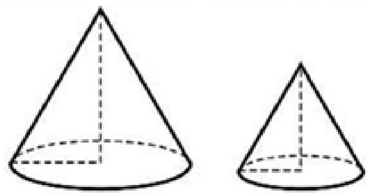


Рис. 71

Все равные тела равновелики, но не все равновеликие тела равны.

Отношение объёмов подобных тел равно кубу коэффициента подобия.

Если в пирамиде (конусе или усеченном конусе) проведем секущую плоскость параллельно основанию, то она отсечет от нее другую пирамиду (конус, усеченный конус), подобную данной.

Два цилиндра, конуса или усеченных конуса называют подобными, если подобны их осевые сечения.

Проверяем себя

Т96. Заполните пропуски:

а) Тела называют __________, если одно из них получено путем уменьшения или увеличения всех его линейных размеров в одном и том же отношении.

б) Все _______ тела равновелики, но не все _________ тела равны.

Т97. Укажите верные утверждения:

а) Отношение объёмов подобных тел равно квадрату коэффициента подобия;

б) Отношение объёмов подобных тел равно кубу коэффициента подобия;

в) Отношение объёмов подобных тел равно коэффициенту подобия.

Решаем задачи

185. а) Даны два шара с радиусами 2 и 4. Чему равно отношение площади поверхности большего шара к площади поверхности меньшего шара?

б) Даны два шара с радиусами 1 и 5. Чему равно отношение площади поверхности меньшего шара к площади поверхности большего шара?

в) Даны два шара с радиусами 3 и 1,5. Чему равно отношение площади поверхности большего шара к площади поверхности меньшего шара?

186. а) Во сколько раз площадь поверхности куба со стороной 5 больше площади поверхности куба со стороной 2?

б) Во сколько раз площадь поверхности куба со стороной 10 больше площади поверхности куба со стороной 2?

в) Во сколько раз площадь поверхности куба со стороной 7 больше площади поверхности куба со стороной 2?

187. а) Высота конуса равна 5 см. На расстоянии 2 см от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объём исходного конуса, если объём меньшего конуса, отсекаемого от исходного, равен 24 см^3.

б) Высота конуса равна 8 см. На расстоянии 4 см от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объём исходного конуса, если объём меньшего конуса, отсекаемого от исходного, равен 26 см^3.

в) Высота конуса равна 10 см. На расстоянии 2 см от основания его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объём отсекаемого от исходного меньшего конуса, если объём исходного конуса равен 500 см^3.

188. а) В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает 0,5 высоты. Объём жидкости равен 28 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?

б) В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает 0,25 высоты. Объём жидкости равен 8 мл. Сколько миллилитров жидкости вмещает в себя полный сосуд?

в) В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает 0,1 высоты. Объём жидкости равен 2 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?

189. а) Дано два шара. Радиус первого шара в 45 раз больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

б) Дано два шара. Радиус первого шара в 5 раз больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

в) Дано два шара. Радиус первого шара в 10 раз меньше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара меньше площади поверхности второго?

190. а) Радиусы двух шаров равны 32 и 60. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

б) Радиусы двух шаров равны 6 и 8. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

в) Радиусы двух шаров равны 12 и 16. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

191. а) Объем второго шара в 1331 раз больше объема первого. Во сколько раз площадь поверхности второго шара больше площади поверхности первого?

б) Объем второго шара в 512 раз больше объема первого. Во сколько раз площадь поверхности второго шара больше площади поверхности первого?

в) Объем второго шара в 3375 раз больше объема первого. Во сколько раз площадь поверхности второго шара больше площади поверхности первого?

192. а) Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?

б) Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в 5 раза?

в) Во сколько раз уменьшится объем шара, если его радиус уменьшить в три раза?

193. а) В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 10. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.

а) В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 22. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.

а) В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.

194. а) Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 919. Найдите ребро куба.

б) Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 37. Найдите ребро куба.

в) Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 217. Найдите ребро куба.

195. а) Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в десять раз?

б) Во сколько раз уменьшится объем шара, если его радиус уменьшить в пять раз?

в) Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в два раза?

196. а) Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 43. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.

б) Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 4. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.

в) Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 28. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.

197. а) Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в три раза?

б) Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в 10 раза?

в) Во сколько раз уменьшится объем правильного тетраэдра, если все его ребра уменьшить в три раза?

Занятие 33. Проверочная работа

Проверочная работа состоит из 8 заданий, представленных в двух вариантах. Первая часть содержит задания базового уровня сложности, вторая часть – задания повышенного и высокого уровня сложности.

Ответом на задания №1-2 является последовательность чисел, к остальным заданиям нужно дать развёрнутое решение.

Вариант 1

Часть 1

1. Какие из следующих утверждений верны?

а) Одна из двух параллельных прямых параллельна некоторой плоскости, тогда и вторая прямая параллельна этой плоскости либо лежит в этой плоскости.

б) Через две пересекающиеся прямые можно провести две различные плоскости.

в) Если две стороны треугольника параллельны некоторой плоскости, то третья его сторона параллельна этой плоскости.

г) Если прямая перпендикулярна диагоналям параллелограмма, то она перпендикулярна и плоскости параллелограмма.

д) Если две прямые в пространстве не пересекаются, то они параллельны.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

2. Установите соответствие между названиями, записанными в левом столбце, и формулами, записанными в правом столбце.

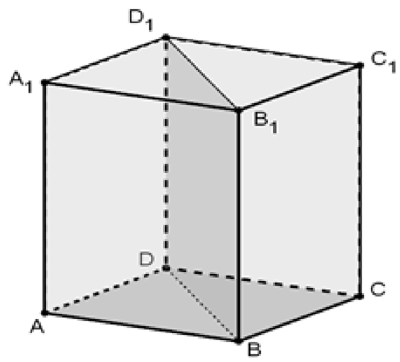
А. Площадь боковой поверхности призмы	1) $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
Б. Объём пирамиды	2) $S=a\cdot b\cdot \sin\alpha$
В. Диагональ прямоугольного параллелепипеда	3) $S=P_{осн}\cdot h$
Г. Площадь параллелограмма	4) $V=\frac{1}{3}\cdot S_{осн}\cdot h$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

3. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 5. Объем призмы равен 30. Найдите ее боковое ребро.

4. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором AD=9, DC=8, DB_1=17. Найдите $S_{BB_1D_1D}$.



5. Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна 5, а высота – 4. Найдите площадь боковой поверхности.

6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известно, что $AB=\sqrt{3}AA_1$. Найдите угол между прямыми $AB1$ и CC_1. Ответ дайте в градусах.

Часть 2

7. Найдите площадь полной поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 5, а угол наклона грани к плоскости основания равен 60^0.

8*. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что прямая B_1D перпендикулярна плоскости A_1BC_1.

б) Найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и A_1B_1C.

Вариант 2

Часть 1

1. Какие из следующих утверждений верны?

а) Если прямая перпендикулярна двум сторонам треугольника, то она перпендикулярна и плоскости треугольника.

б) Любые четыре точки лежат в одной плоскости.

в) Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести две различные плоскости.

г) две стороны трапеции лежат в параллельных плоскостях, то они не могут быть боковыми сторонами.

д) Даны две пересекающиеся плоскости. Существует плоскость, которая пересекает эти плоскости по параллельным прямым.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

2. Установите соответствие между названиями, записанными в левом столбце, и формулами, записанными в правом столбце.

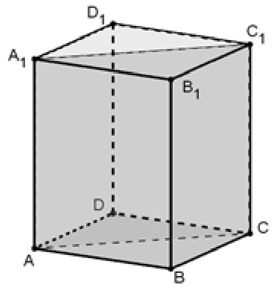
А. Площадь боковой поверхности пирамиды	1) $S=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\alpha$
Б. Объём призмы	2) $d=\sqrt{3a^2}$
В. Диагональ куба	3) $V=S_{осн}\cdot h$
Г. Площадь треугольника	4) $S=\frac{1}{2}P_{осн}\cdot l$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

3. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, высота призмы равна 10. Найдите площадь ее поверхности.

4. Найдите площадь диагонального сечения AA_1C_1C прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, высота которого равна 12, а стороны основания 9 и 6.



5. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45^0. Найдите объём пирамиды.

6. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AC_1=2BC$. Найдите угол между диагоналями BD_1 и CA_1. Ответ дайте в градусах.

Часть 2

7. Найдите площадь полной поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 2, а угол наклона грани к плоскости основания равен 60^0.

8.* Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что сечение куба плоскостью, проходящей через центр куба перпендикулярно диагонали AC_1, является правильным шестиугольником.

б) Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1.

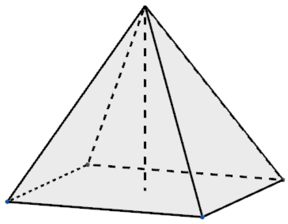
Занятие 34. Итоговое занятие

На занятии предполагается проведение практикума с делением класса на разноуровневые группы (две – базового уровня, две – углубленного уровня) с последующим обсуждением ответов. В заданиях каждой группы содержится 7 задач по трем направлениям: задачи по готовым чертежам, прикладная геометрия, повышенный уровень сложности. К каждому заданию группа должна представить развёрнутое решение. На усмотрение учителя количество групп может быть меньше.

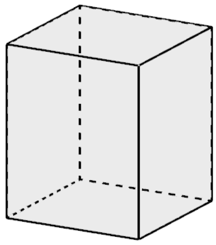
Группа 1 (базовый уровень)

Задачи по готовым чертежам

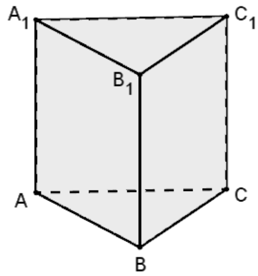
1. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 8, а боковая сторона равна $\sqrt{113}$.



2. Два ребра прямоугольного параллелепипеда равны 4 и 7, а объём параллелепипеда равен 140. Найдите площадь поверхности этого параллелепипеда.

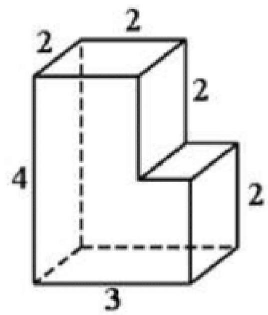


3. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 6, а высота этой призмы равна $8\sqrt{3}$. Найдите объём призмы $ABCA_1B_1C_1$.

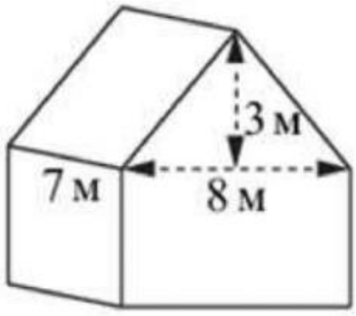


Прикладная стереометрия

4. Деталь имеет форму изображённого на рисунке многогранника (все двугранные углы прямые). Числа на рисунке обозначают длины рёбер в сантиметрах. Найдите объём этой детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах.



5. Двухскатную крышу дома, имеющего в основании прямоугольник (см. рис.), необходимо полностью покрыть рубероидом. Высота крыши равна 3 м, длины стен дома равны 7 м и 8 м. Найдите, сколько рубероида (в квадратных метрах) нужно для покрытия этой крыши, если скаты крыши равны.



<u>Повышенный уровень сложности</u>

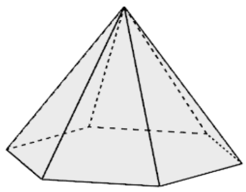
6. Основания прямой призмы – ромб с острым углом 60°. Боковая ребро призмы равно 10 см, а площадь боковой поверхности – 240 см^2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.

7. Сторона правильной треугольной пирамиды равна 6, а высота $\sqrt{13}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

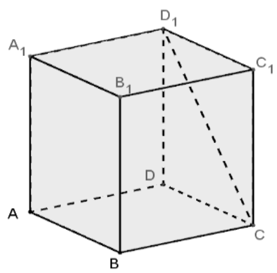
Группа 2 (базовый уровень)

Задачи по готовым чертежам

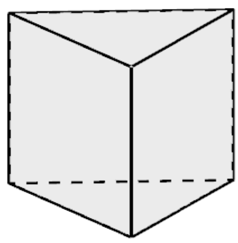
1. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 14, а боковые ребра равны 25. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



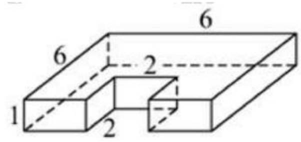
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра CD, CB и диагональ боковой грани CD_1 равны соответственно 3, 6 и $\sqrt{58}$. Найдите объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



3. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен $4\sqrt{3}$, а гипотенуза равна 8. Найдите объём призмы, высота которой равна $11\sqrt{3}$.

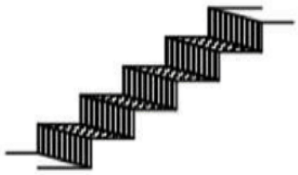


4. Деталь имеет форму изображённого на рисунке многогранника (все двугранные углы прямые). Числа на рисунке обозначают длины рёбер в сантиметрах. Найдите площадь поверхности этой детали. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Прикладная стереометрия

5. Ступени лестницы покрасили в тёмный цвет, как показано на рисунке (штриховкой). Найдите площадь окрашенной поверхности, если глубина каждой ступеньки равна 30 см, высота 15 см, а ширина 90 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Повышенный уровень сложности

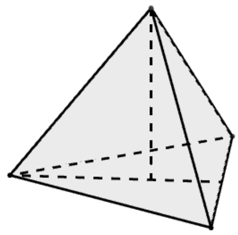
6. Основания прямой призмы – ромб со стороной 5 см и тупым углом 120°. Боковая поверхность призмы имеет площадь 240 см^2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.

7. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 5, а высота равна $\sqrt{13}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

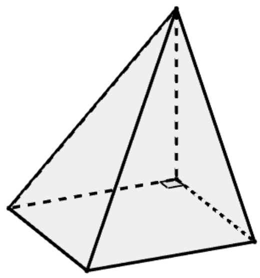
Группа 3 (углубленный уровень)

Задачи по готовым чертежам

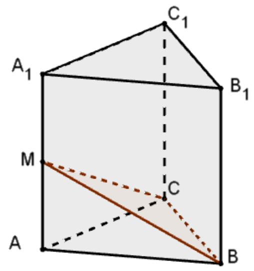
1. Высота правильной треугольной пирамиды равна стороне основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.



2. В основании пирамиды лежит квадрат, одно из боковых рёбер перпендикулярно основанию и равно стороне основания. Найдите большее боковое ребро, если высота пирамиды равна $4\sqrt{3}$.

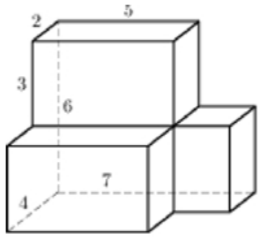


3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через сторону BC основания и середину M бокового ребра AA_1 проведено сечение, составляющее угол 45° с плоскостью основания. Найдите объём призмы, если сторона её основания равна 10.



Прикладная геометрия

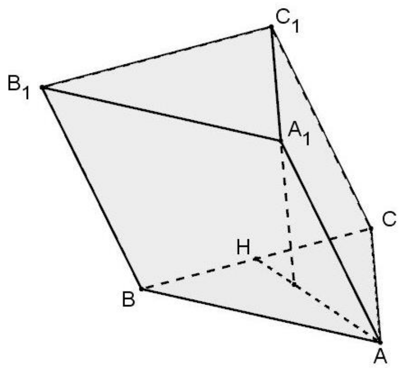
4. Деталь имеет форму изображённого на рисунке многогранника (все двугранные углы прямые). Числа на рисунке обозначают длины рёбер в сантиметрах. Найдите площадь поверхности этой детали. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



5. Сколько нужно заплатить (в рублях) за покупку минимального количества рулонов виниловых обоев для оклейки комнаты в форме прямоугольного параллелепипеда, с размерами пола 5x4 м^2 и высотой 2 м, если ширина одного рулона 530 мм, а длина – 16 м? Площадь окон и дверей составляет 20% всей плоскости стен. Стоимость одного рулона обоев 860 рублей.

Повышенный уровень сложности

6. Дана наклонная призма $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежит правильный треугольник ABC. Проекция точки A_1 на плоскость ABC лежит на прямой, содержащей высоту AH треугольника ABC. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости BB_1C, если боковое ребро, наклоненное под углом 60^0 к основанию, равно 12, а сторона основания равна 3.

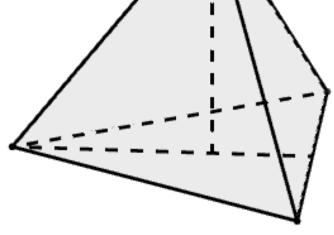


7. Площадь сечения куба плоскостью, проходящей через концы трёх ребер, выходящих из одной вершины, равна $18\sqrt{3}$. Найдите длину ребра куба.

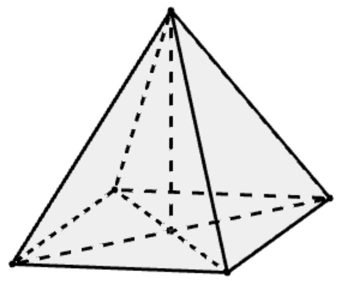
Группа 4 (углубленный уровень)

Задачи по готовым чертежам

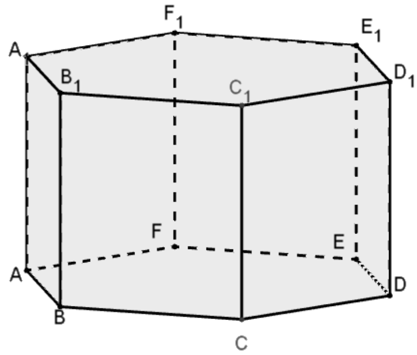
1. Высота правильной треугольной пирамиды втрое меньше стороны основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.



2. В основании пирамиды лежит ромб, большая диагональ которого равна 22. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей и равна $5\sqrt{3}$. Найдите большее боковое ребро.

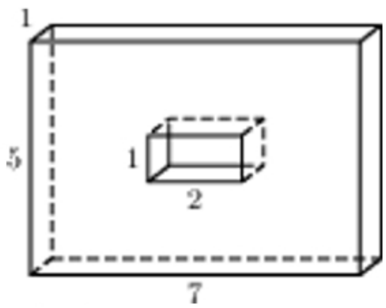


3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ рёбра основания равны 5, а высота равна $10\sqrt{3}$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки B, C, E, B_1, C_1, E_1.



Прикладная геометрия

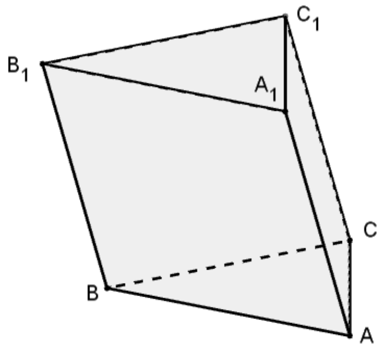
4. Деталь имеет форму изображённого на рисунке многогранника (все двугранные углы прямые). Числа на рисунке обозначают длины рёбер в сантиметрах. Найдите площадь поверхности этой детали. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



5. Вычислите, минимальную сумму (в рублях), которую нужно потратить на приобретение листов шифера длиной 1,75 м, шириной 1,13 м при покрытии кровли в форме правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 4,2 м и длиной уклона 6 м. Стоимость одного листа шифера 490 рублей.

Повышенный уровень сложности

6. Дана наклонная призма $ABCA_1B_1C_1$. Найдите расстояние от точки A_1 до прямой BB_1, если в основании призмы лежит правильный треугольник ABC со стороной $9\sqrt{2}$, $AA_1=4$ и $\angle BAA_1=\angle CAA_1=45^0$.



7. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны $\sqrt{24}$. Найдите расстояние от точки D до прямой A_1C_1.

Список использованных источников

1. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений. 4-е изд. М.: Рос. акад. наук, Рос. акад-. образования, изд-во «Просвещение», 2006. 240 с.
2. Алимов А. Ш. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия: 10-11 е классы: базовый и углубленный уровни / А. Ш. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева. М. : Просвещение, 2016. 463 с.
3. Атанасян Л. С. Геометрия 10-11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профил. уровни / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев. М. : Просвещение, 2018. 255 с.
4. Веселовский С.Б., Рябчинская В.Д. Геометрия: дидактические материалы по геометрии для 10 класса. М.: Просвещение, 2008. 96 с.
5. Геометрия. 10-11 классы: программы общеобразовательных учреждений / Сост.: Т.А. Бурмистрова. М.: Просвещение, 2010. 38 с.
6. Геометрия:задачи на готовых чертежах для подготовки к ЕГЭ 10-11 классы / Э.Н.Балаян.-Ростов/Д:Феникс;2018-208 с.
7. Глазков Ю.А., Юдина И.И., Бутузов В.Ф. Геометрия. Рабочая тетрадь 10 класс: пособие для учащихся общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2009. 100 с.
8. Задачи на готовых чертежах. Стереометрия: практикум для учащихся учреждений общего образования:в 2ч.Ч.2 / А.И.Орехова.-5-е изд.-Мозырь:Белый ветер,2014.-62,с.:ил.-(Дидактический материал).
9. Изучение геометрии в 10-11 классах: метод. рекомендации к учеб. / Кн. для учителя / [С.М. Саакян, В.Ф. Бутузов]. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2003 г.
10. Кисилев А. П. Геометрия: учебное пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 328 с.
11. Ковалева Г.И. Геометрия. Задания на готовых чертежах по стереометрии. 10-11 классы.
12. Костицын В.Н. Практические занятия стереометрии. -М.: Издательство «Экзамен», 2004. 160 с.
13. Погорелов А.В. Геометрия. 10-11 класс. Учебник для общеобразоват. организаций. М.: Просвещение, 2014. 175с.
14. Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ по математике [Электронный ресурс] – URL: https://math100.ru/
15. Поурочные разработки по геометрии: 10 класс / Сост. В.А. Яровенко. – М.: ВАКО, 2010.
16. Рабинович Е.М. Задачи и упражнения на готовых чертежах. 10-11 классы. Геометрия. М.: Илекса, 2014. 80 с.

17. Рыжик В.И. Геометрия: дидакт. материалы для 10 кл. общеобразовательных учреждений. 10-е изд. М.: Просвещение, 2008. 128 с.

18. Рябинович Е.М.Задачи и упражнения на готовых чертежах.10-11 классы.Геометрия.-М.:ИЛЕКСА,2014.-80 с.

19. Саакян С.М., Бутузов В.Ф. Изучение геометрии в 10-11 классах: кн. для учителя. 4-е изд., дораб. М.: Просвещение, 2010. 248 с.

20. Саакян С.М., Бутузов В.Ф. Изучение геометрии в 10-11 классах: Методические рекомендации к учебнику: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 2003.

21. Савченко, В. И. Стереометрия на готовых чертежах и макетах / В.И. Савченко, М.В. Крылович. - Минск: Сэр-Виг, 2014. - 96 с.

22. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике. 2-е изд., дораб. М.: Просвещение, 2005. 255 с.

23. Симонов А.Я., Бакаев Д.С., Эпельман А.Г. и др. Система тренировочных задач и упражнений по математике. – М., Просвещение, 1991.

24. Смирнов В.А. «Геометрия. Стереометрия», пособие для подготовки к ЕГЭ/под редакцией А.Л. Семёнова, И.В. Ященко/Москва, изд-во МЦНМО, 2009 г.

25. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Изображение пространственных фигур. Элективный курс. 10-11 классы: учеб. пособие для общеобразоват. учреждений М.: Мнемозина, 2007. 64 с.

26. Ященко И.В., Шестаков С.А. Я сдам ЕГЭ! Математика. Типовые задания. Учебное пособие для общеобразовательных организаций. Профильный уровень. Часть 3. Геометрия. – М. Просвещение, 2018.

Авторы – составители:

Белай Елена Николаевна, заведующий кафедрой математики, информатики и технологического образования ГБОУ ИРО Краснодарского края
Задорожная Ольга Владимировна, доцент кафедры математики, информатики и технологического образования ГБОУ ИРО Краснодарского края
Кузьмина Карина Александровна, старший преподаватель кафедры математики, информатики и технологического образования ГБОУ ИРО Краснодарского края
Борейко Алла Сергеевна, учитель математики МБОУ СОШ № 6 ст. Каневской
Борщакова Елена Николаевна, учитель математики МОАУ СОШ №4 им. А.И. Миргородского г. Новокубанска Новокубанский район
Волкова Ольга Алексеевна, учитель математики МАОУ СОШ № 34, г. Новороссийск
Голинченко Ольга Николаевна, учитель математики МБОУ СОШ № 5 имени Я.П. Сторчака ст. Октябрьская, Крыловский район
Еременко Ольга Николаевна, учитель математики МАОУ СОШ 2 им Н.В.Богданченко, Усть-Лабинский район
Кобецкая Нелли Александровна, учитель математики МОАНУ СОШ № 17 им. К.В. Навальневой, Кореновский район
Костюченко Анастасия Сергеевна, учитель математики МБОУ СОШ № 43 станицы Северской МО Северский район имени Героя Советского Союза С.Г.Соболева
Пенькова Анастасия Николаевна, учитель математики МБОУ СОШ № 14 им. Д.А. Старикова с. Соколовское, Гулькевичский район
Попова Ирина Николаевна, учитель математики МБОУ СОШ № 6 им. Ю.А. Гагарина, Кавказский район
Прошина Елена Анатольевна, учитель математики МАОУ СОШ 35, г. Краснодар
Роговая Марина Александровна, учитель математики МБОУ СОШ № 15 им. В.П. Михалько с. Отрадо-Кубанского, Гулькевичский район
Рубенкова Ольга Семеновна, учитель математики МБОУ СОШ № 1 г. Тихорецка
Татаркина Ольга Алексеевна, учитель математики МБОУ СОШ № 33 им. Ю.А. Гагарина, Тихорецкий район
Ткачева Елена Васильевна, учитель математики МБОУ СОШ №8 ст. Новорождественской, Тихорецкий район
Чередниченко Инесса Викторовна, учитель математики МОАНУ СОШ № 17 им. К.В. Навальневой, Кореновский район
Шакитько Олеся Ивановна, учитель математики МОАНУ СОШ № 17 им. К.В. Навальневой, Кореновский район

Учебное пособие

Практикум по геометрии
10 класс

Формат бумаги 60x84/8. Усл. печ. л. 17.79 Тираж 100 экз.
Отпечатано: 350080, г. Краснодар, ул. Сормовская, 167,
ГБОУ ИРО Краснодарского края
Информационно-издательский ресурсный центр