МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЕЖНОЙ ПОЛИТИКИ
КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ» КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

РЕАЛИЗАЦИЯ КУРСА «ПРАКТИКУМ ПО ГЕОМЕТРИИ 11 КЛАСС»

Учебно-методическое пособие

Краснодар
2024

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ» КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ, ИНФОРМАТИКИ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

РЕАЛИЗАЦИЯ КУРСА «ПРАКТИКУМ ПО ГЕОМЕТРИИ» 11 КЛАСС

Учебно-методическое пособие

Краснодар, 2024

УДК 372.851
ББК 74.262.21
П 69

Рекомендовано к изданию решением редакционно-издательского совета ГБОУ ИРО Краснодарского края протоколом № 3 от 21.08.2024 г.

Рецензенты:
Васильева Ирина Викторовна, доцент кафедры функционального анализа и алгебры КубГУ, к.п.н.
Задорожная Ольга Владимировна, доцент кафедры математики, информатики и технологического образования ГБОУ ИРО Краснодарского края

П 69 Практикум по геометрии, 11класс»: учебное пособие. / под ред. Д.С. Барышенского. – Краснодар : ГБОУ ИРО Краснодарского края. - 2024. - 223 с.

Авторы – составители:
Белай Елена Николаевна, заведующий кафедрой математики, информатики и технологического образования ГБОУ ИРО Краснодарского края
Барышенский Дмитрий Сергеевич, доцент кафедры математики, информатики и технологического образования ГБОУ ИРО Краснодарского края
Оплачко Галина Федоровна, учитель математики МБОУ СОШ №4, Приморско-Ахтарский район
Тищенко Ольга Юрьевна, учитель математики МАОУ гимназии № 25, г. Краснодар
Боклаг Валентина Николаевна, учитель математики МОБУ СОШ №1 0 г. Сочи
Халанджян Алла Андрониковна, учитель математики МОБУ СОШ № 100 г. Сочи
Самедова Инна Сабировна, учитель математики МБОУ гимназия № 1, г. Армавир
Любченко Лариса Александровна, учитель математики МАОУ СОШ №18, г. Армавир
Романова Анна Владимировна, учитель математики МАОУ лицей № 11 г. Армавир
Селютина Елена Александровна, учитель математики МАОУ СОШ № 7 г. Армавир
Шевцова Карина Анатольевна, учитель математики МАОУ СОШ № 2 Павловский район
Пшеничная Любовь Александровна, учитель математики МАОУ СОШ № 10, Павловский район
Власова Александра Анатольевна, старший преподаватель кафедры математики, информатики и технологического образования ГБОУ ИРО Краснодарского края
Решетилова Татьяна Васильевна, учитель математики МОУ СОШ № 80 г. Сочи
Марич Ольга Ивановна, учитель математики МАОУ СОШ № 4 Абинский район
Кармазина Маргарита Викторовна, учитель математики МБОУ СОШ №1, Красноармейский район
Насонова Татьяна Владимировна, учитель математики МБОУ СОШ №3, г. Геленджик
Колмакова Ольга Александровна, учитель математики МОБУ СОШ №16 Лабинский район

Данное пособие входит в учебно-методический комплект для преподавания элективного курса для обучающихся 11-х классов «Практикум по геометрии» и предназначено для обучающихся.

Оглавление

Предисловие

Настоящее учебно-методическое пособие для учителя «Реализация курса «Практикум по геометрии, 11 класс» рассчитано в помощь учителю математики в преподавании элективного курса. В пособии содержится рабочая программа курса с календарно-тематическим планированием, примерный план каждого занятия, проверочные и практические работы, ответы ко всем заданиям.

Каждое занятие начинается с рубрики «Повторяем теорию» для актуализации знаний обучающихся, далее рубрика «Проверяем себя», в которой предлагаются задания на проверку теоретического материала, обозначенные (Т1). Также в каждом занятии предлагается рубрика «Решаем задачи», содержащая по 5-7 типов заданий (а), б), в)). Задания а) обучающиеся решают вместе, обсуждая с учителем. Учитель при необходимости задает дополнительные наводящие вопросы для продвижения в решении заданий. Обучающиеся проговаривают основные понятия, определения, свойства в ходе решения задания. Задания б) обучающиеся решают самостоятельно, возможно, работая в парах. Задания в) предназначены для домашней работы. В некоторых занятиях предусмотрена рубрика «Задачи с развернутым ответом», в которой предлагаются задания повышенного уровня сложности (типа № 14 и № 17 ЕГЭ по математике профильного уровня), номера таких заданий подчеркнуты (12).

Для удобства все задания по курсу имеют сквозную нумерацию, после каждого задания приводится ответ. Практическая работа содержит практико-ориентированные задания. Возможно проведение практической работы по группам и парам с использованием чертежных инструментов.

Проверочные работы, предусмотреные в конце первого полугодия и в конце второго полугодия, направлены на оценивание уровня знаний и умений обучающихся на определенном этапе усвоения изучаемого материала.

Итоговое занятие курса возможно провести учителю по своему усмотрению в зависимости от результатов проверочных работ и уровня усвоенных знаний обучающихся.

В пособии для обучающегося собран краткий теоретический материал, теоретические, практические задачи базового уровня сложности по разделам. Задачи с развернутым ответом размещены в конце пособия, ответы не предусмотрены.

Рабочая программа элективного курса
«Практикум по геометрии, 11 класс»

Рабочая программа элективного курса «Практикум по геометрии» разработана в соответствии с требованиями ФГОС СОО, на основе Федеральной рабочей программы по учебному предмету «Математика» базовый уровень (ссылка https://edsoo.ru/rabochie-programmy/), с учетом федеральной программы воспитания (ссылка https://xn--80adrabb4aegksdjbafk0u.xn--p1ai/upload/medialibrary/ddc/sr3zcu3teyyu74meajjj1vzn171157v9.pdf),

Рабочая программа предназначена для обучающихся 11 классов и рассчитана на 34 часа в год.

Цель элективного курса:

- создать условия для формирования устойчивых знаний обучающихся по геометрии (планиметрии и стереометрии) на базовом уровне.

Задачи элективного курса:

- повысить мотивацию обучающихся к изучению геометрии;
- создать «ситуацию успеха» у обучающихся при решении геометрических задач;
- обобщить и систематизировать геометрические знания обучающихся;
- совершенствовать практические навыки, математическую культуру обучающихся;
- уметь применять геометрический аппарат для решения разнообразных математических задач базового и повышенного уровня сложности.

1. Планируемые результаты освоения элективного курса

Изучение геометрии по данной программе способствует формированию у обучающихся личностных, метапредметных и предметных результатов обучения, соответствующих требованиям федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования и федеральной программе воспитания.

Личностные результаты:

1) гражданское воспитание: сформированность гражданской позиции обучающегося как активного и ответственного члена российского общества, представление о математических основах функционирования различных структур, явлений, процедур гражданского общества (выборы, опросы и другое);
2) патриотическое воспитание: сформированность российской гражданской идентичности, уважения к прошлому и настоящему российской математики,

ценностное отношение к достижениям российских математиков и российской математической школы;
3) духовно-нравственного воспитания: осознание духовных ценностей российского народа, сформированность нравственного сознания, связанного с практическим применением достижений науки и деятельностью учёного;
4) эстетического воспитания: эстетическое отношение к миру, включая эстетику математических закономерностей, объектов, задач, решений, рассуждений, восприимчивость к математическим аспектам различных видов искусства;
5) физического воспитания: сформированность умения применять математические знания в интересах здорового и безопасного образа жизни, ответственное отношение к своему здоровью;
6) трудового воспитания: готовность к труду, осознание ценности трудолюбия, интерес к различным сферам профессиональной деятельности, связанным с математикой, умение совершать осознанный выбор будущей профессии и реализовывать собственные жизненные планы; готовность к активному участию в решении практических задач математической направленности;
7) экологического воспитания: сформированность экологической культуры, ориентация на применение математических знаний для решения задач в области окружающей среды;
8) ценности научного познания: сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, понимание математической науки как сферы человеческой деятельности, этапов её развития и значимости для развития цивилизации, овладение языком математики и математической культурой как средством познания мира, готовность осуществлять проектную и исследовательскую деятельность индивидуально и в группе.

Метапредметные результаты:

Познавательные универсальные учебные действия.

Базовые логические действия: выявлять и характеризовать существенные признаки математических объектов, понятий, отношений между понятиями, формулировать определения понятий, устанавливать существенный признак классификации, основания для обобщения и сравнения, критерии проводимого анализа; проводить самостоятельно доказательства математических утверждений (прямые и от противного), выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры, обосновывать собственные суждения и выводы; выбирать способ решения учебной задачи.

Базовые исследовательские действия: использовать вопросы как исследовательский инструмент познания, формулировать вопросы, фиксирующие противоречие, проблему, устанавливать искомое и данное, формировать гипотезу, аргументировать свою позицию, мнение; проводить самостоятельно спланированный эксперимент, исследование по установлению особенностей математического объекта, явления, процесса, выявлению зависимостей между объектами, явлениями, процессами; самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого наблюдения, исследования, оценивать достоверность полученных результатов, выводов и обобщений; прогнозировать возможное развитие процесса, а также выдвигать предположения о его развитии в новых условиях.
Работа с информацией: выявлять дефициты информации, данных, необходимых для ответа на вопрос и для решения задачи; выбирать информацию из источников различных типов, анализировать, систематизировать и интерпретировать информацию различных видов и форм представления; структурировать информацию, представлять её в различных формах.
Коммуникативные универсальные учебные действия:
воспринимать и формулировать суждения в соответствии с условиями и целями общения, ясно, точно, грамотно выражать свою точку зрения в устных и письменных текстах, давать пояснения по ходу решения задачи, комментировать полученный результат;
сопоставлять свои суждения с суждениями других участников диалога, обнаруживать различие и сходство позиций, в корректной форме формулировать разногласия, свои возражения; представлять результаты решения задачи, эксперимента, исследования, проекта, самостоятельно выбирать формат выступления с учётом задач презентации и особенностей аудитории.
Регулятивные универсальные учебные действия
Самоорганизация: составлять план, алгоритм решения задачи, выбирать способ решения с учётом имеющихся ресурсов и собственных возможностей.
Самоконтроль, эмоциональный интеллект: владеть навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов, владеть способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи.
Совместная деятельность: понимать и использовать преимущества командной и индивидуальной работы при решении учебных задач, принимать цель совместной деятельности, планировать организацию совместной работы; участвовать в групповых формах работы.

Предметные результаты:
пользоваться признаками равенства треугольников, использовать признаки и свойства равнобедренных треугольников при решении задач;
распознавать основные виды четырёхугольников, их элементы, пользоваться их свойствами при решении геометрических задач;
знать тригонометрические функции острых углов;
проводить логические рассуждения с использованием геометрических теорем.
распознавать основные виды многогранников (пирамида, призма, прямоугольный параллелепипед, куб);
вычислять объёмы и площади поверхностей многогранников (призма, пирамида) с применением формул, вычислять соотношения между площадями поверхностей, объёмами подобных многогранников;
применять геометрические факты для решения стереометрических задач, предполагающих несколько шагов решения;
моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин;
оперировать понятиями: цилиндр, конус, сферическая поверхность; распознавать тела вращения (цилиндр, конус, сфера и шар); классифицировать взаимное расположение сферы и плоскости;
оперировать понятиями: шаровой сегмент, основание сегмента, высота сегмента, шаровой слой, основание шарового слоя, высота шарового слоя, шаровой сектор;
вычислять объёмы и площади поверхностей тел вращения, геометрических тел с применением формул;
оперировать понятиями: многогранник, вписанный в сферу и описанный около сферы, сфера, вписанная в многогранник или тело вращения;
вычислять соотношения между площадями поверхностей и объёмами подобных тел; строить сечения тел вращения;
извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию о пространственных геометрических фигурах;
выполнять действия сложения векторов, вычитания векторов и умножения вектора на число;
находить сумму векторов и произведение вектора на число, угол между векторами, скалярное произведение, раскладывать вектор по двум неколлинеарным векторам; задавать плоскость уравнением в декартовой системе координат;
применять геометрические факты для решения стереометрических задач, предполагающих несколько шагов решения, если условия применения заданы в

явной форме; решать простейшие геометрические задачи на применение векторно-координатного метода;
решать задачи на доказательство математических отношений и нахождение геометрических величин по образцам или алгоритмам, применяя известные методы при решении стандартных математических задач;
применять полученные знания на практике: анализировать реальные ситуации и применять изученные понятия в процессе поиска решения математически сформулированной проблемы, моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин.

2. Содержание курса

Повторение планиметрии (4 часа)

Треугольники. Виды треугольников. Сумма углов треугольника. Внешние углы треугольника Углы в равнобедренном, равностороннем треугольниках. Свойства углов параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции. Вписанные и описанные окружности для треугольников, четырехугольников, правильных многоугольников. Тригонометрические функции острого угла в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора. Теорема, обратная теореме Пифагора. Значения синуса, косинуса, тангенса для углов 30°, 45°, 60°. Вычисление элементов треугольников с использованием тригонометрических соотношений. Площадь параллелограмма. Площадь прямоугольника. Площадь ромба. Площадь квадрата. Площадь трапеции. Площадь треугольника. Площадь многоугольника.

Повторение курса геометрии 10 класса (4 часа)

Простейшие пространственные фигуры на плоскости: тетраэдр, куб, параллелепипед, построение сечений. Призма: n-угольная призма, грани и основания призмы, прямая и наклонная призмы, боковая и полная поверхность призмы. Параллелепипед, прямоугольный параллелепипед и его свойства. Пирамида: n-угольная пирамида, грани и основание пирамиды, боковая и полная поверхность пирамиды, правильная и усечённая пирамида. Вычисление элементов многогранников: рёбра, диагонали, углы. Площадь боковой поверхности и полной поверхности прямой призмы, площадь оснований, теорема о боковой поверхности прямой призмы. Площадь боковой поверхности и поверхности правильной пирамиды, теорема о площади усечённой пирамиды. Понятие об объёме. Объём пирамиды, призмы. Подобные тела в пространстве. Соотношения между площадями поверхностей, объёмами подобных тел.

Тела вращения (20 часов).

Цилиндр: основания и боковая поверхность, образующая и ось, площадь боковой и полной поверхности. Конус: основание и вершина, образующая и ось, площадь боковой и полной поверхности. Усечённый конус: образующие и высота, основания и боковая поверхность. Сфера и шар: центр, радиус, диаметр, площадь поверхности сферы. Взаимное расположение сферы и плоскости, касательная плоскость к сфере, площадь сферы. Изображение тел вращения на плоскости. Развёртка цилиндра и конуса. Комбинации тел вращения и многогранников. Многогранник, описанный около сферы, сфера, вписанная в многогранник, или тело вращения. Понятие об объёме. Основные свойства объёмов тел. Теорема об объёме прямоугольного параллелепипеда и следствия из неё. Объём цилиндра, конуса. Объём шара и площадь сферы. Подобные тела в пространстве. Соотношения между площадями поверхностей, объёмами подобных тел. Сечения цилиндра (параллельно и перпендикулярно оси), сечения конуса (параллельное основанию и проходящее через вершину), сечения шара.

Векторы и координаты в пространстве (6 часов).

Вектор на плоскости и в пространстве. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора по трём некомпланарным векторам. Правило параллелепипеда. Решение задач, связанных с применением правил действий с векторами. Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты вектора. Простейшие задачи в координатах. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов. Вычисление углов между прямыми и плоскостями. Координатно-векторный метод при решении геометрических задач.

3. Тематическое (календарно-тематическое) планирование элективного курса

<table>
<tr><th>№ занятия</th><th>Тема анятия</th><th>Дата (план)</th><th>Дата (факт)</th><th>Основные виды деятельности обучающихся (на уровне учебных действий)</th><th>Электронные (цифровые) образовательные ресурсы*</th><th>Материально-техническое оснащение (оборудование)**</th><th>Универсальные учебные действия (УУД), межпредметные понятия</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Повторение планиметрии. Треугольники</td><td></td><td></td><td rowspan="10">Решать простейшие задачи на нахождение длин и углов в геометрических фигурах, применять теорему Пифагора, теоремы синусов и косинусов. Находить площадь многоугольника, круга. Распознавать подобные фигуры, находить отношения длин и площадей. Использовать при решении стереометрических задач факты и методы планиметрии. Параллелепипед, прямоугольный параллелепипед и его свойства. Пирамида: n-угольная пирамида, грани и основание пирамиды; боковая и полная поверхность пирамиды; правильная и усечённая пирамида.</td><td rowspan="10">1, 2, 3</td><td rowspan="10">1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9</td><td rowspan="10">Личностные УУД
Патриотическое воспитание: ценностное отношение к достижениям российских математиков и российской математической школы.
Гражданское и воспитание: представление о математических основах функционирования различных структур, явлений, процедур гражданского общества.
Духовно-нравственное воспитание: осознание духовных ценностей российского народа.
Трудовое воспитание: готовность к труду, осознание ценности трудолюбия, интерес к различным сферам профессиональной деятельности, связанным с математикой.
Эстетическое воспитание: эстетическое отношение к миру, включая эстетику математических</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Повторение планиметрии. Четырехугольники</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Повторение планиметрии. Площади многоугольников</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>Повторение планиметрии. Окружность</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>Повторение курса геометрии 10 класса. Куб</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>Повторение курса геометрии 10 класса. Параллелепипед</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>Повторение курса геометрии 10 класса. Призма</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>Повторение курса геометрии 10 класса. Пирамида</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>Тела вращения. Цилиндр. Виды сечений</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>Тела вращения. Площадь поверхности цилиндра</td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>11</td><td>Тела вращения. Конус. Виды сечений</td><td></td><td></td><td rowspan="19">Элементы призмы и пирамиды. Находить площадь полной и боковой поверхности пирамиды. Находить площадь полной или боковой поверхности призмы.
Использовать формулы для вычисления площади боковой поверхности цилиндра, конуса, сферы. Изображать цилиндр и его сечения плоскостью, проходящей через его ось, параллельной или перпендикулярной оси. Находить площади этих сечений. Изображать конус и его сечения плоскостью, проходящей через ось, и плоскостью, перпендикулярной к оси. Использовать формулы объёмов: призмы, цилиндра, пирамиды, конуса; усечённой пирамиды и усечённого конуса. Решать стереометрические задачи, связанные с вычислением объёмов. Решать стереометрические задачи, связанные с соотношением объёмов и поверхностей</td><td rowspan="19"></td><td rowspan="19"></td><td rowspan="19">закономерностей, объектов, задач
Ценности научного познания: понимание математической науки как сферы человеческой деятельности.
Физическое воспитание: сформированность умения применять математические знания в интересах здорового и безопасного образа жизни.
Экологическое воспитание: ориентация на применение математических знаний для решения задач в области окружающей среды
Познавательные УУД:
Базовые логические действия: выявлять и характеризовать существенные признаки математических объектов, понятий, формулировать устанавливать существенный признак классификации, проводить самостоятельно доказательства математических утверждений, выстраивать аргументацию; выбирать способ решения учебной задачи.
Базовые исследовательские действия: аргументировать свою позицию, мнение.
Работа с информацией: выбирать</td></tr>
<tr><td>12</td><td>Тела вращения. Площадь поверхности конуса</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>13</td><td>Тела вращения. Усеченный конус</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>14</td><td>Тела вращения. Сфера и шар</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td>Шар, вписанный и описанный</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>16</td><td>Проверочная работа</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>17</td><td>Практическая работа «Сечения тел вращения»</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>18</td><td>Площадь поверхности цилиндра. Объём цилиндра</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>19</td><td>Площадь поверхности цилиндра. Объём цилиндра</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>20</td><td>Объемы тел. Конус</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>21</td><td>Объемы тел. Конус</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>22</td><td>Объемы тел. Усеченный конус</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>23</td><td>Объемы тел. Шар</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>24</td><td>Объемы тел. Шар</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>25</td><td>Комбинация тел. Цилиндр, призма</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>26</td><td>Комбинация тел. Цилиндр, шар</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>27</td><td>Комбинация тел. Цилиндр, конус. Конус, шар</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>28</td><td>Комбинация тел. Конус, шар</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>29</td><td>Векторы</td><td></td><td></td></tr>
</table>

30	Векторы и координаты			подобных тел в пространстве. Складывать, вычитать векторы, умножать вектор на число. Выражать скалярное произведение векторов через их координаты, вычислять угол между двумя векторами, двумя прямыми.			информацию из источников различных типов, анализировать, систематизировать и интерпретировать информацию, структурировать информацию, представлять её в различных формах. *Коммуникативные УУД:* воспринимать и формулировать суждения в соответствии с условиями и целями общения, ясно, выражать свою точку зрения, давать пояснения по ходу решения задачи, комментировать полученный результат; сопоставлять свои суждения с суждениями других представлять результаты решения задачи. *Регулятивные УУД* Самоорганизация: оставлять план, алгоритм решения задачи, выбирать способ решения. Самоконтроль, эмоциональный интеллект: владеть способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи: Совместная деятельность: понимать и использовать преимущества командной и индивидуальной работы при решении учебных задач.
31	Скалярное произведение векторов						
32	Угол между векторами						
33	Проверочная работа						
34	Итоговое занятие по обобщению и систематизации знаний за курс						

							Межпредметные понятия: сравнение, схема, расстояние, признаки, свойства, классификация, площадь, соотношения, формула, аналогия, обобщение, систематизация, интерпретация, теорема, задача.
	Итого	**34**					проверочные работы – 2 практические работы - 1

*Электронные (цифровые) образовательные ресурсы.

1. Открытый банк заданий ЕГЭ. Математика. Базовый уровень https://ege.fipi.ru/bank/index.php?proj=E040A72A1A3DABA14C90C97E0B6EE7DC,

2. Открытый банк заданий ЕГЭ. Математика. Профильный уровень https://ege.fipi.ru/bank/index.php?proj=AC437B34557F88EA4115D2F374B0A07B

3. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика Профильный уровень. https://ege.sdamgia.ru/

**Материально-техническое оснащение (оборудование)

1. Учебное пособие для обучающихся «Практикум по геометрии, 11 класс», ГБОУ ИРО Краснодарского края, 2024.

2. Учебно-методическое пособие для учителя «Реализация элективного курса «Практикум по геометрии», 11 класс», ГБОУ ИРО Краснодарского края, 2024.

3. Классный набор чертежных инструментов (линейка классная, угольник классный, циркуль классный, транспортир классный)

4. Доска магнитно-маркерная или меловая.

5. Проектор мультимедийный с креплением

6. Компьютер (ноутбук) педагога.

7. Компьютер (ноутбук) обучающегося.

8. Интерактивная доска (при наличии в ОО).

9. Индивидуальный набор чертежных инструментов обучающегося (линейка, угольник, транспортир).

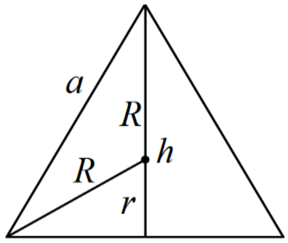
Занятие 1. Треугольники

Оплачко Галина Федоровна

В **равностороннем треугольнике** имеют место следующие соотношения:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \qquad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \qquad R = \frac{a}{\sqrt{3}}, \qquad r = \frac{a}{2\sqrt{3}},$$

$$r = \frac{1}{3}h, \qquad R = \frac{2}{3}h, \qquad R = 2r, \qquad r + R = h.$$

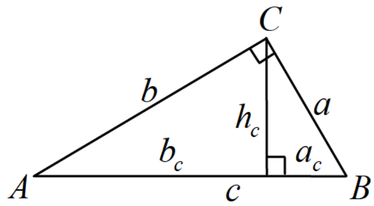


В **прямоугольном треугольнике** имеют место следующие соотношения:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

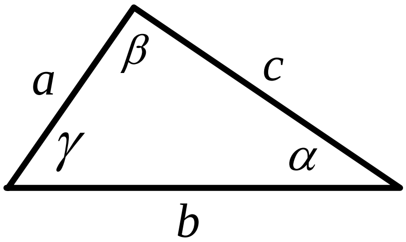
$$a_c = \frac{a^2}{c}, \qquad b_c = \frac{b^2}{c}, \qquad h_c = \frac{ab}{c}, \qquad h_c = \sqrt{a_c b_c},$$

$$\sin A = \frac{a}{c}, \qquad \cos A = \frac{b}{c}, \qquad \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \qquad \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$



Теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$



<u>Проверяем себя:</u>

Т1. Заполните пропуски:

а) Гипотенуза — это сторона прямоугольного треугольника, лежащая против _______.

Ответ: прямого угла

б) Если два угла треугольника равны, то треугольник ______

Ответ: равнобедренный

Т2. Укажите верные утверждения:

а) биссектрисы треугольника пересекаются в точке, которая является центром окружности, вписанной в этот треугольник;

б) всякий равнобедренный треугольник является остроугольным;

в) любые два равносторонних треугольника подобны.

Ответ: а), в)

Т3. Укажите неверные утверждения:

а) один из углов треугольника всегда не превышает 60 градусов;

б) все прямоугольные треугольники подобны;

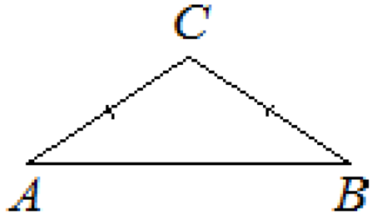
в) центры вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника совпадают.

Ответ: б)

<u>Решаем задачи:</u>

№1

а) В треугольнике ABC угол A равен 37°, стороны AC и BC равны. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 106

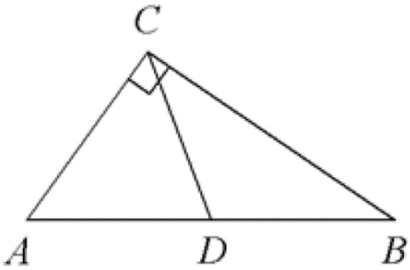
б) В треугольнике ABC угол B равен 41°, стороны AC и BC равны. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 98

в) В треугольнике ABC угол C равен 114°, стороны AC и BC равны. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 33

№2



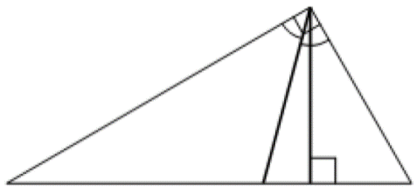
а) В треугольнике ABC CD – медиана, угол C равен 90°, угол B равен 35°. Найдите угол ACD. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 55

б) В треугольнике ABC CD – медиана, угол C равен 90°, угол B равен 17°. Найдите угол ACD. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 73

в) В треугольнике ABC CD – медиана, угол C равен 90°, угол B равен 31°. Найдите угол ACD. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 59

№3



а) В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 14°. Найдите меньший угол прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 31

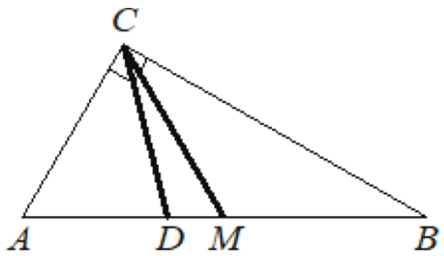
б) В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 34°. Найдите меньший угол прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 11

в) В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 9°. Найдите меньший угол прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 36

№4



а) Угол между биссектрисой CD и медианой CM прямоугольного треугольника, проведёнными из вершины прямого угла, равен 12°. Найдите меньший угол прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах

Ответ: 33

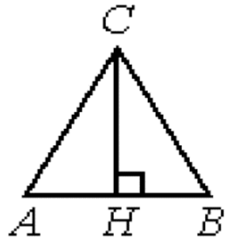
б) Острый угол В прямоугольного треугольника АВС равен 21. Найдите величину угла между биссектрисой CD и медианой CM проведёнными из вершины прямого угла С. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 24

в) Острый угол В прямоугольного треугольника АВС равен 16. Найдите величину угла между биссектрисой CD и медианой CM проведёнными из вершины прямого угла С. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 29

№5



а) В равностороннем треугольнике АВС высота СН равна $45\sqrt{3}$. Найдите АВ.

Ответ: 90

б) В равностороннем треугольнике АВС высота СН равна $47\sqrt{3}$. Найдите АВ.

Ответ: 94

в) В равностороннем треугольнике АВС высота СН равна $27\sqrt{3}$. Найдите АВ.

Ответ: 54

№6

а) В треугольнике АВС АС=ВС=16, АВ=8. Найдите cosA.

Ответ: 0,25

б) В треугольнике АВС АС=ВС=20, АВ=12. Найдите cosA.

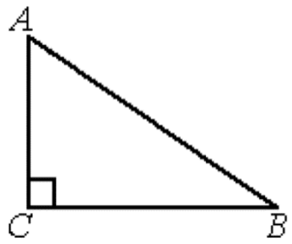
Ответ: 0,3

в) В треугольнике АВС АС=ВС=20, АВ=28. Найдите cosA.

Ответ: 0,7

№7

а) В треугольнике ABC угол C равен 90°, BC=12, $\cos B = \frac{3}{5}$. Найдите AB.



Ответ: 20

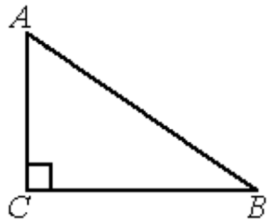
б) В треугольнике ABC угол C равен 90°, AB=15, BC=9. Найдите cosA.

Ответ: 0,6

в) В треугольнике ABC угол C равен 90°, BC=12, $\cos B = \frac{4}{5}$. Найдите AB. *Ответ: 15*

№8

а) В треугольнике ABC угол C равен 90°, BC=6, AB=10. Найдите sinB.



Ответ: 0,8

б) В треугольнике ABC угол C равен 90°, BC=$8\sqrt{6}$, AB=20. Найдите sinB.

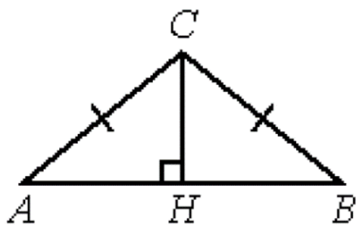
Ответ: 0,2

в) В треугольнике ABC угол C равен 90°, BC=$3\sqrt{21}$, AB=15. Найдите sinB.

Ответ: 0,4

№9

а) В треугольнике ABC AC=BC, высота CH равна 7,2, $\cos A = \frac{4}{5}$. Найдите AC.



Ответ: 12

б) В треугольнике ABC AC=BC, высота CH равна 9,6, $\cos A = \frac{7}{25}$. Найдите AC.

Ответ: 10

в) В треугольнике ABC AC=BC, высота CH равна 19,2, cosA=0,28. Найдите AC.

Ответ: 20

№10

а) В треугольнике ABC AC=BC, AB=5, высота AH равна 4. Найдите синус угла BAC.

Ответ: 0,8

б) В треугольнике ABC AC=BC, AB=8, AH – высота, BH=2. Найдите косинус угла BAC.

Ответ: 0,25

в) В треугольнике ABC AB=BC, AC=24, высота CH равна 18. Найдите синус угла ACB.

Ответ: 0,75

Задача с развёрнутым решением

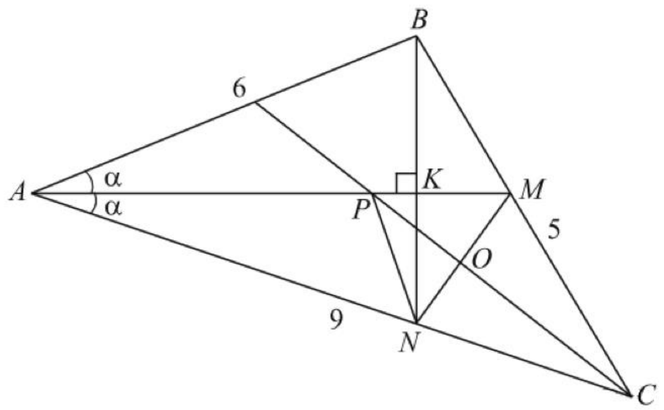
В треугольнике ABC проведена биссектриса AM. Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM, пересекает сторону AC в точке N. $AB = 6$; $BC = 5$; $AC = 9$.

а) докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам

б) пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите отношение $AP:PN$.

Решение:

Решение. а) Обозначим K точку пересечения отрезков AM и BN. Треугольник ABN равнобедренный, так как в нем AK является биссектрисой и высотой. Следовательно, AK является и медианой, то есть K — середина BN. Получаем, что $AN = AB = 6$, откуда $NC = AC - AN = 3$.



Рассмотрим треугольник ABC, биссектриса делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам: $BM : MC = AB : AC$, учитывая, что длина BC равна 5, получаем: $BM = 2$; $MC = 3$.

В треугольнике MNC стороны NC и MC равны, следовательно, треугольник MNC — равнобедренный, с основанием MN. Значит, биссектриса угла C также является медианой и высотой. Таким образом, получаем, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.

б) Рассмотрим треугольник PMN: отрезок PO перпендикулярен прямой MN и делит её пополам, следовательно, треугольник PMN — равнобедренный с основанием MN. Значит, $PM = PN$ и отношение $AP : PN = AP : PM$.

В треугольнике AMC отрезок CP — биссектриса, поэтому $AP : PM = AC : MC = 3:1$.

Ответ: 3:1.

Занятие 2. Четырёхугольники

Оплачко Галина Федоровна

Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

- Противоположные углы параллелограмма попарно равны.
- Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

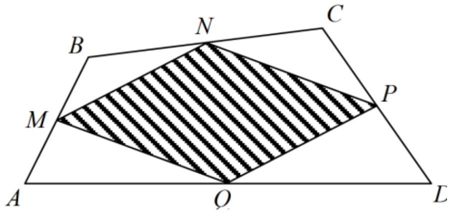
Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

- Диагонали прямоугольника равны.

Ромбом называется параллелограмм, все стороны которого равны.

- Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.
- Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Параллелограмм *Вариньона*. Середины сторон произвольного (в том числе невыпуклого или даже пространственного) четырехугольника являются вершинами параллелограмма - *параллелограмма Вариньона*.



- Стороны этого параллелограмма
- параллельны соответствующим диагоналям
- четырехугольника.
- Периметр параллелограмма Вариньона равен сумме длин диагоналей исходного четырехугольника, а площадь параллелограмма Вариньона равна половине площади исходного четырехугольника.
- Если исходный параллелограмм - прямоугольник, то параллелограмм Вариньона - ромб.
- Если исходный параллелограмм - ромб, то параллелограмм Вариньона - прямоугольник. Если исходный параллелограмм - квадрат, то параллелограмм Вариньона - квадрат.

Трапеция. *Трапецией* называется четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется *средней линией* трапеции. Трапеция обладает следующими свойствами.

- Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.
- Отрезок, соединяющие середины диагоналей трапеции, равен полуразности большего и меньшего оснований.
- У равнобедренной трапеции диагонали равны.
- У равнобедренной трапеции углы при основании равны.
- В равнобедренной трапеции расстояние от вершины одного основания до проекции противоположной вершины на прямую, содержащую это основание, равно средней линии.

<u>Проверяем себя:</u>

Т1. Заполните пропуски:

а) Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны ___________, а две другие ________________.
Ответ: параллельны, не параллельны
б) Параллелограмм, у которого все стороны равны называется ______.
Ответ: ромбом.
в) Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна _____________.
Ответ: 360^0

Т2. Укажите верные утверждения:

а) Существует квадрат, который не является прямоугольником;
б) Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны;
в) Диагональ параллелограмма делит его углы пополам.
Ответ: б)

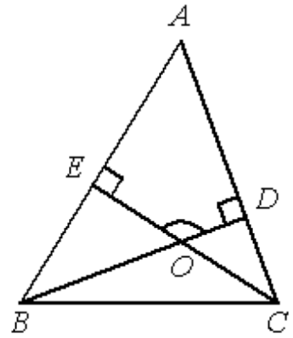
Т3. Укажите неверные утверждения:

а) Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 180°;
б) Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм - прямоугольник;
в) В любом прямоугольнике диагонали взаимно перпендикулярны.
Ответ: а), в)

<u>Решаем задачи:</u>

№1

а) В треугольнике ABC угол A равен 44°, углы B и C – острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O. Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах.



Ответ:136

б) В треугольнике ABC угол A равен 70°, углы B и C

– острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O.

Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах.

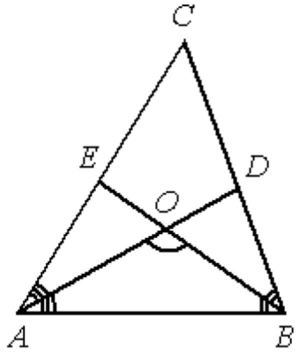
Ответ:110

в) В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 59°, BD и CE – высоты, пересекающиеся в точке O. Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах.

Ответ:121

№2

а) В треугольнике ABC угол C равен 58°, биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



Ответ:119

б) В треугольнике ABC угол C равен 66°, биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

Ответ:123

в) В треугольнике ABC угол C равен 74°, биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 127

№3

а) Один угол параллелограмма больше другого на 36°. Найдите меньший угол. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 72
б) Один угол параллелограмма больше другого на 28°. Найдите меньший угол. Ответ дайте в градусах.
Ответ:76
в) Один угол параллелограмма больше другого на 52°. Найдите больший угол. Ответ дайте в градусах.
Ответ:64

№4

а) Периметр параллелограмма равен 46. Одна сторона параллелограмма на 3 больше другой. Найдите меньшую сторону параллелограмма.

Ответ: 10

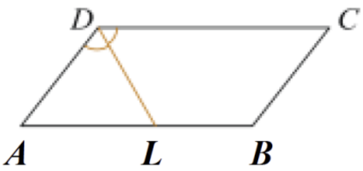
б) Периметр параллелограмма равен 94. Одна сторона параллелограмма на 41 больше другой. Найдите меньшую сторону параллелограмма.

Ответ: 3

в) Периметр параллелограмма равен 70. Меньшая сторона равна 16. Найдите большую сторону параллелограмма.
Ответ: 19

№5

а) Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 4 : 3, считая от вершины острого угла. Найдите



большую сторону параллелограмма, если его

периметр равен 88.

Ответ:28

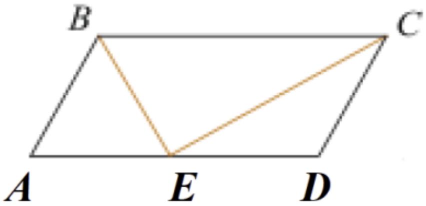
б) Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 2 : 7, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 33.

Ответ: 13,5

в) Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 3:4, считая от вершины острого угла. Найдите меньшую сторону параллелограмма, если его периметр равен 55.

Ответ: 8,25

№6



а) Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 5. Найдите его большую сторону.
Ответ: 10

б) Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 10. Найдите его большую сторону.
Ответ: 20

в) Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 9. Найдите его большую сторону.

Ответ: 18

№7

а) Найдите больший угол параллелограмма, если два его угла относятся как 3:7. Ответ дайте в градусах.

Ответ:126

б) Найдите больший угол параллелограмма, если два его угла относятся как 17:19. Ответ дайте в градусах.

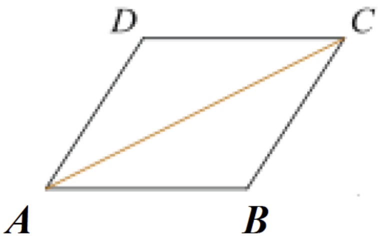
Ответ:95

в) Найдите больший угол параллелограмма, если два его угла относятся как 1 : 71. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 177,5

№8

а) Найдите большую диагональ ромба, сторона которого равна $\sqrt{3}$, а острый угол равен 60°.



Ответ: 3

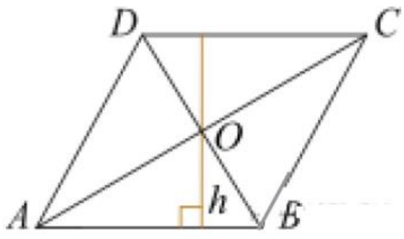
б) Найдите большую диагональ ромба, сторона которого равна $11\sqrt{3}$ а острый угол равен 60°.

Ответ: 33

в) Найдите большую диагональ ромба, сторона которого равна $2{,}5\sqrt{3}$, а острый угол равен 60°.

Ответ: 7,5

№9



а) Диагонали ромба относятся как 3:4.

Периметр ромба равен 200. Найдите

высоту ромба.

Ответ: 48

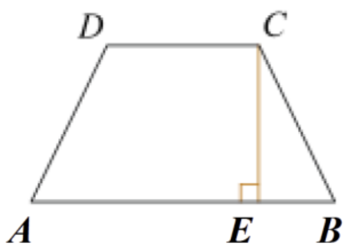
б) Диагонали ромба относятся как 1 : 9. Периметр ромба равен 164. Найдите высоту ромба.

Ответ:9

в) Диагонали ромба относятся как 4 : 7. Периметр ромба равен 65. Найдите высоту ромба.

Ответ:14

№10



а) Основания равнобедренной трапеции равны

51 и 65. Боковые стороны равны 25. Найдите

синус острого угла трапеции.

Ответ: 0,96

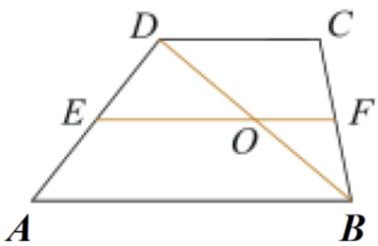
б) Основания равнобедренной трапеции равны 6 и 12. Боковые стороны равны 5. Найдите синус острого угла трапеции.

Ответ: 0,8

в) Основания равнобедренной трапеции равны 11 и 41. Боковые стороны равны 25. Найдите синус острого угла трапеции.

Ответ: 0,8

№11



а) Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее

диагоналей.

Ответ: 5

б) Основания трапеции равны 6 и 8. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.

Ответ: 4

в) Основания трапеции равны 5 и 9. Найдите меньший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.

Ответ: 2,5

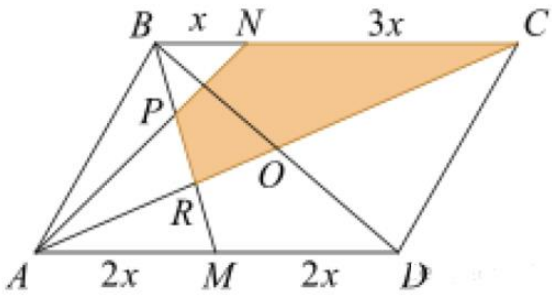
Задача с развёрнутым решением:

На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N, причём M — середина AD, а $BN : NC = 1 : 3$.

а) Докажите, что прямые AN и AC делят отрезок BM на три равные части.

б) Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого находятся в точках C, N и точках пересечения прямой BM с прямыми AN и AC, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 48.

Решение.



а) Обозначим точки пересечения прямой BM с прямыми AN и AC буквами P и R соответственно.

Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма. Тогда AO и BM — медианы треугольника ABD, значит, $MR = \frac{1}{3}BM$ Из подобия треугольников BPN и MPA находим, что

$\frac{BP}{PM} = \frac{BN}{AM} = \frac{1}{2}$. Значит, $BP = \frac{1}{3}BM$. Из доказанного следует, что $BP=PR=RM$.

б) Пусть площадь параллелограмма равна S. Из подобия треугольников MRA и BRC с коэффициентом $\frac{1}{2}$ следует, что высота треугольника BRC, проведённая к стороне BC, составляет $\frac{2}{3}$ высоты параллелограмма, проведённой к той же стороне. Следовательно, площадь треугольника BRC равна $S_{BRC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot S = \frac{S}{3}$.

Аналогично найдём площадь треугольника BNP. Его высота, проведённая к BN, составляет $\frac{1}{3}$ высоты параллелограмма, проведённой к стороне BC сама сторона BN в четыре раза меньше стороны параллелограмма BC. Поэтому $S_{BNP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} S = \frac{1}{24} S$. Следовательно, площадь четырёхугольника $PRCN$ равна $\frac{1}{3}S - \frac{1}{24}S = \frac{7}{24} \cdot 48$.

Ответ: 14.

Занятие 3. Площади многоугольников

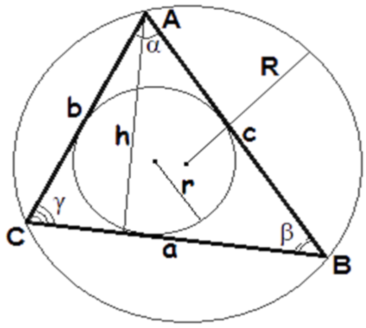
Тищенко Ольга Юрьевна

Площадь геометрической фигуры - численная характеристика геометрической фигуры, показывающая размер этой фигуры.

Площадь треугольника.

Введем следующие обозначения:

S – площадь треугольника,
a, b, c – длины сторон треугольника,
h – высота треугольника,
γ – угол между сторонами a и b,
r – радиус вписанной окружности,
R – радиус описанной окружности,

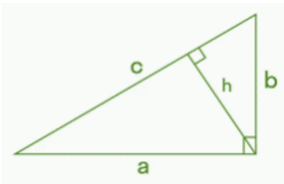


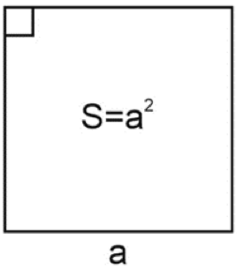
$p = \frac{a+b+c}{2}$ - полупериметр треугольника.

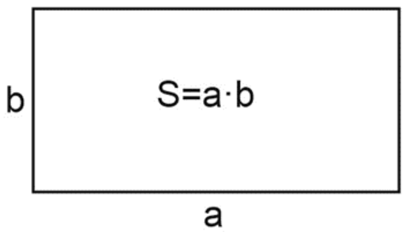
$s = \frac{1}{2} \cdot ah$ $\quad S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$ $\quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

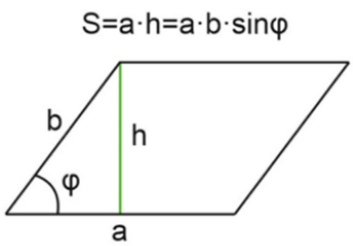
$s = \frac{abc}{4R}$ $\quad S = p \cdot r$

$S = \frac{1}{2} \cdot ab \quad S = \frac{1}{2} \cdot ch$



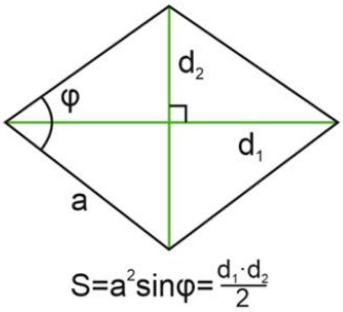


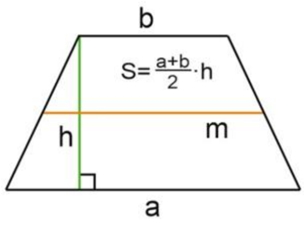


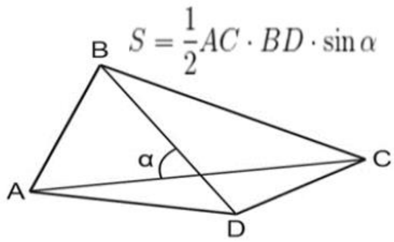


Проверяем себя:

Т1. Закончите предложение: Площадь треугольника равна…
1) произведению его сторон;
2) половине произведения его смежных сторон на синус угла между ними;
3) произведению его стороны и высоты.
Ответ: 2.







Т2. Выберите верные утверждения:

Площадь прямоугольного треугольника равна:
1) половине произведения его катетов;
2) произведению его высот;
3) половине произведения его гипотенузы на высоту, проведенную к ней.
Ответ: 1; 3.

Т3. Выберите неверное утверждение:

Площадь квадрата равна:
1) произведению его сторон;
2) квадрату его стороны;
3) произведению его сторон на высоту.
Ответ: 2.

Т4. Закончите предложение:

Площадь параллелограмма равна:
1) произведению его смежных сторон;
2) произведению его высоты на сторону;
3) произведению его основания на высоту, проведенную к данному основанию.
Ответ: 3.

Т5. Выберите верные утверждения:

По формуле $S= ab$ можно вычислить площадь:
1) прямоугольника;
2) треугольника;
3) параллелограмма.

Ответ: 1.

Т6. Закончите предложение:

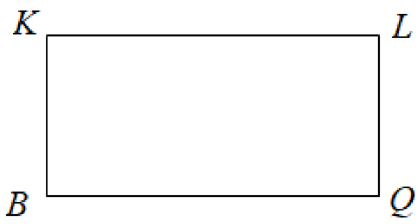
Площадь трапеции равна:

1) произведению ее смежных сторон;
2) произведению ее высоты на сумму оснований;
3) произведению полусуммы ее оснований на высоту.

Ответ: 3.

Решаем задачи:

№1



а) Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 44

и одна сторона на 2 больше другой.

Ответ: 120.

б) Найдите площадь прямоугольника, если его

периметр равен 60, а отношение соседних сторон

равно 4:11.

Ответ: 176.

в) Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 92, а отношение соседних сторон равно 3:20.

Ответ: 240.

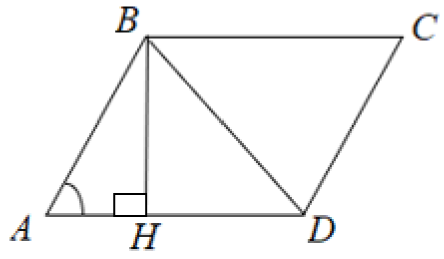
№2

а) Две стороны параллелограмма равны 10 и 12, а один из углов этого параллелограмма равен 30∘. Найдите площадь этого параллелограмма.

Ответ: 60.

б) Одна из сторон параллелограмма равна 12, другая равна 5, а тангенс одного из углов равен $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Найдите площадь параллелограмма.

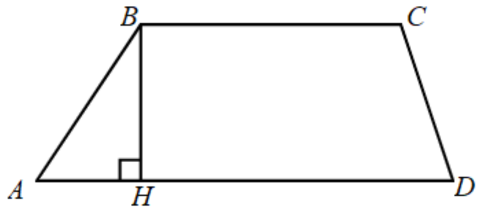
Ответ: 20.



в) Высота BH параллелограмма ABCD делит его сторону AD на отрезки AH = 1 и HD = 28. Диагональ параллелограмма BD равна 53. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ: 1305.

№3



а) Основания трапеции равны 18 и 12, одна из боковых сторон равна 6, а косинус угла между ней и одним из оснований равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 30.

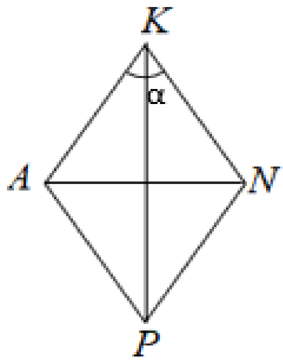
б) Основание трапеции равно 3, высота равна 13, а площадь равна 65. Найти второе основание трапеции. *Ответ: 7.*

в) Основания трапеции равны 7 и 49, одна из боковых сторон равна 18, а косинус угла между ней и одним из оснований равен $\frac{2\sqrt{10}}{7}$. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 216.

№4

а) Периметр ромба равен 56, а один из углов равен 30°. Найдите площадь ромба.



Ответ: 98.

б) Сторона ромба равна 5, а диагональ 6. Найдите площадь ромба.

Ответ: 24.

в) Найти диагонали ромба, если одна из них в 1,5 раза больше другой, а площадь ромба равна 27.

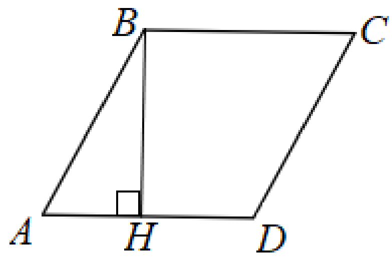
Ответ: 6; 9.

№5

а) Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 21 и 6.

Ответ: 63.

б) Высота BH ромба ABCD делит его сторону AD на отрезки AH = 12 и HD = 1. Найдите площадь ромба.



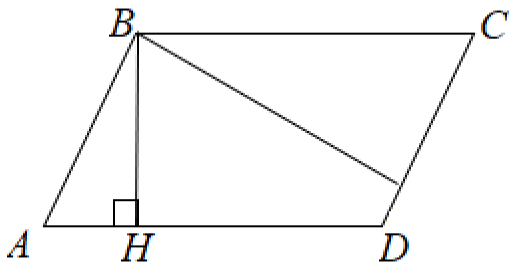
Ответ: 65.

№6

а) Площадь параллелограмма равна 54, а две его стороны равны 9 и 18. Найдите его меньшую высоту.

Ответ: 3.

б) Площадь параллелограмма равна 40, а две его стороны равны 5 и 10. Найдите большую высоту параллелограмма.



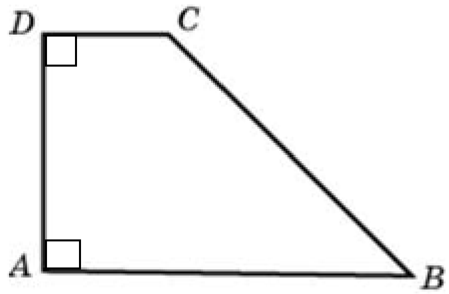
Ответ: 8.

в) Площадь параллелограмма равна 16, а две его стороны равны 4 и 8. Найдите большую высоту параллелограмма.

Ответ: 4.

№7

а) Найдите площадь прямоугольной трапеции, если основания равны 8 и 10, а боковая сторона, перпендикулярная



нижнему основанию, равна 5.

Ответ: 45.

б) Найдите площадь прямоугольной трапеции, если основания равны 2 и 14, а большая боковая сторона составляет с основанием угол, равный 45⁰.

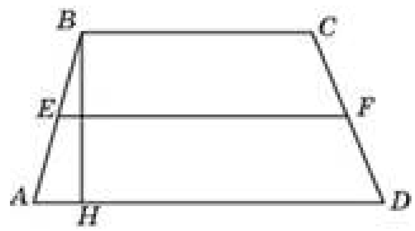
Ответ: 96.

в) В трапеции основания равны 6 см и 10 см, а высота равна полусумме длин оснований. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 64.

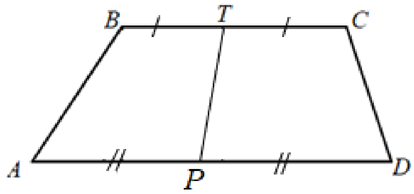
№8

а) Средняя линия и высота трапеции равны соответственно 15 и 2. Найдите площадь трапеции.



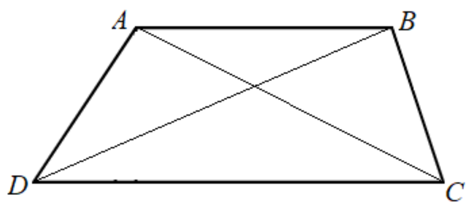
Ответ: 30.

б) В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.



Ответ: 6.

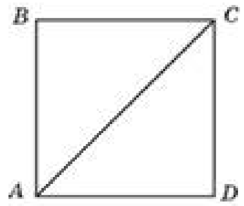
в) В трапеции ABCD с основаниями AB и CD известно, что AC = a, BD = $\frac{7a}{5}$, ∠CAB = 2∠DBA Найдите площадь трапеции.



Ответ: $\frac{42\sqrt{51}}{625}a^2$.

№9

а) Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 20.

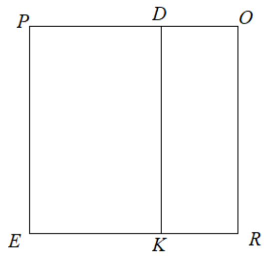


Ответ: 200.

б) Периметр квадрата равен 36. Найдите его площадь.

Ответ: 81.

в) В прямоугольнике одна сторона меньше другой в 3 раза, его площадь равна 48. Найдите площадь квадрата, построенного на большей стороне

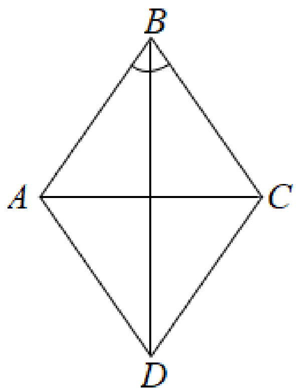


прямоугольника.

Ответ: 144.

№10

а) В ромбе сторона равна 10, одна из диагоналей - $5(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, а угол,



лежащий напротив этой диагонали, равен 30°.

Найдите площадь ромба.

Ответ: 50.

б) Периметр ромба равен 116, а один из углов

равен 30°. Найдите площадь ромба.

Ответ: 420,5.

в) Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 14 и 6.

Ответ: 42.

Задача с развёрнутым решением

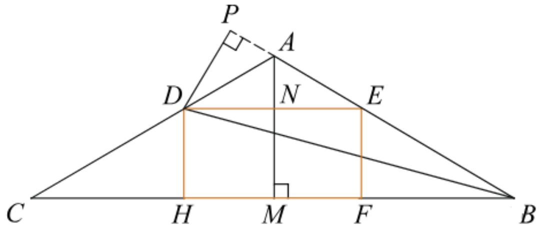
В равнобедренном треугольнике ABC с углом $120°$ при вершине A проведена биссектриса BD. В треугольник ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона FH лежит на отрезке BC, а вершина E - на отрезке AB.

а) Докажите, что $FH = 2DH$.

б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 4$.

Решение:

а) Пусть P – основание перпендикуляра, опущенного из точки D на прямую AB, тогда DH=DP.



В равнобедренном треугольнике EAD: $\angle AED = 30^{\circ}$.

В прямоугольном треугольника EDP: $DP = \frac{1}{2}DE$, откуда получаем, что $FH = 2DH$.

б) Пусть AM - высота треугольника ABC - пересекает ED в точке N. Тогда

$AM = AB \cdot \sin\angle ABC = 1$, $BC = 2AB \cdot \cos\angle ABC = 2\sqrt{3}$.

Пусть DH=EF=x, FD=ED=2x. Треугольники ABC и AED подобны, следовательно, $\frac{AN}{AM} = \frac{ED}{BC} \Leftrightarrow \frac{1-x}{1} = \frac{2x}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$.

Значит, площадь прямоугольника DEFH равна

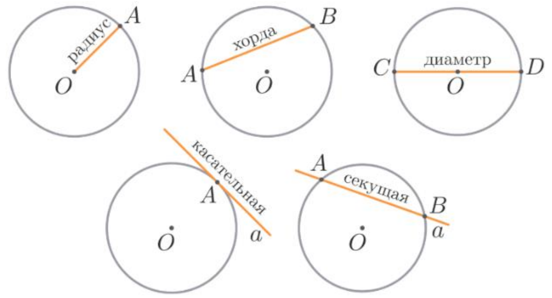
$$DE \cdot DH = 2x \cdot x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)^2 = 6 - 3\sqrt{3}$$

Ответ: $6 - 3\sqrt{3}$.

Занятие 4. Окружность

Тищенко Ольга Юрьевна

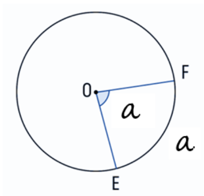
Окружность – это замкнутая кривая, все точки которой равноудалены от центра.



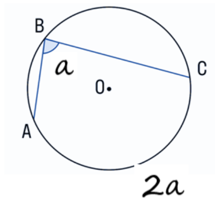
Длина окружности: $C = 2\pi R$.

Площадь круга: $S = \pi R^2$

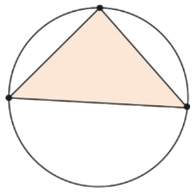
Центральный угол



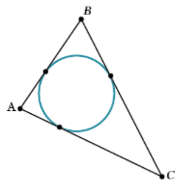
Вписанный угол



Вписанная и описанная окружности.

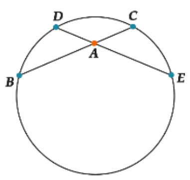


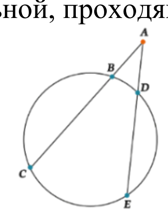
- Формула радиуса описанной окружности около правильного многоугольника: $R = \frac{a}{2sin\frac{\pi}{n}}$.
- Формула радиуса описанной окружности около треугольника по трём сторонам и углам между ними: $R = \frac{abc}{4S}$ или $2R = \frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$.
- Формула радиуса вписанной окружности в многоугольник по его площади $r = \frac{S}{p}$.
- Формула радиуса вписанной окружности в правильный многоугольник $r = \frac{a}{2tg\frac{\pi}{n}}$

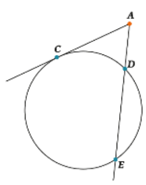


Различные свойства окружности и её составляющих:

- Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной.
- Угол между касательной и хордой равен половине градусной меры дуги, которая находится внутри угла.
- Отрезки касательных, проведённых из одной точки к одной окружности, равны.
- Прямая, которая касается двух окружностей, называется их общей касательной.
- Для любых двух хорд окружности, проходящих через некоторую точку A, выполняется: AB·AC=AD·AE
- Для любых двух секущих, проходящих через некоторую точку A, выполняется: AB·AC=AD·AE.
- Для любых секущей и касательной, проходящих через точку A, верно: $AC^2 = AD \cdot AE$.







<u>Проверяем себя:</u>

Т1. Заполните пропуски:

а) Из двух хорд больше та, которая ______ отдалена от центра.

Ответ: менее

б) Если основанием дуги является половина окружности или диаметр, то вписанный угол будет ______.

Ответ: прямой.

Т2. Укажите верные утверждения:

а) касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания;

б) угол, вписанный в окружность, равен соответствующему центральному углу, опирающемуся на ту же дугу;

в) расстояние от точки, лежащей на окружности, до центра окружности равно радиусу.

Ответ: а в

Т3. Укажите неверные утверждения:

а) через любую точку, лежащую вне окружности, можно провести 2 касательные к этой окружности;

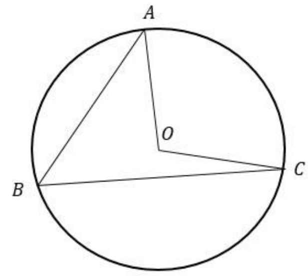
б) общая точка двух окружностей равноудалена от центров этих окружностей;

в) центр описанной около треугольника окружности всегда лежит внутри этого треугольника.

Ответ: б в

Решаем задачи

№1



а) Точка O – центр окружности, на которой лежат точки A, B и C. Известно, что ∠ABC = 54° и ∠OAB = 41°. Найдите угол BCO. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 13

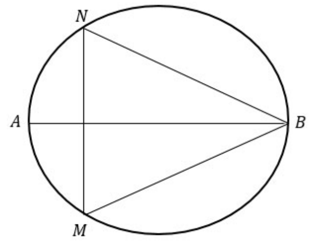
б) Точка O – центр окружности, на которой лежат точки A, B и C. Известно, что ∠ABC = 45° и ∠OAB = 36°. Найдите угол BCO. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 9

в) Точка O – центр окружности, на которой лежат точки A, B и C. Известно, что ∠ABC = 69° и ∠OAB = 24°. Найдите угол BCO. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 45

№2



а) На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N. Известно, что ∠NBA = 32°. Найдите угол NMB. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 58

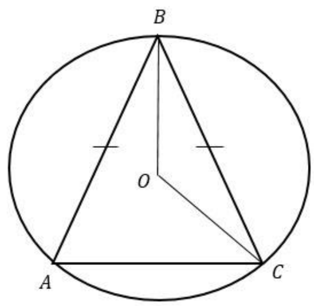
б) На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N. Известно, что ∠NBA = 45°. Найдите угол NMB. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 45

в) На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N. Известно, что ∠NBA = 27°. Найдите угол NMB. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 63

№3



а) Окружность с центром в точке O описана около Равнобедренного треугольника ABC, в котором AB=BC и ∠ABC = 25°. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 155

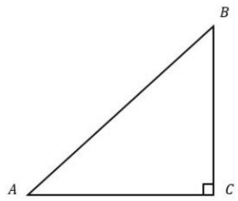
б) Окружность с центром в точке O описана около Равнобедренного треугольника ABC, в котором AB=BC и ∠ABC = 34°. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 146

в) Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC, в котором AB=BC и $\angle ABC = 48°$. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 132

№4

а) В треугольнике ABC известно, что AC=12, BC=5, угол C равен 90°. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.



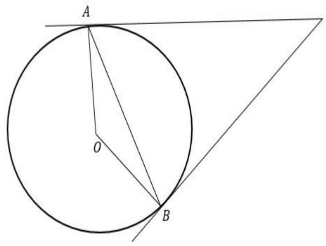
Ответ: 6,5

б) В треугольнике ABC известно, что AC=16, BC=12, угол C равен 90°. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.
Ответ: 10

в) В треугольнике ABC известно, что AC=24, BC=7, угол C равен 90°. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.
Ответ: 12,5

№5

а) Касательные в точках A и B к окружности с центром O пересекаются под углом 68°. Найдите угол ABO.



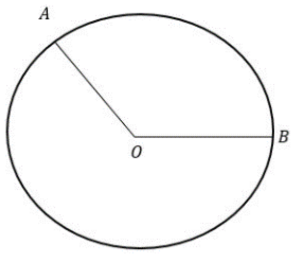
Ответ: 34

б) Касательные в точках A и B к окружности с центром O пересекаются под углом 52°. Найдите угол ABO.
Ответ: 26

в) Касательные в точках A и B к окружности с центром O пересекаются под углом 46°. Найдите угол ABO.
Ответ: 23

№6

а) На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 140°$. Длина меньшей дуги AB равна 98. Найдите длину большей дуги AB.

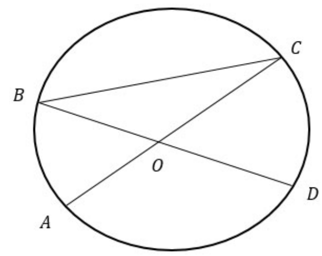


Ответ: 154

б) На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 110°$. Длина меньшей дуги AB равна 22. Найдите длину большей дуги AB.
Ответ: 50

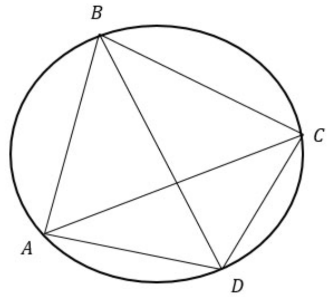
в) На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что ∠AOB = 136°. Длина меньшей дуги AB равна 17. Найдите длину большей дуги AB.
Ответ: 28

№7



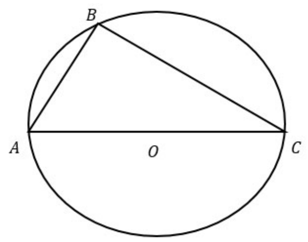
а) В окружности с центром O отрезки AC и BD - диаметры. Угол AOD равен 108°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 36
б) В окружности с центром O отрезки AC и BD - диаметры. Угол AOD равен 146°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 17
в) В окружности с центром O отрезки AC и BD - диаметры. Угол AOD равен 164°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 8

№8



а) Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABD равен 16°, угол CAD равен 32°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.
Ответ:48
б) Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABD равен 15°, угол CAD равен 25°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.
Ответ:40
в) Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABD равен 26°, угол CAD равен 47°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.
Ответ:73

№9

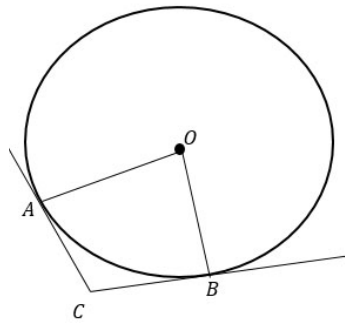


а) Сторона AC треугольника ABC проходит через центр описанной около него окружности. Найдите угол C, если ∠A = 74°. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 16
б) Сторона AC треугольника ABC проходит через центр описанной около него окружности. Найдите угол C, если ∠A = 67°. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 23

в) Сторона AC треугольника ABC проходит через центр описанной около него окружности. Найдите угол C, если $\angle A = 53°$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 37

№10



а) В угол C величиной 157° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках A и B, где O - центр окружности. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 23

б) В угол C величиной 168° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках A и B, где O - центр окружности. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 12

в) В угол C величиной 139° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках A и B, где O - центр окружности. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

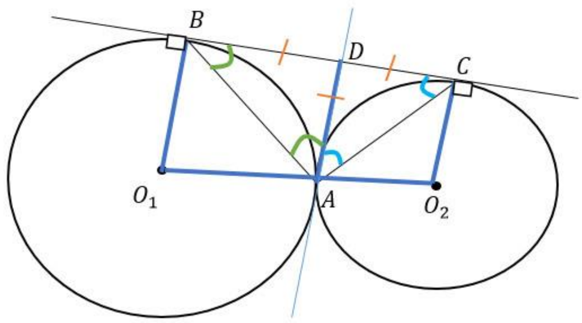
Ответ: 41

Задача с развёрнутым решением

К двум окружностям с центрами в точках O1, O2, касающимся внешним образом в точке A, проведена общая касательная BC (B и C - точки касания). Докажите, что угол BAC - прямой.

Решение:

Проведем O1 O2, радиусы O1B и O2C в точки касания B и C соответственно, общую касательную AD ⊥ O1O2, хорды AB и AC, образующие угол BAC.



Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны. Значит, BD = AD = CD, следовательно, ΔBDA и ΔCDA - равнобедренные и углы при основании у них равны, т.е.

∠ABD = ∠DAB и ∠DAC = ∠CAD.

Сумма углов в треугольнике равна 180°.

Из ΔBDA: ∠BDA = 180° - 2∠DAB.

Из ΔCDA: ∠CDA = 180° - 2∠DAC.

Сложим эти два равенства.

∠BDA + ∠CDA = 180° - 2∠DAB + 180° - 2∠DAC

∠BDA и ∠CDA - смежные, их сумма равна 180°. Упростим.

180° = 360° - 2(∠DAB + ∠DAC);

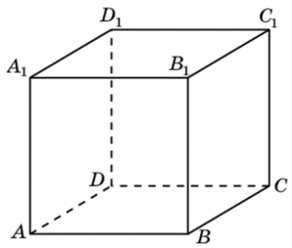
∠DAB + ∠DAC = 90º.

Т.к. ∠BAC = ∠DAB + ∠DAC, то ∠BAC = 90°.

Что и требовалось доказать.

Занятие 5. Куб

Боклаг Валентина Николаевна



Кубом называется многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов.

Формула диагонали куба AC_1: $d = a\sqrt{3}$

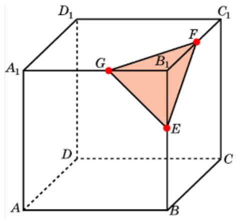
Формула диагонали грани куба: $AC = a\sqrt{2}$

Основные формулы:

$$S_{\text{основания}} = a^2 \qquad S_{\text{бок.поверхности}} = 4a^2 \qquad S_{\text{полной поверхности}} = 6a^2$$

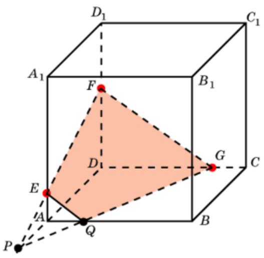
$$V_{\text{куба}} = a^3$$

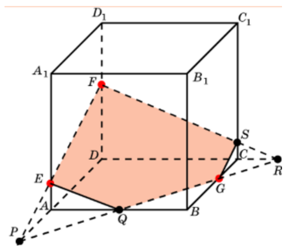
Виды сечений:

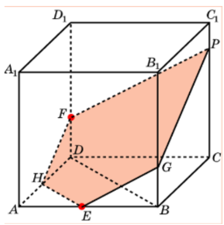


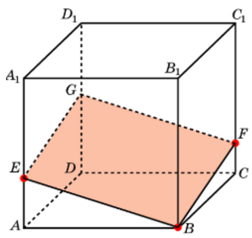
Сечение проходит через три точки куба, лежащих на ребрах куба, выходящих их одной вершины

Сечение проходит через три точки куба, лежащих на ребрах.

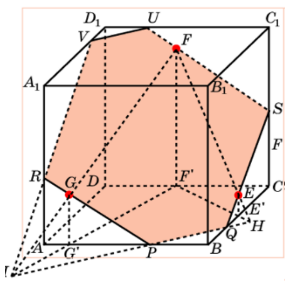








Сечение проходит через вершину и две точки, лежащие на ребрах куба.



Сечение проходит через точки E, F, G, принадлежащие граням BB_1C_1C, CC_1D_1D, AA_1B_1B

Проверяем себя

Т1. Заполните пропуски:

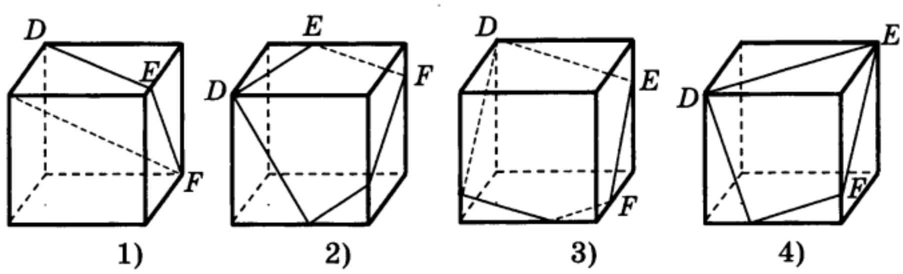
а) Куб — это______________, поверхность которого состоит из______квадратов.

Ответ: Куб — это многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов.

б) У куба _____ вершин, _________рёбер, _______ граней.

Ответ: У куба __8___ вершин, ___12___рёбер, ____6___ граней.

Т2. На каком рисунке изображено сечение куба плоскостью DEF.



Ответ:3

Т3. Вычислите:

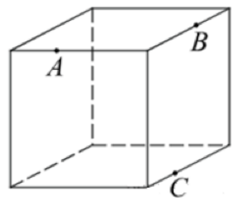
а) Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в три раза?

Ответ:27

б) Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если его ребро увеличить в три раза?

Ответ: 9

в) Плоскость, проходящая через три точки A, B и C, разбивает куб на два многогранника. Сколько граней у многогранника, у которого больше граней?



Ответ:7

Решаем задачи

№1

а) Диагональ куба равна $\sqrt{27}$. Найдите его объем.

Ответ:27

б) Диагональ куба равна $\sqrt{12}$. Найдите его объем.

Ответ:8

в) Диагональ куба равна $\sqrt{3}$. Найдите его объем.

Ответ:1

№2

а) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BC_1 и A_1B_1. Ответ дайте в градусах.

Ответ:90

б) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми CD_1 и AD. Ответ дайте в градусах.

Ответ:90

в) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AC и BB_1. Ответ дайте в градусах.

Ответ:90

№3

а) Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его площадь поверхности увеличится на 54. Найдите ребро куба.
Ответ: 4
б) Если каждое ребро куба увеличить на 5, то его площадь поверхности увеличится на 270. Найдите ребро куба.
Ответ: 2

в) Если каждое ребро куба увеличить на 3, то его площадь поверхности увеличится на 162. Найдите ребро куба.

Ответ: 3

№4

а) Объем первого куба в 8 раз больше объема второго куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?

Ответ: 4

б) Объем первого куба в 729 раз больше объема второго куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?

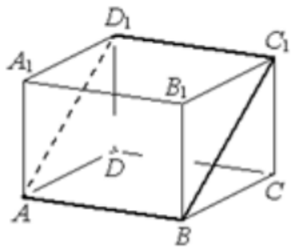
Ответ: 81

в) Объем первого куба в 1728 раз больше объема второго куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?

Ответ: 144

№5

а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$известны длины рёбер: $AB=7$, $AD=3$, $AA_1=4$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, B и C_1.



Ответ: 35

б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$известны длины рёбер: $AB=11$, $AD=6$, $AA_1=8$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, B и C_1.

Ответ: 110

в) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$известны длины рёбер: $AB=21$, $AD=20$, $AA_1=23$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, A_1 и C.

Ответ: 667

Задача с развернутым ответом

Точка E-середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что сечение куба плоскостью A_1BE — это равнобокая трапеция.

б) Найдите площадь этого сечения, если ребра куба равны 2

Решение.

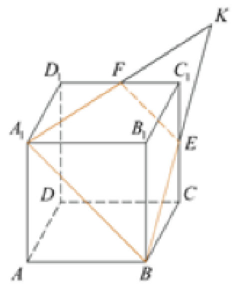
а) Прямая BE пересекает прямую B_1C_1 в точке K. Прямая A_1K пересекает ребро C_1D_1 в его середине-точке F. A_1BEF-сечение куба плоскостью A_1BE.

Равнобедренный треугольник A_1BK подобен треугольнику KFE, поэтому FE ∥ A_1B, то есть A_1BEF-равнобокая трапеция.

б) Вычислим стороны треугольника A_1BK: A_1K=BK=2BE=$2\sqrt{5}$,

A_1B=$\sqrt{2}\cdot$AB=$2\sqrt{2}$ и высота

$KH = \sqrt{BK^{2-\left(\frac{A_1B}{2}\right)^2}}$=$3\sqrt{2}$.



Поскольку EF-средняя линия треугольника A_1BK, получаем: $S_{KEF} = \frac{1}{4}S_{A_1BK}$,

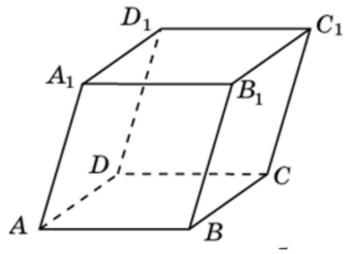
$S_{A_1BEF} = S_{A_1BK} - S_{KEF} = \frac{3}{4}S_{A^1BK} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}KH\cdot A_1B=4,5$

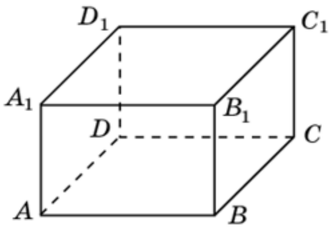
Ответ:4,5.

Занятие 6. Параллелепипед.

Боклаг Валентина Николаевна

Параллелепипедом называется многогранник, поверхность которого состоит из шести параллелограммов.





Прямоугольным параллелепипедом называется параллелепипед, грани которого – прямоугольники.

У параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны.

Все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке.

Диагональ параллелепипеда: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$a, b, c -$ измерения параллелепипеда

Диагональ параллелепипеда – отрезок соединяющий, не принадлежащие одной грани две вершины.

Объём параллелепипеда: $V = a \cdot b \cdot c$ или $V = S_{\text{основания}} \cdot h$, где

$h -$ высота.

Проверяем себя

Т1. Заполните пропуски и допишите утверждения.

а) Параллелепипед называется прямоугольным, если его боковые ребра ______________ основанию, а основания представляют собой____________.
б) В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней - ___________________.
в) Полуплоскости в которых расположены смежные грани параллелепипеда , образуют двугранные углы, которые называются ____________________.
г) Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда-________________.

Ответы:
а) Параллелепипед называется прямоугольным, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию, а основания представляют собой прямоугольники.
б) В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней - ______прямоугольники_____.
в) Полуплоскости в которых расположены смежные грани параллелепипеда, образуют двугранные углы, которые называются __двугранными углами параллелепипеда __.
г) Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда-__прямые_____.

Т2. а) Сколько вершин, граней и ребер имеет параллелепипед?

Ответ:8 вершин, 6 граней, 12 ребер.

б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что

$DD_1=2$, $C_1D_1=6$, $B_1C_1=3$. Найдите длину диагонали AC_1.

Ответ:7

Т3. Вычислите:

а) Ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2, 3. Найдите его площадь поверхности.
Ответ:22
б) Найдите расстояние между вершинами A и D_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB=5$, $AD=4$, $AA_1=3$.
Ответ: 5
в) Найдите квадрат расстояния между вершинами C и A_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB=5$, $AD=4$, $AA_1=3$.
Ответ: 50

Решаем задачи

№1

а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: AB=6, AD=8, AA_1=21. Найдите синус угла между прямыми A_1D_1 и AC.

Ответ:0,6

б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: AB=6, AD=8, AA_1=9. Найдите синус угла между прямыми A_1C_1 и CD.

Ответ:0,8

в) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: AB=28, AD=16, AA_1=12. Найдите синус угла между прямыми DD_1 и B_1C.

Ответ:0,8

№2

а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: AB=21, AD=20, AA_1=23. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины A, A_1 и C.

Ответ:667

б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: AB=3, AD=4, AA_1=32. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины C, C_1 и A

Ответ:160

в) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: AB=27, AD=36, AA_1=10. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины D, D_1 и B.

Ответ:450

№ 3

а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что AB=8, BC=5, AA_1=4. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, B_1, C_1.

Ответ:80

б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB=7$, $BC=6$, $AA_1=5$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, B_1, C_1.
Ответ:105

в) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB=6$, $BC=5$, $AA_1=4$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, A_1, B_1.
Ответ:60

№ 4

а) Одна из граней прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{8}$ и образует с плоскостью этой грани угол 45°. Найдите объем параллелепипеда.
Ответ:4

б) Одна из граней прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Диагональ параллелепипеда равна 2 и образует с плоскостью этой грани угол 30°. Найдите объем параллелепипеда.
Ответ:1,5

в) Одна из граней прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Диагональ параллелепипеда $\sqrt{12}$ и образует с плоскостью этой грани угол 60°. Найдите объем параллелепипеда.
Ответ:4,5

№5

а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AB=2$, $AD = \sqrt{5}$, ребро $AA_1=2$. Точка К- середина ребра BB_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки A_1, D_1 и К.
Ответ: 5

б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $BC=4$, ребро $AB = 2\sqrt{5}$, ребро $BB_1=4$. Точка К- середина ребра CC_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки A_1, B_1 и К.
Ответ: 20

в) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AB=2$, $AD = 2\sqrt{2}$, ребро $AA_1=4$. Точка К- середина ребра BB_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки A_1, D_1 и К.
Ответ: 8

Задача с развернутым ответом

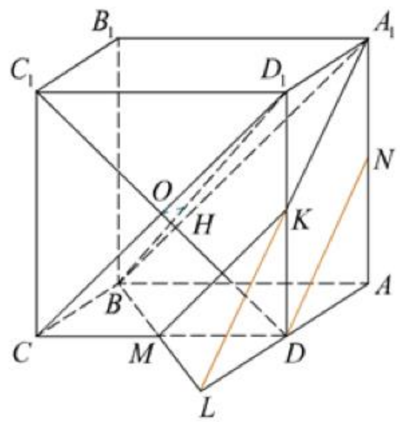
В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB=AA_1=8$ и $BC=5$, M и N – середины ребер CD и AA_1 соответственно. Плоскость α проходит через точки M и B и параллельна прямой CD_1.

Докажите, что прямая DN параллельна плоскости α.

б) Найдите расстояние между прямыми C_1D и BD_1.

Решение:

а) Пусть L — точка пересечения прямых BM и AD, K — точка пересечения плоскости α с ребром DD_1. Заметим, что треугольники BCM и LDM равны, следовательно, $LD = BC = AD = 5$. Так как прямая CD_1 параллельна плоскости α и прямой MK, прямая MK — средняя линия треугольника CDD_1, а K — середина DD_1. Таким образом, $DK = AN$, а треугольники LKD и DAN — равны, и углы KLD и NDK равны, следовательно, прямые LK и DN параллельны, и плоскость α параллельна прямой DN.



б) Заметим, что прямые CD_1 и C_1D взаимно перпендикулярны, прямые A_1D_1 и C_1D также взаимно перпендикулярны, следовательно, прямая C_1D перпендикулярна плоскости BCD_1A_1. Пусть O — точка пересечения CD_1 и C_1D, в плоскости BCD_1A_1 на прямую BD_1 опустим перпендикуляр OH, его длина и есть искомое расстояние. Имеем:

$$CD_1 = \sqrt{2}CD = 8\sqrt{2}$$

$$OD_1 = \frac{1}{2}CD_1 = 4\sqrt{2}$$

$$BD_1 = \sqrt{BC^2 + CD_1^2} = 3\sqrt{17}.$$

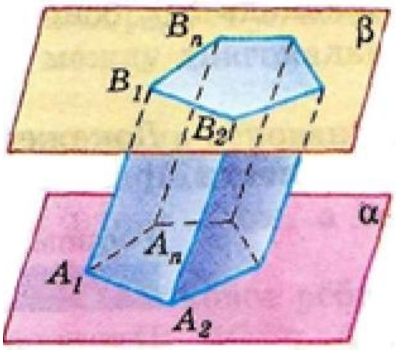
Треугольники CBD_1 и HOD_1 подобны, следовательно,

$$\frac{OH}{BC} = \frac{OD_1}{BD_1} \qquad OH = \frac{OD_1 \cdot BC}{BD_1} = \frac{20\sqrt{34}}{51}$$

Ответ: б) $\frac{20\sqrt{34}}{51}$

Занятие 7. Призма

Халанджян Алла Андрониковна



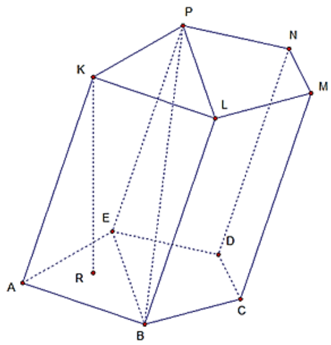
Призма — это многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, находящимися в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами.

$A_1A_2…A_nB_1B_2B_n$ – _призма_

Многоугольники $A_1A_2…A_n$ и $B_1B_2…B_n$ – _основания призмы

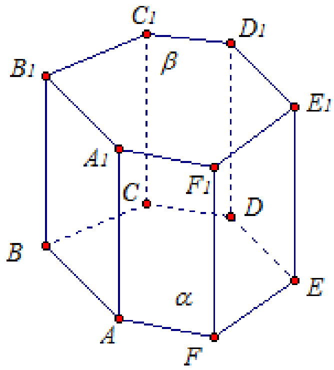
Параллелограммы $A_1A_2B_2B_1$, $A_1A_2B_2B_1$,…$A_nA_1B_1B_n$ – боковые грани

Отрезки A_1B_1, $A_2B_2…A_nB_n$ – _боковые ребра призмы



Диагональ призмы(PB) — это отрезок, который соединяет две вершины, не принадлежащие одной грани.

Высота призмы (KR)- перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания.



Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется прямой, в противном случае – наклонной. Высота прямой призмы равна ее боковому ребру

Прямая призма называется правильной, если ее основания – правильные многоугольники.

$S_{бок} = P_{осн} \cdot h$

$S_{полн}= S_{бок}+2S_{осн}$

$$\mathbf{V = S_{осн} \cdot h}$$

Проверяем себя

Т1. Заполните пропуски:

а) Призма — это ___________________, две грани которого являются равными ____________________, находящимися в ____________________ плоскостях, а остальные грани — _______________________.

Ответ: Призма — это многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, находящимися в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами.

б) Диагональ призмы -это _________, который соединяет ___________________, не принадлежащие одной грани.

Ответ: Диагональ призмы - это отрезок, который соединяет две вершины, не принадлежащие одной грани.

в) Если боковые ребра призмы ______________________ к основаниям, то призма называется прямой

Ответ. Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется прямой.

Т2. Укажите верное утверждение:

Прямая призма называется правильной, если ее основания – …..
а) прямоугольные треугольники;
б) равнобедренные треугольники;
в) правильные многоугольники;
г) параллелограммы.
Ответ: в).

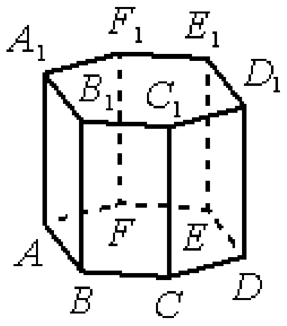
Т3. Вычислить:
В правильной треугольной призме сторона основания равна 6 см, боковое ребро 5 см.
а) Высота равна ____ см.
б) Площадь боковой грани равна ____ см.
в) Площадь боковой поверхности равна _____ см.
Ответ: а)5 см; б)30 см^2; в)90 см^2

Решаем задачи

№1

а) В правильной шестиугольной призме ABCDEFA1B1C1D1E1F1 все ребра равны 1. Найдите угол DAB. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 60



б) В правильной шестиугольной призме ABCDEFA1B1C1D1E1F1 все ребра равны 6. Найдите угол D1C1F1.Ответ дайте в градусах.

Ответ: 60

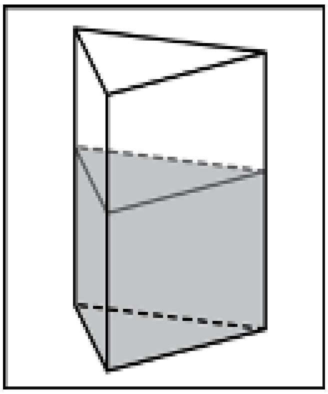
в) В правильной шестиугольной призме ABCDEFA1B1C1D1E1F1 все ребра равны 1. Найдите угол AC1C. Ответ дайте в градусах

Ответ: 60

№2

а) В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 2300 см^3 воды и полностью в нее погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 25 см до отметки 27 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см3.

Ответ: 184



б) В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1500 см^3 воды и полностью в нее погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 25 см до отметки 28 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см^3.

Ответ: 180

в) В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1200 см^3 воды и полностью в нее погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 24 см до отметки 26 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см^3.

Ответ: 100

№3

а) Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Площадь ее поверхности равна 132. Найдите высоту призмы.
Ответ: 10

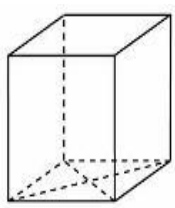
б) Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Площадь ее поверхности равна 288. Найдите высоту призмы.
Ответ: 10

в) Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 9 и 12. Площадь ее поверхности равна 504. Найдите высоту призмы.
Ответ: 11

№4

а) Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8, и боковым ребром, равным 10.

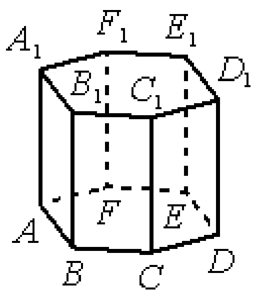
Ответ: 248



б) Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 3 и 4, и боковым ребром, равным 5.
Ответ: 62

в) Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 9 и 40, и боковым ребром, равным 55.
Ответ: 4870

№5



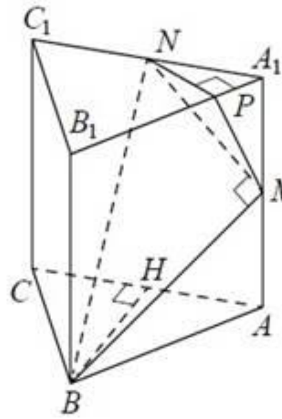
а) Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны $\sqrt{3}$.
Ответ: 4,5
б) Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 9, а боковые ребра равны $\sqrt{27}$
Ответ: 1093,5

в) Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 6, а боковые ребра равны $\sqrt{0,75}$.

Ответ: 81

Задача с развернутым ответом

Все рёбра правильной треугольной призмы ABCA1B1C1 имеют длину 6. Точки M и N—середины рёбер AA1 и A1C1 соответственно.
а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB1
Решение:



а) В основании правильной треугольной призмы лежит равносторонний треугольник. Проведем в основании призмы высоту BH, причем точка H будет делить сторону AC пополам (так как высота в равностороннем треугольнике совпадает с медианой). Тогда высоту BH можно вычислить по теореме Пифагора следующим образом: $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{27}$

Вычислим длину отрезка BN из прямоугольного треугольника BNH также по теореме Пифагора: $BN^2 = BH^2 + HN^2 = 63$. Чтобы доказать перпендикулярность отрезков BM и MN нужно показать, что их сумма квадратов будет равна 63: $BM^2 + MN^2 = \left(AB^2 + AM^2\right) + \left(A_1M^2 + A_1N^2\right) = 63$ следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник BMN является прямоугольным с прямым углом M.

б
)
Сначала проведем перпендикуляр NP к прямой A1B1. Тогда получим, что, $NP \perp A_1B_1$, $NP \perp A_1A$и, следовательно, $NP \perp \left(ABB_1\right)$. Отсюда следует, что прямая NP – это проекция MN на плоскость ABB_1. В предыдущем пункте было показано, $BM \perp MN$ что и по теореме о трех перпендикулярах $BM \perp MP$ имеем. Следовательно, угол NMP – линейный угол искомого угла между плоскостями BMN и ABB_1. Вычислим этот угол. Найдем длину отрезка NP. Так как точка N – середина отрезка A_1C_1, то длина NP будет в два раза меньше высоты треугольника $A_1B_1C_1$. Так как этот треугольник равносторонний, то его исходная высота (по теореме Пифагора) равна, $\sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27}$ следовательно, $NP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Тогда синус угла NMP можно выразить как $\sin\angle MNP = \frac{NP}{MN} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$ и

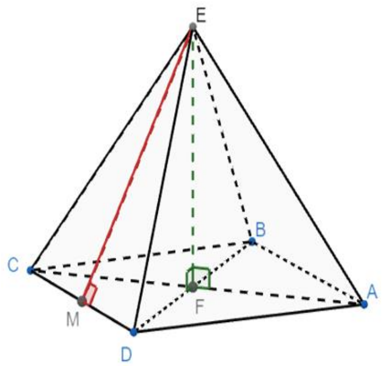
$\angle MNP = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$

Ответ: б) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$

Занятие 8. Пирамида

Халанджян Алла Андрониковна

Пирамида – многогранник, который состоит из плоского многоугольника-основания пирамиды, точки, не лежащей в плоскости основания-вершины пирамиды, и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.



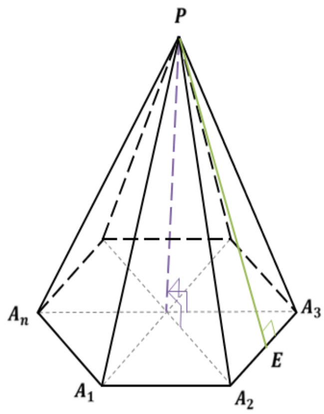
E - вершина

ABCD – основание

Δ AEB, Δ BEC, Δ CED, Δ DEA – боковые грани

Высота (EF) - перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

Боковые ребра (EA, EB, EC, ED) - отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания.



Пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой.

Все боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

Апофема(PE) – высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему:

$$\boldsymbol{S}_{\text{бок}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \mathrm{P}_{\text{осн}} \cdot \boldsymbol{PE}$$

$$\boldsymbol{S}_{\text{полн}} = \boldsymbol{S}_{\text{бок}} + \boldsymbol{S}_{\text{осн}}$$

$$\boldsymbol{V} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \boldsymbol{S}_{\text{осн}} \cdot \boldsymbol{h}$$

Проверяем себя

Т1. Заполните пропуски:

а) Пирамида – это ______________, который состоит из ____________ ________________ – основания пирамиды, ___________________ – вершины __________, ____с точками основания.

Ответ: Пирамида – многогранник, который состоит из плоского многоугольника-основания пирамиды, точки, не лежащей в плоскости основания-вершины пирамиды, и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания

б) Пирамида называется правильной, если ее ____________ – правильный ______________, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее _____________.

Ответ: Пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой.

в) Апофема – ________________________ правильной пирамиды, проведенная из ее вершины.

Ответ: Апофема – высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины.

Т2. Укажите верное утверждение:

Какая фигура является основанием правильной пирамиды?

а) прямоугольный треугольник;

б) равнобедренный треугольник;

в) правильный многоугольник;

г) прямоугольник.

Ответ: в).

Т3. Вычислить:

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, боковое ребро 5 см.

а) Апофема равна ____ см.

б) Площадь боковой грани равна ____ см.

в) Площадь боковой поверхности равна _____ см.

Ответ: а)4 см; б)12 см^2; в)36 см^2

Решаем задачи

№1

а) В правильной четырехугольной пирамиде SABCD точка O - центр основания, S -вершина, SO = 4, SC = 5. Найдите длину отрезка AC.

Ответ:6

б) В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD с вершиной S точка O - центр основания, SO = 48, SC = 73. Найдите длину отрезка AC.

Ответ:110

в) В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* точка *O* — центр основания, *S* вершина, SO = 96, SC = 100. Найдите длину отрезка BD.
Ответ:56

№2

а) В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* точка *O* − центр основания, *S* − вершина, *SO*=8, *BD*=30. Найдите боковое ребро SC.

Ответ: 17

б) В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* точка *O* − центр основания,

S − вершина, *SO*=12, *BD*=18. Найдите боковое ребро SA.

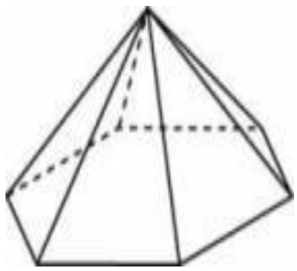
Ответ: 15

в) В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* точка *O* − центр основания,

S − вершина, *SO*=15, *BD*=16. Найдите боковое ребро SA.

Ответ: 17

№3



а) Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 72, боковые рёбра равны 85. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

Ответ: 16632

б) Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 22, боковые рёбра равны 61. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

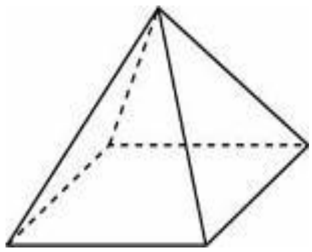
Ответ: 3960

в) Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 56, боковые рёбра равны 100. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

Ответ: 16128

№4

а) Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 42, боковые рёбра равны 75. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



Ответ: 7812

б) Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 60, боковые рёбра равны 78. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

Ответ: 12240

в) Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 64, боковые рёбра равны 130. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

Ответ: 20224

№5

5а) Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2, а высота равна $4\sqrt{3}$.

Ответ: 4

б) Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 11, а высота равна $2\sqrt{3}$.

Ответ: 60,5

в) Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 9, а высота равна $6\sqrt{3}$.

Ответ: 121,5

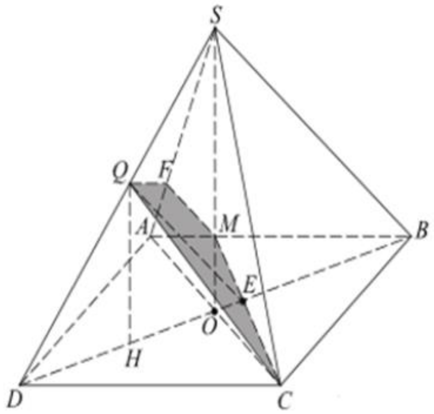
Задача с развернутым ответом

В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 4$ и диагональю $BD = 7$. Все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 3$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB .

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.

Решение:



а) Имеем DE=DB-BE=7-3=4.

Пусть прямая CE пересекает ребро AB в точке M. Треугольники BME и DCE подобны, поэтому $\frac{BM}{DC} = \frac{BE}{DE}$.Откуда BM= 3.

Тогда AM=AB-MB=1

Треугольники ABS и AMF подобны, значит

Поэтому FM||SB прямая SB параллельна плоскости CEF.

б

)

Из доказанного в предыдущем пункте следует, что QE||SB

Тогда $\frac{DQ}{QS} = \frac{DE}{EB} = \frac{4}{3}$.

Пусть O — центр основания ABCD. Так как все боковые ребра пирамиды равны, SO — высота пирамиды. $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

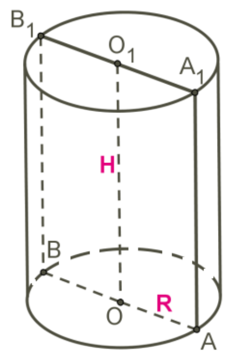
Плоскость SDB перпендикулярна плоскости основания, и проекция H точки Q на плоскость основания лежит на отрезке DO. Из подобия треугольников DQH и DSO находим $QH = \frac{4}{7} \cdot SO\sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{2\sqrt{15}}{7}$

Ответ: б) $\frac{2\sqrt{15}}{7}$

Занятие 9. Цилиндр. Виды сечений

Самедова Инна Сабировна

Цилиндр – это тело вращения, которое получается при вращении прямоугольника вокруг его стороны.



Прямоугольник AOO_1A_1 вращается вокруг стороны OO_1. OO_1 — ось симметрии цилиндра и высота цилиндра. AA_1 — образующая цилиндра, длина которой равна длине высоты цилиндра.

AO — радиус цилиндра.

Полученная цилиндрическая поверхность называется боковой поверхностью цилиндра, а круги — основаниями цилиндра.

Осевое сечение цилиндра — это сечение цилиндра плоскостью, которая проходит через ось цилиндра. Это сечение является прямоугольником.

При сечении цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра (т. е. перпендикулярной основанию), также получается прямоугольник.

На рисунке изображён цилиндр, пересечённый плоскостью, которая параллельна оси цилиндра OO_1.

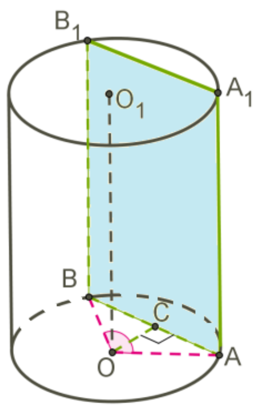


ABB_1A_1 — прямоугольник.

OA=OB=R — радиусы.

OC — расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения. Дуга AB равна центральному углу AOB.

При сечении цилиндра плоскостью, параллельной основанию, в сечении получаем круг, равный основаниям цилиндра.

Проверяем себя

Т1. Заполните пропуски:

а) Цилиндр – это ______________, которое получается при вращении _______________ вокруг его стороны.

Ответ: Цилиндр – это тело вращения, которое получается при вращении прямоугольника вокруг его стороны.

б) Ось симметрии цилиндра, образующая цилиндра равны__________ цилиндра.

Ответ: высоте.

Т2. Укажите верное утверждение:

Какая фигура образуется в сечении, если цилиндр пересечь плоскостью, которая перпендикулярна основанию?

а) трапеция;

б) равносторонний треугольник;

в) прямоугольник;

г) отрезок.

Ответ: в).

Т3. Вычислить:

Прямоугольник, соседние стороны которого равны 6 см и 8 см, вращается вокруг меньшей стороны.

а) Высота полученного тела вращения равна ____ см.

б) Образующая полученного тела равна ____ см.

в) Радиус полученного тела вращения равен _____ см.

Ответ: а)6см; б) 6см; в) 8см

Решаем задачи.

№1

а) Диагональ осевого сечения цилиндра равна 26 , с основанием цилиндра она образует угол в 30°. Определи высоту H этого цилиндра.

Ответ:13

б) Диагональ осевого сечения цилиндра равна 24 , с основанием цилиндра она образует угол в 30°.Определи высоту H этого цилиндра.

Ответ:12

в) Диагональ осевого сечения цилиндра равна 28 , с основанием цилиндра она образует угол в 30°. Определи высоту H этого цилиндра.

Ответ:14

№2

а) Диагональ осевого сечения цилиндра равна 16 , с основанием цилиндра она образует угол в 60°. Определи диаметр основания D этого цилиндра.

Ответ:8

б) Диагональ осевого сечения цилиндра равна 8 , с основанием цилиндра она образует угол в 60°. Определи диаметр основания D этого цилиндра.

Ответ:4

в) Диагональ осевого сечения цилиндра равна 20 , с основанием цилиндра она образует угол в 60°.Определи диаметр основания D этого цилиндра. *Ответ:10*

№3

а) Дано, что площадь осевого сечения цилиндра равна 98 , площадь основания цилиндра равна 49 . Определи высоту H этого цилиндра, деленную на $\sqrt{\pi}$

Ответ: 7

б) Дано, что площадь осевого сечения цилиндра равна 50 , площадь основания цилиндра равна 25 . Определи высоту H этого цилиндра, деленную на $\sqrt{\pi}$

Ответ: 5

в) Дано, что площадь осевого сечения цилиндра равна 8 , площадь основания цилиндра равна 4 . Определи высоту H этого цилиндра, деленную на $\sqrt{\pi}$

Ответ: 2

№4

а) Определи площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра, находящейся на расстоянии 24 от оси, если высота цилиндра равна 27 , а радиус цилиндра равен 40 .

Ответ: 1728

б) Определи площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра, находящейся на расстоянии 10 от оси, если высота цилиндра равна 24 , а радиус цилиндра равен 26 .

Ответ: 1152

в) Определи площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра, находящейся на расстоянии 12 от оси, если высота цилиндра равна 25 , а радиус цилиндра равен 37 .

Ответ: 1750

№5

а) Параллельная оси цилиндра плоскость отсекает от окружности основания дугу в 90°. Площадь сечения цилиндра этой плоскостью равна 120 . Определи расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения, если высота цилиндра равна 20 .

Ответ:3

б) Параллельная оси цилиндра плоскость отсекает от окружности основания дугу в 90°.Площадь сечения цилиндра этой плоскостью равна 240 . Определи расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения, если высота цилиндра равна 20 .

Ответ:6

в) Параллельная оси цилиндра плоскость отсекает от окружности основания дугу в 90°.Площадь сечения цилиндра этой плоскостью равна 360 .

Определи расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения, если высота цилиндра равна 20 .

Ответ:9

№6

а) Параллельная оси цилиндра плоскость отсекает от окружности основания дугу в 60°.Площадь сечения цилиндра этой плоскостью равна 720 . Определи расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения, если высота цилиндра равна 20. В ответ запишите расстояние, деленное на $\sqrt{3}$.

Ответ:18

б) Параллельная оси цилиндра плоскость отсекает от окружности основания дугу в $60°$.Площадь сечения цилиндра этой плоскостью равна 240 . Определи расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения, если высота цилиндра равна 20. В ответ запишите расстояние, деленное на $\sqrt{3}$

Ответ:6

в) Параллельная оси цилиндра плоскость отсекает от окружности основания дугу в $120°$.Площадь сечения цилиндра этой плоскостью равна 960 . Определи расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения, если высота цилиндра равна 20 . В ответ запишите расстояние, деленное на $\sqrt{3}$

Ответ:8

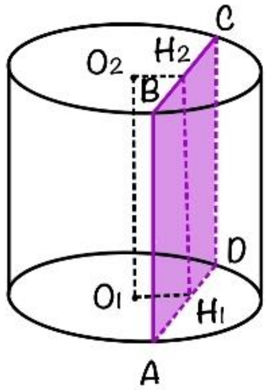
Задача с развернутым ответом

Высота цилиндра равна 3, а радиус основания равен 13.

а) Постройте сечение цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра, так, чтобы площадь этого сечения равнялась 72.

б) Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания цилиндра.

Решение. а) Пусть $O_1 O_2$ — ось цилиндра. Проведем AB и CD параллельно оси цилиндра. Проведем BC и AD. Так как через две параллельные прямые проходит единственная плоскость, то прямоугольник $ABCD$ — искомое сечение (см. рис.). Расстояние от плоскости сечения до центра основания цилиндра, при котором площадь сечения равна 72, найдено в пункте б).



б) В этом прямоугольнике одна сторона будет равняться высоте цилиндра, а вторая — хорде окружности, лежащей в основании. $S = AD \cdot AB = 72,$

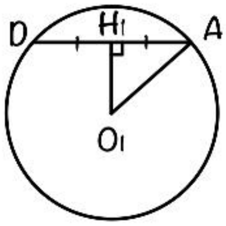
$$S = 3 \cdot AD$$

$$AD = 24.$$

Проведем $O_1 H_1$ перпендикулярно AD.

ΔAH_1O_1 прямоугольный, точка H_1 является серединой AD, AO_1 радиус окружности, равный 13. По теореме Пифагора:

$AO_1^2 = O_1H_1^2 + AH_1^2$



$O_1H_1 = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5.$

Ответ: б) 5.

Занятие 10. Площадь поверхности цилиндра

Самедова Инна Сабировна

Если представить, что боковая цилиндрическая поверхность разрезана по образующей AA_1 и развёрнута, получаем прямоугольник.

Сторона AA_1 равна высоте H, а другую сторону образует развёрнутая окружность основания длиной $2\pi R$.

Так как развёртка – прямоугольник, то боковая поверхность определяется по формуле: $S_{бок.}=2\pi R\cdot H$.

Основания цилиндра – два круга с общей площадью $2\cdot\pi R^2$.

Полная поверхность цилиндра определяется по формуле:

$S_{полн.}=2\pi RH+2\pi R^2=2\pi R\cdot(H+R)$.

Проверяем себя

Т1. Укажите верную формулу:

Площадь полной поверхности цилиндра вычисляется по формуле:

а) S=$2\pi R(R + \text{Н})$;

б) S=$2\pi(\text{Н} + l)$;

в) S=$\pi R(R + l)$;

Ответ: а)

Т2. Заполните пропуски:

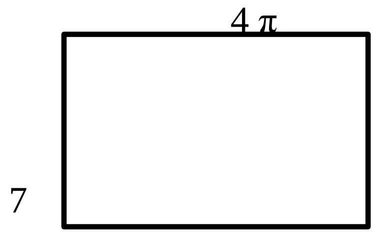
Разверткой боковой поверхности цилиндра является ____________, одна сторона которого равна ___________ цилиндра, а другая - длине ___________ цилиндра.

Ответ: прямоугольник; высоте; окружности основания.

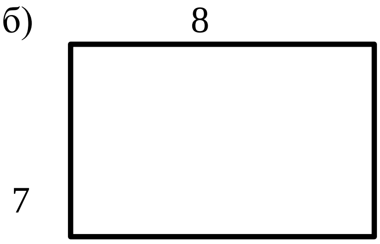
Т3.

Радиус основания цилиндра равен 4, а образующая цилиндра равна 7. Укажите, какой из прямоугольников является разверткой его боковой поверхности?

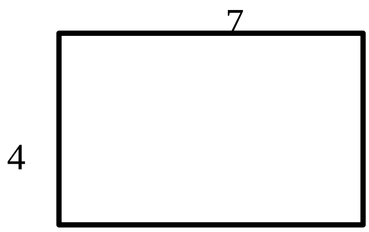
а)



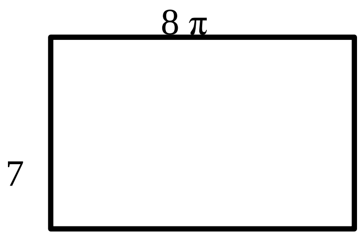
б)



в)



г)



Ответ: г).

Решаем задачи

№1

а) Дан прямоугольник со сторонами 13см и 10 см. Определи площадь боковой поверхности цилиндра, который образовался при вращении прямоугольника вокруг стороны длиной 13 см. В расчётах используй $\pi \approx 3$.

Ответ:780см^2

б) Дан прямоугольник со сторонами 21см и 6 см. Определи площадь боковой поверхности цилиндра, который образовался при вращении прямоугольника вокруг стороны длиной 21 см. В расчётах используй $\pi \approx 3$.

Ответ: 756 см^2

в) Дан прямоугольник со сторонами 25 см и 20 см. Определи площадь боковой поверхности цилиндра, который образовался при вращении прямоугольника вокруг стороны длиной 25 см. В расчётах используй $\pi \approx 3$.

Ответ:3000 см^2

№2

а) Определи площадь осевого сечения цилиндра, если площадь боковой поверхности цилиндра равна 10π см^2.

Ответ:10

б) Определи площадь осевого сечения цилиндра, если площадь боковой поверхности цилиндра равна 42π см^2.

Ответ:42

в) Определи площадь осевого сечения цилиндра, если площадь боковой поверхности цилиндра равна 47π см^2.

Ответ:47

№3

а) Дан цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна 150π см^2.

Высота цилиндра в три раза больше радиуса основания цилиндра. Вычисли радиус основания цилиндра.

Ответ:5

б) Дан цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна 16π см^2.

Высота цилиндра в два раза больше радиуса основания цилиндра. Вычисли радиус основания цилиндра.

Ответ:2

в) Дан цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна 24π см^2. Высота цилиндра в три раза больше радиуса основания цилиндра. Вычисли радиус основания цилиндра.

Ответ:2

№4

а) Длина свода полуцилиндрического ангара равна 34 дм, а его диаметр равен 37 дм. Вычисли площадь поверхности свода ангара. В расчётах используй $\pi \approx 3$.

Ответ:1887дм^2

б) Длина свода полуцилиндрического ангара равна 26 дм, а его диаметр равен 29 дм. Вычисли площадь поверхности свода ангара. В расчётах используй $\pi \approx 3$.
Ответ:1131дм^2

в)Длина свода полуцилиндрического ангара равна 46 дм, а его диаметр равен 24 дм. Вычисли площадь поверхности свода ангара. В расчётах используй $\pi \approx 3$.

Ответ:1656 дм^2

№ 5 а) Во сколько раз увеличится или уменьшится площадь боковой поверхности цилиндра, если его радиус R уменьшить в 5 раз, а высоту H увеличить в 10 раз?

Ответ: увеличится в 2 раза

б) Во сколько раз увеличится или уменьшится площадь боковой поверхности цилиндра, если его радиус R уменьшить в 4 раза, а высоту H увеличить в 8 раз?

Ответ: увеличится в 2 раза

в) Во сколько раз увеличится или уменьшится площадь боковой поверхности цилиндра, если его радиус R уменьшить в 3 раз, а высоту H увеличить в 6 раз?

Ответ: увеличится в 2 раза

№ 6

а) Радиус основания равен 3 см, а высота цилиндра равна 4. Вычислите площадь полной поверхности цилиндра, деленную на π.

Ответ:42

б) Радиус основания равен 7 см, а высота цилиндра равна 5. Вычислите площадь полной поверхности цилиндра, деленную на π.

Ответ:168

в) Радиус основания равен 6 см, а высота цилиндра равна 10. Вычислите площадь полной поверхности цилиндра, деленную на π.

Ответ:192

№ 7

а) Даны два цилиндра. Радиус основания и высота первого равны соответственно 6 и 14, а второго – 7 и 3. Во сколько раз площадь.

боковой поверхности первого цилиндра больше площади боковой поверхности второго?

Ответ:4

б) Даны два цилиндра. Радиус основания и высота первого равны соответственно 12 и 8, а второго – 6 и 4. Во сколько раз площадь

боковой поверхности первого цилиндра больше площади боковой поверхности второго?

Ответ:4

в) Даны два цилиндра. Радиус основания и высота первого равны соответственно 15 и 20, а второго – 10 и 5. Во сколько раз площадь

боковой поверхности первого цилиндра больше площади боковой поверхности второго?

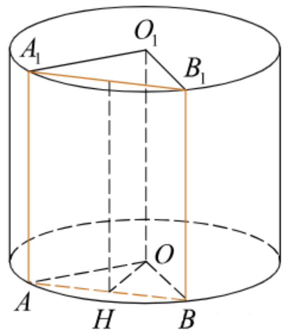
Ответ:6

Задача с развернутым ответом

Высота цилиндра равна 5, а радиус основания 10.

а) Докажите, что площадь боковой поверхности цилиндра равна площади его основания.

б) Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра на расстоянии 6 от неё.



Решение. а) Вспомним, что площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле$S = 2\pi RH,$ где R — радиус основания, H — высота цилиндра. $H = \frac{R}{2}$, поэтому $2\pi RH = \pi R^2$ откуда и следует требуемое.

б) Сечение цилиндра плоскостью, проходящей параллельно его оси OO_1, — прямоугольник ABB_1A_1 (O и AB — соответственно центр и хорда нижнего основания цилиндра), $AA_1 = 5$. Расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения равно высоте OH треугольника OAB. $OA = OB = 10$, $d = OH = 6$, откуда

$$AB = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 16.$$

$S_{ABB1A1} = AA_1 \cdot AB$,

$S_{ABB1A1} = 16 \cdot 5 = 80$.

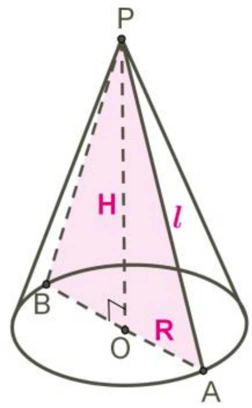
Ответ. *80*.

Занятие 11. Конус. Виды сечений.

Любченко Лариса Александровна

Конус — это тело вращения, которое получается при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета.

Треугольник РОА вращается вокруг стороны РО. РО (Н)— ось конуса и высота конуса,



Р-вершина конуса,

РА (l) — образующая конуса,

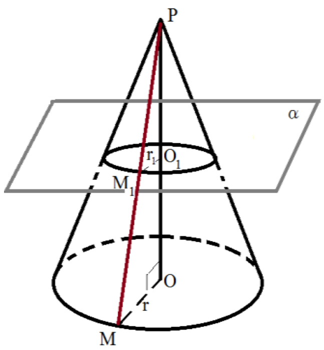
Круг с центром О - основание конуса

АО — радиус основания конуса

Полученная коническая поверхность называется боковой поверхностью конуса.

Осевое сечение конуса — это сечение конуса плоскостью, которая проходит через ось РО конуса. Это сечение является равнобедренным треугольником РАВ.

$\angle PAO = \angle PBO$ – углы между образующими и основанием конуса.



Если секущая плоскость перпендикулярна к оси ОР конуса, то сечение конуса представляет собой круг с центром O_1, расположенном на оси конуса и радиусом r_1. Радиус $r_1 = \frac{PO_1}{PO}\boldsymbol{r}$, где r – радиус основания конуса

Проверяем себя

Т1. Заполните пропуски:

а) Конус – это _____, которое получается при вращении _____вокруг его _____.

Ответ: Конус — это тело вращения, которое получается при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета.

б) Ось симметрии конуса, является так же ___________ конуса.

Ответ: высотой.

Т2. Укажите верное утверждение:

Какая фигура образуется в сечении, если конус пересечь плоскостью, которая проходит через ось конуса?

а) круг;

б) равносторонний треугольник;

в) прямоугольник;

г) равнобедренный треугольник.

Ответ: г).

Т3. Вычислить:

Прямоугольный треугольник, катеты которого равны 9см и 12 см, а гипотенуза 15см вращается вокруг меньшей стороны.

а) Высота полученного тела вращения равна ____ см.

б) Образующая полученного тела равна ____ см.

в) Радиус полученного тела вращения равен _____ см.

Ответ: а)9см; б)15см; в)12см

Решаем задачи

№1

а) Диаметр основания конуса равен 108, а длина образующей – 90. Найдите высоту конуса.

Ответ:72

б) Диаметр основания конуса равен 144, а длина образующей – 75. Найдите высоту конуса.

Ответ:21

в) Диаметр основания конуса равен 24, а длина образующей – 13. Найдите высоту конуса.

Ответ:5

№2

а) Найдите площадь осевого сечения конуса, радиус основания которого равен 3, а образующая равна 5.

Ответ: 12

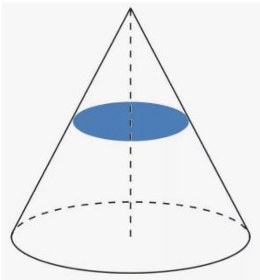
б) Найдите площадь осевого сечения конуса, радиус основания которого равен 6, а образующая равна 10.

Ответ: 48

в) Найдите площадь осевого сечения конуса, радиус основания которого равен 12, а образующая равна 13.

Ответ: 60

№3



а) Площадь основания конуса равна 9. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 3 и 6, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.

Ответ: 1

б) Площадь основания конуса равна 18. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 3 и 6, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.

Ответ: 2

в) Площадь основания конуса равна 48. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 15 и 45, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.

Ответ: 3

№4

а) Рассчитай. На каком расстоянии от вершины конуса расположено параллельное основанию сечение, площадь которого равна $\frac{1}{36}$ площади основания конуса. Высота конуса равна 24см.

Ответ: 4

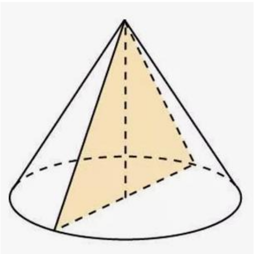
б) Рассчитай. На каком расстоянии от вершины конуса расположено параллельное основанию сечение, площадь которого равна $\frac{1}{25}$ площади основания конуса. Высота конуса равна 45см.

Ответ: 9

в) Рассчитай. На каком расстоянии от вершины конуса расположено параллельное основанию сечение, площадь которого равна $\frac{1}{16}$ площади основания конуса. Высота конуса равна 32см.

Ответ: 8

№6



а) Площадь основания конуса равна 36π, высота – 3. Найдите площадь осевого сечения конуса.

Ответ: 18

б) Площадь основания конуса равна 16π, высота – 6. Найдите площадь осевого сечения конуса.

Ответ: 24

в) Площадь основания конуса равна 36π, высота – 10. Найдите площадь осевого сечения конуса.

Ответ: 60

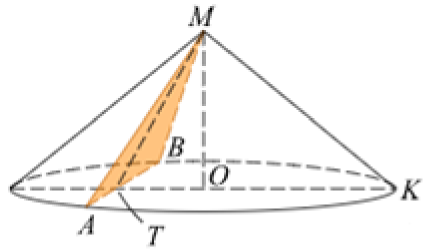
Задача с развернутым ответом

Дан прямой круговой конус с вершиной M. Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине M. Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что полученный в сечении треугольник тупоугольный.

б) Найдите площадь сечения.

Решение



а) Пусть треугольник MAB — искомое сечение, перпендикулярное образующей MK, и пусть T — точка его пересечения с диаметром, проходящим через точку K. В треугольнике MTK угол K равен 30°. Следовательно, MT=2; TK=4.В треугольнике MTB образующая конуса MB=$2\sqrt{3}$.

$AB=2TB=2\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=4\sqrt{2}$

$AM^2+BM^2=2(2\sqrt{3})^2=24$; $AB^2=(4\sqrt{2})^2=32$.*Следовательно* $\angle AMB>90^0$

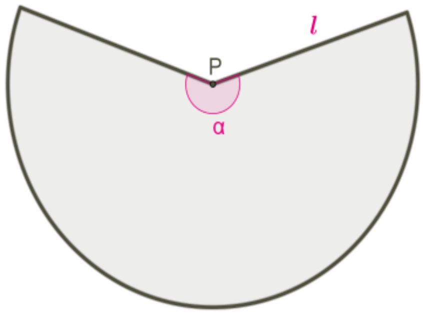
б) Площадь треугольника MBA равна: $S_{MBA}=\frac{1}{2}AB\cdot MT$; $S_{MBA}=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 2=4\sqrt{2}$

Ответ: б) $4\sqrt{2}$

Занятие 12. Площадь поверхности конуса

Любченко Лариса Александровна

Для конуса построим развертку боковой поверхности. Образующая конуса – *l* является радиусом сектора, сектор имеет длину дуги, равную длине окружности в основании конуса $2\boldsymbol{\pi R}$, угол развертки боковой поверхности равен $\boldsymbol{\alpha}$.



$\boldsymbol{S}_{\text{бок}} = \boldsymbol{\pi l^2} \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{360}}$, или $S_{\text{бок}} = \boldsymbol{\pi R l}$

$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = \boldsymbol{\pi R^2 + \pi R l = \pi R(R + l)}$

Проверяем себя

Т1. Укажите верную формулу:

Площадь полной поверхности конуса вычисляется по формуле:

а) S=$2\pi R(R+h)$;

б) S=$2\pi(R+l)$;

в) S=$\pi R(R+l)$;

Ответ: в)

Т2. Заполните пропуски:

Разверткой боковой поверхности конуса является ____________, радиус которой равен ___________ конуса, а длина дуги сектора равна длине ___________ конуса.

Ответ: круговой сектор; образующей; окружности основания.

Решаем задачи

№1

а) Крыша башни замка имеет форму конуса. Высота крыши 6 м, а диаметр башни 16 м. Вычислить площадь поверхности крыши ($\pi \approx 3$).

Ответ: 240

б) Крыша башни замка имеет форму конуса. Высота крыши 3 м, а диаметр башни 8 м. Вычислить площадь поверхности крыши ($\pi \approx 3$).

Ответ: 60

в) Крыша башни замка имеет форму конуса. Высота крыши 7 м, а диаметр башни 48 м. Вычислить площадь поверхности крыши ($\pi \approx 3$).

Ответ: 1800

№2

а) Известно, что площадь боковой поверхности конуса равна 260π см ^{2}, а радиус основания 10 см, найти высоту конуса.

Ответ: 24

б) Известно, что площадь боковой поверхности конуса равна 320π см ^{2}, а радиус основания 16 см, найти высоту конуса.

Ответ: 12

в) Известно, что площадь боковой поверхности конуса равна 240π см ^{2}, а радиус основания 12 см, найти высоту конуса.

Ответ: 16

№3

а) Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом $60°$. В основание конуса вписан треугольник, у которого одна сторона равна 27 см, а противолежащий угол равен $30°$.Определите площадь полной поверхности конуса деленную на π.

Ответ: 2187

б) Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом $60°$. В основание конуса вписан треугольник, у которого одна сторона равна 13 см, а противолежащий угол равен $30°$.Определите площадь полной поверхности конуса деленную на π.

Ответ: 507

в) Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом $60°$. В основание конуса вписан треугольник, у которого одна сторона равна 4 см, а противолежащий угол равен $30°$.Определите площадь полной поверхности конуса деленную на π.

Ответ: 48

№4

а) Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 36 раз, а радиус основания останется прежним?

Ответ: 36

б) Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 11 раз, а радиус основания останется прежним?

Ответ: 11

б) Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 9 раз, а радиус основания останется прежним?

Ответ: 9

№5

а) Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 60

б) Площадь боковой поверхности конуса в $\sqrt{2}$ раз больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 45

в) Площадь боковой поверхности конуса в $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ раза больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 30

№6

а) Высота конуса равна 20, образующая равна 25. Найдите площадь его полной поверхности, деленную на π

Ответ: 600

б) Высота конуса равна 36, образующая равна 45. Найдите площадь его полной поверхности, деленную на π

Ответ: 1944

в) Высота конуса равна 21, образующая равна 35. Найдите площадь его полной поверхности, деленную на π

Ответ: 1764

№7

а) Даны два конуса. Радиус основания и образующая первого конуса равны соответственно 4 и 6, а второго – 6 и 8. Во сколько раз площадь боковой поверхности второго конуса больше площади боковой поверхности первого?

Ответ: 2

б) Даны два конуса. Радиус основания и образующая первого конуса равны соответственно 2 и 5, а второго – 5 и 6. Во сколько раз площадь боковой поверхности второго конуса больше площади боковой поверхности первого?

Ответ: 3

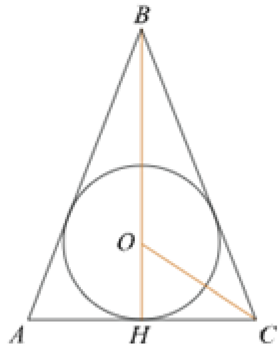
в) Даны два конуса. Радиус основания и образующая первого конуса равны соответственно 4 и 6, а второго – 2 и 8. Во сколько раз площадь боковой поверхности первого конуса больше площади боковой поверхности второго?

Ответ: 1,5

Задача с развернутым ответом

В конус, радиус основания которого равен 3, вписан шар радиуса 1,5.
а) Изобразите осевое сечение комбинации этих тел.
б) Найдите отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.

Решение.



а) Осевым сечением является равнобедренный треугольник ABC, боковые стороны которого являются образующими конуса, а основанием — его диаметр, и вписанная в треугольник окружность, радиус которой равен радиусу шара (см. рис.).
б) Введём обозначения, как показано на рисунке. Пусть O — центр вписанной окружности, отрезок CO — биссектриса угла ACB и пусть угол HCO=α,имеем:

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{HC}} = \frac{1}{2}$, tg∠HCB= tg2$\alpha$=$\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-tg^2\alpha}$=$\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2}$= $\frac{4}{3}$,

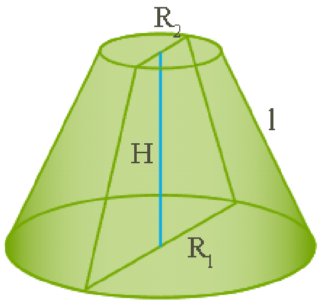
Тогда BH=HC tg∠HCB=4, BC=$\sqrt{3^2+4^2}$=5. Для площадей поверхностей конуса и шара имеем:$S_{\text{кон}} = \pi R^2 + \pi Rl = 9\pi + 15\pi = 24\pi, S_{\text{ш}}$=$4\pi r^2$=$4\pi(1{,}5)^2$=$9\pi$.
Тогда искомое отношение равно$\frac{24}{9}$ или 8:3.

Ответ: 8:3

Занятие 13. Усеченный конус

Романова Анна Владимировна

Усечённый конус — тело вращения, которое получается при вращении прямоугольной трапеции вокруг меньшей боковой стороны.



R_2 — радиус меньшего основания;
R_1 — радиус большего основания;
l — образующая;
H — высота

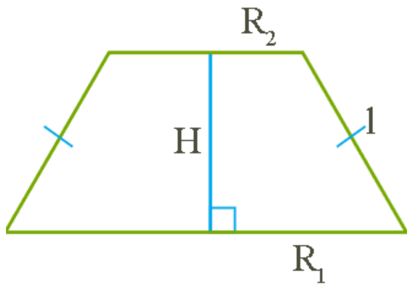
К основным элементам усечённого конуса относят два его основания, высоту, образующие и боковую поверхность конуса.

Площадь боковой поверхности усечённого конуса

$S_{бок.} = \pi \cdot l \cdot (R_1 + R_2)$, где R_1 и R_2 − радиусы оснований, l — образующая.

$S_{полн.} = S_{бок.} + S_1 + S_2$, где S_1, S_2 — площади оснований усечённого конуса.

При решении задач чаще всего достаточно нарисовать только осевое сечение усечённого конуса, которое является равнобедренной трапецией.



Проверяем себя

Т1. Заполните пропуски:

а) Усечённый конус – тело___________, которое получается при вращении _______________ вокруг _____________ боковой стороны.

Ответ: Усечённый конус — тело вращения, которое получается при вращении прямоугольной трапеции вокруг меньшей боковой стороны.

б) К основным элементам усечённого конуса относят два его _________, __________, ___________ и ____________ поверхность конуса.

Ответ. К основным элементам усечённого конуса относят два его основания, высоту, образующие и боковую поверхность конуса.

Т2. Укажите верное утверждение:

Основаниями усечённого конуса являются:

а) круг;

б) равносторонний треугольник;

в) два круга, лежащие в параллельных плоскостях;

г) равнобедренный треугольник.

Ответ: в).

Т3. Вычислить:

Равнобедренная трапеция, боковые стороны которой равны 5 см, высота трапеции, проведенная через середины оснований, равна 4 см, а меньшее основание 6см вращается вокруг высоты трапеции.

а) Высота полученного тела вращения равна ____ см.

б) Образующая полученного тела равна ____ см.

в) Радиусы полученного тела вращения равны _____ см и ____см.

Ответ: а) 4см; б) 5см; в)6 см и 12см

Решаем задачи

№1

а) Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса, если радиусы оснований равны 3 и 5, а образующая — 4.

Ответ:32π

б) Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса, если радиусы оснований равны 1 и 3, а образующая – 7.

Ответ: 28π

в) Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса, если радиусы оснований равны 2 и 10, а высота – 15.

Ответ: 204π

№2

а) Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса, если радиусы оснований равны 3 и 6, а высота – 4.

Ответ: 90π

б) Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса, если радиусы оснований равны 4 и 8, а высота – 3.

Ответ: 140π

в) Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса, если радиусы оснований равны 6 и 12, а высота – 8.

Ответ: 360π

№3

а) Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса, если радиусы оснований равны 2 и 4, а образующая наклонена под углом 45^0 к основанию.

Ответ: $(12\sqrt{2}+20)\pi$

б) Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса, если радиусы оснований равны 3 и 5, а образующая наклонена под углом 45^0 к основанию.

Ответ: $(16\sqrt{2}+34)\pi$

в) Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса, если радиусы оснований равны 4 и 6, а образующая наклонена под углом 45^0 к основанию.

Ответ: $(20\sqrt{2}+52)\pi$

№4

а) Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса, если его высота равна 24, образующая 25, а площадь осевого сечения – 264.

Ответ: 360π

б) Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса, если его высота равна 4, образующая 5, а площадь осевого сечения – 28.

Ответ: 64π

в) Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса, если его высота равна 15, образующая 17, а площадь осевого сечения – 240.

Ответ:432π

№5

а) Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 9:5. Найдите площадь осевого сечения усеченного конуса, если его высота равна 15, а образующая – 17.

Ответ: 420

б) Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 7:3. Найдите площадь осевого сечения усеченного конуса, если его высота равна 3, а

образующая – 5.

Ответ: 30

в) Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 13:7. Найдите площадь осевого сечения усеченного конуса, если его высота равна 8, а

образующая – 10.

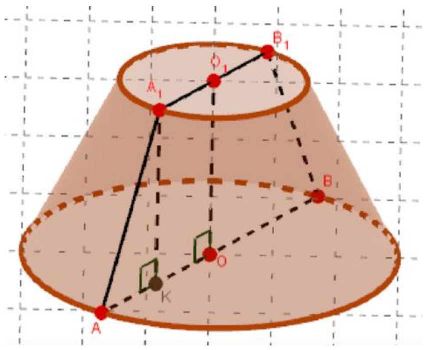
Ответ: 160

Задача с развернутым ответом

Радиусы оснований усеченного конуса равны 5см и 11 см, а образующая равна 10 см. Найдите

а) высоту усеченного конуса

б) площадь осевого сечения.



Решение

а) Четырехугольник AA_1O_1O – прямоугольная трапеция

Четырехугольник AA_1B_1B – равнобедренная трапеция

Опустим перпендикуляр $A_1K \perp OA$.

Т.к. $\begin{cases} A1K \perp OA \\ O1O \perp OA \end{cases} \Rightarrow A_1K \perp O_1O$

Т.к. плоскости оснований параллельны, то длины перпендикуляров равны.

Получаем: $\begin{cases} A1K \parallel O1O \\ A1K = O1O \\ A1K \perp OA \end{cases} \Rightarrow KA_1O_1O$*- прямоугольник.*

В $\triangle AA_1K$: $\begin{cases} \angle AKA1 = 90^\circ \\ AA1 = l \\ AK = OA - OK = OA - O1A1 = R - r \end{cases} \Rightarrow A_1K = \sqrt{AA_1^2 - AK^2}$

$$h = \sqrt{l^2 - (R-r)^2}$$

$h = \sqrt{10^2 - (11-5)^2}$*=8 (см.)*

б) Площадь сечения – равнобедренной трапеции AA_1B_1B равна:

$S_{AA1B1B} = \frac{AB + A1B1}{2} \cdot h = \frac{2R+2r}{2} \cdot h = (R+r)h$

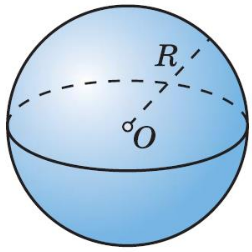
$S_{сеч} = (11+5) \cdot 8 = 128$ *(см^2.)*

Ответ: а)8см; б) 128 см^2.

Занятие 14. Сфера и шар

Селютина Елена Александровна

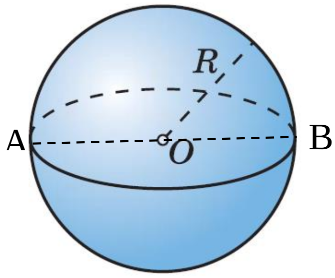
Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.



Сфера радиуса R

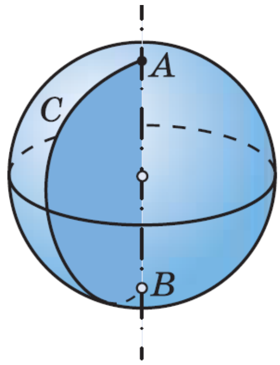
Данная точка называется центром сферы (точка O на рисунке), а данное расстояние – радиусом сферы (R на рисунке).

Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр, называется диаметром сферы (AB на рисунке).



Тело, ограниченное сферой, называется шаром. Центр, радиус и диаметр сферы называются также центром, радиусом и диаметром шара.

Сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг её диаметра.



Сфера получена вращением полуокружности ACB вокруг диаметра AB

Площадь сферы радиуса R вычисляется по формуле $\boldsymbol{S = 4\pi R^2}$.

Площадь круга радиуса R вычисляется по формуле $S = \pi R^2$

Длина окружности радиуса R вычисляется по формуле $C = 2\pi R$

Проверяем себя

Т1. Выберите неверное утверждение.

1. Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.

2. Сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг диаметра.

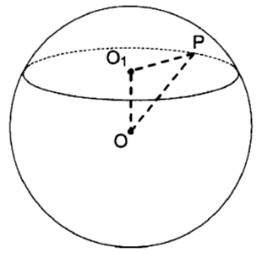
3. Площадь сферы радиуса R можно вычислить по формуле $S = 4\pi R^2$.

4. Тело, ограниченное сферой, называется шаром.

5. Сечение сферы плоскостью есть окружность.

Ответ: 5. (Сечение сферы плоскостью есть окружность)

Т2. Вычислить:



Расстояние от центра шара до секущей плоскости OO_1 равно 5, радиус шара ОР равен 13.

а) Площадь секущей плоскости равна _____.

б) Длина линии пересечения сферы и секущей плоскости равна _______.

в) Площадь сферы равна _______.

Ответ: а) 144π; б) 24π; в) 676π.

Решаем задачи

№1

а) Площадь большего круга шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.

Ответ: 12

б) Площадь большего круга шара равна 7. Найдите площадь поверхности шара.

Ответ: 28

в) Площадь большего круга шара равна 41. Найдите площадь поверхности шара.

Ответ: 164

№3

а) Площадь поверхности шара равна 24. Найдите площадь большего круга шара.

Ответ: 6

б) Площадь поверхности шара равна 56. Найдите площадь большего круга шара.

Ответ: 14

в) Площадь поверхности шара равна 68. Найдите площадь большего круга шара.

Ответ: 17

№3

а) Радиусы двух шаров равны 6 и 8. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

Ответ: 10

б) Радиусы двух шаров равны 32 и 60. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

Ответ: 68

в) Радиусы двух шаров равны 21 и 72. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

Ответ: 75

№4

а) Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 24 см. Вершины треугольника находятся на сфере. Определите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 13.

Ответ: 5 см.

б) Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 30 см. Вершины треугольника находятся на сфере. Определите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 17.

Ответ: 8 см.

в) Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 14 см. Вершины треугольника находятся на сфере. Определите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 25.

Ответ: 24 см.

№5

а) Стороны прямоугольного треугольника, с катетами 8 см. и 15 см., касаются сферы. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 5 см.

Ответ: 4 см.

б) Стороны прямоугольного треугольника, с катетами 7 см. и 24 см., касаются сферы. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 5 см.

Ответ: 4 см.

в) Стороны прямоугольного треугольника, с катетами 12 см. и 35 см., касаются сферы. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 13 см.

Ответ: 12 см.

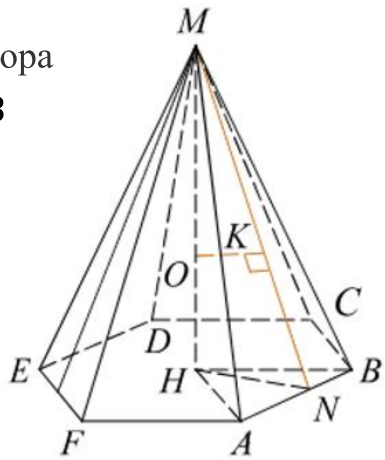
Задача с развернутым ответом

В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 10, а высота равна 6, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.)

a) Докажите, что площадь боковой поверхности пирамиды относится к площади основания как $\sqrt{7}:2$.

b) Найдите площадь этой сферы.

Доказательство:



1. ΔMHB прямоугольный ($\angle$H=90^0). По т. Пифагора $\mathrm{MB}^2 = \mathrm{MH}^2 + \mathrm{HB}^2$, значит BH=$\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$
2. ΔABH равносторонний, AB=HB=8, NH=$\frac{\mathrm{AB}\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$
3. $S_{\text{осн}} = \frac{\mathrm{AB}^2 3\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3}$
4. ΔAMB равнобедренный, AN=4, значит MN=$\sqrt{\mathrm{MA}^2 - \mathrm{AN}^2} = 2\sqrt{21}$
5. $S_{\text{бок}} = 3\mathrm{AB} \cdot \mathrm{MN}$=$48\sqrt{21}$
6. $\frac{S_{\text{бок}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{48\sqrt{21}}{96\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ чтд.

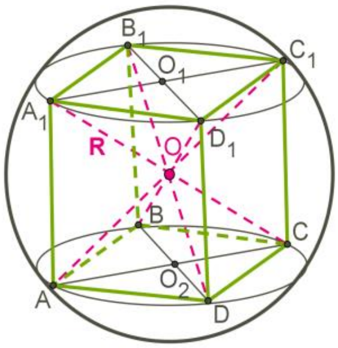
Решение:

1. ΔMKO~ΔMHN ($\angle$K=$\angle$H=90^0, $\angle$M общий) $\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{HN}} \Leftrightarrow \frac{6-r}{2\sqrt{21}} = \frac{r}{4\sqrt{3}} \Leftrightarrow r = 4\sqrt{7}$-8
2. $S_{\text{сферы}} = 4\pi r^2 = 4\pi(4\sqrt{7} - 8)^2 = 64\pi\left(11 - 4\sqrt{7}\right)$.

   Ответ: $64\pi\left(11 - 4\sqrt{7}\right)$

Занятие 15. Шар, вписанный и описанный.

Селютина Елена Александровна



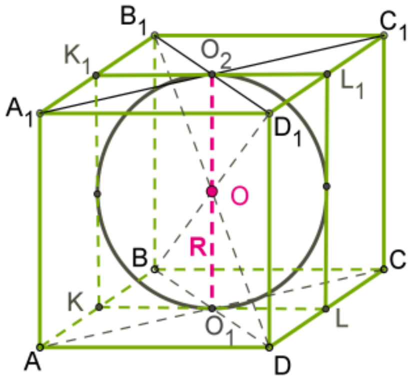
Шар является описанным около куба, если все вершины куба находятся на поверхности шара.

Центр шара O – точка пересечения диагоналей куба.

AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 – диагонали куба.

Радиус шара равен половине диагонали куба.

Около любого куба можно описать шар.

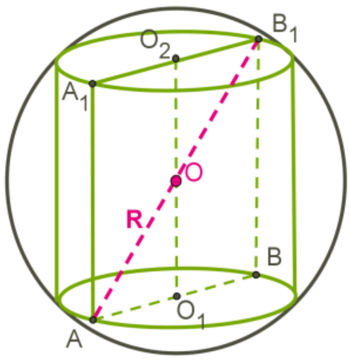


Шар является вписанным в куб, если он касается всех его граней.

Центр шара O находится в точке пересечения диагоналей куба.

Радиус шара – половина стороны куба.

В любой куб можно вписать шар.

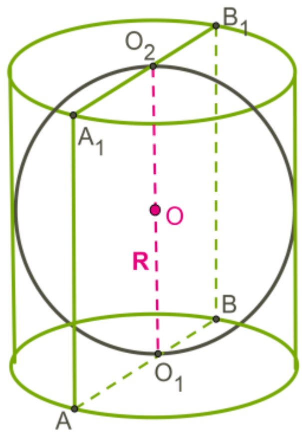


Шар является описанным около цилиндра, если окружности оснований цилиндра лежат на поверхности шара.

Центр шара O находится в середине высоты цилиндра. Радиус шара – половина диагонали осевого сечения цилиндра.

Около любого цилиндра можно описать шар.

Шар является вписанным в цилиндр, если касается оснований цилиндра и всех его образующих.



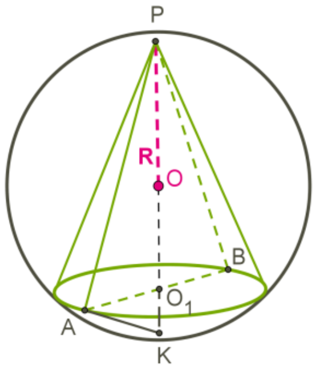
Центр шара O – середина высоты цилиндра.

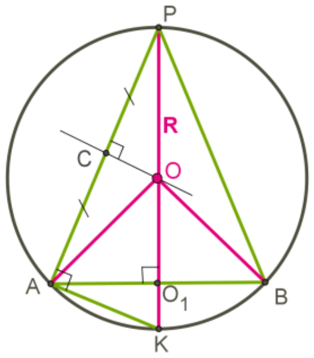
Шар можно вписать только в такой цилиндр, в котором диаметр основания равен высоте.

Осевое сечение – квадрат с вписанной в него окружностью.

Радиус шара равен радиусу основания цилиндра и половине высоты.

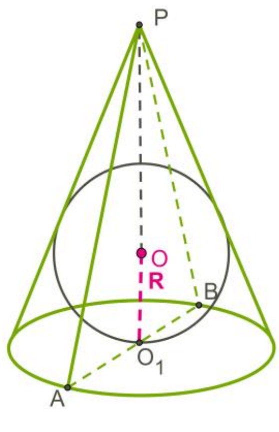
Шар является описанным около конуса, если вершина конуса и окружность его основания находятся на поверхности шара.

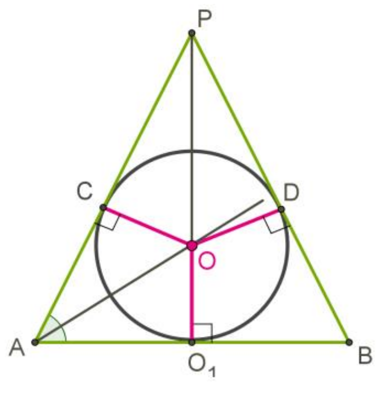




Центр шара O находится в точке пересечения высоты конуса и серединного перпендикуляра, образующей конуса.

Около любого конуса можно описать шар.





Шар является вписанным в конус, если касается основания конуса и всех его образующих.

Центр шара O находится в точке пересечения высоты конуса и биссектрисы угла образованного образующей конуса с основанием.

В любой конус можно вписать шар.

Проверяем себя

Т1. Выберите неверное утверждение.

1.Радиус шара, вписанного в цилиндр равен диаметру цилиндра.

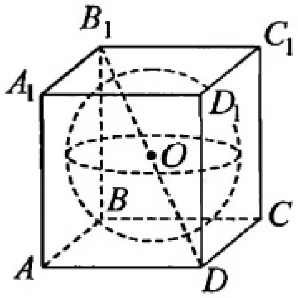
2. Шар является описанным около куба, если все вершины куба находятся на поверхности шара.

3. Центр шара, описанного около конуса находится в точке пересечения высоты конуса и серединного перпендикуляра образующей конуса.

4. Шар можно вписать только в такой цилиндр, в котором диаметр основания равен высоте.

Ответ:1. (Радиус шара, вписанного в цилиндр равен радиусу основания цилиндра.)

Т2. Вычислить:



В куб с ребром $\sqrt{3}$ вписана сфера.

Расстояние от центра сферы до вершины куба.

Произведение расстояния от центра сферы до ребра куба на $\sqrt{6}$.

Радиус сферы, в ответ запишите $\sqrt{3}$R.

Ответ: а) 1,5; b) 3; с) 1,5.

Решаем задачи

№1

а) Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности цилиндра равна 18. Найдите площадь поверхности шара.

Ответ: 12.

б) Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности цилиндра равна 111. Найдите площадь поверхности шара.

Ответ: 74.

в) Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности цилиндра равна 6. Найдите площадь поверхности шара.

Ответ: 4.

№2

а) Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиусом 1. Найдите площадь его поверхности.

Ответ: 24.

б) Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиусом 2. Найдите площадь его поверхности.

Ответ: 96.

в) Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиусом 3. Найдите площадь его поверхности.

Ответ: 216.

№3

а) Около конуса описан шар. Центр шара находится в центре основания конуса. Радиус шара равен $28\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

Ответ: 56.

б) Около конуса описан шар. Центр шара находится в центре основания конуса. Радиус шара равен $33\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

Ответ: 66.

в) Около конуса описан шар. Центр шара находится в центре основания конуса. Радиус шара равен $92\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

Ответ: 184.

№4

а) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 3, а боковые ребра наклонены к основанию под углом 60^0. Найдите радиус описанной вокруг пирамиды сферы.

Ответ: 2.

б) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 6, а боковые ребра наклонены к основанию под углом 60^0. Найдите радиус описанной вокруг пирамиды сферы.

Ответ: 6,5.

в) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 9, а боковые ребра наклонены к основанию под углом 60^0. Найдите радиус описанной вокруг пирамиды сферы.

Ответ: 14.

№5

а) Около правильной треугольной призмы описан шар радиуса 6. Найдите радиус вписанного шара.

Ответ: 3.

а) Около правильной треугольной призмы описан шар радиуса 8. Найдите радиус вписанного шара.

Ответ: 4.

в) Около правильной треугольной призмы описан шар радиуса 12. Найдите радиус вписанного шара.

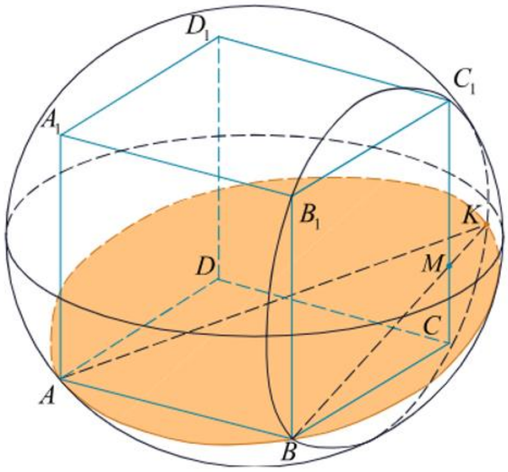
Ответ: 6.

Задача с развернутым ответом

Вокруг куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 3 описана сфера. На ребре CC_1 взята точка M так, что плоскость, проходящая через точки *A, B* и *M,* образуют угол 15^0с плоскостью *ABC.*

a) Постройте линию пересечения сферы и плоскости, проходящей через точки *A, B,* и *M.*
b) Найдите длину линии пересечения плоскости сечения и сферы.

Решение:



Сечение сферы плоскостью является окружность. Пусть прямая BM пересекает сферу в точке *K.* Искомая линия пересечения сферы и плоскости – окружность, описанная около ΔABK. Точка K – точка пересечения прямой BM с описанной окружностью квадрата BCC_1B_1. $\angle BKC_1$=90^0, так как BC_1 – диаметр окружности, значит $BK = BC_1 \cdot \cos\angle MB\,C_1$.

Так как $\angle MBC$=15^0, то $\angle MBC_1$=$45^0 - 15^0 == 30^0$, следовательно $BK = BC_1 \cdot \cos 30^0 == 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Так как ΔABK прямоугольный, то длина описанной около него окружности равна

$C = D\pi = AK \cdot \pi = \sqrt{AB^2 + BK^2} \cdot \pi = 3\sqrt{\frac{5}{2}}\pi$

Ответ: $3\sqrt{\frac{5}{2}}\pi$.

Занятие 16. Проверочная работа.

Самедова Инна Сабировна

	ВАРИАНТ I	ОТВЕТЫ		
№	Задание	а	б	в
1	Формула площади круга	$2\pi R$	πR^2	$2\pi R^2$
2	При вращении прямоугольника вокруг стороны получится	шар	конус	цилиндр
3	В основании цилиндра лежит	круг	полукруг	квадрат
4	Отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей в цилиндре называются	высотой	осью	образующими
5	Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси есть	прямоугольник	круг	трапеция
6	Радиус основания цилиндра равна 8 см, высота цилиндра равна 5 см. Найдите площадь осевого сечения цилиндра	40 см^2	80 см^2	20 см^2
7	Конус получается при вращении вокруг катета	Произвольного треугольника	Равностороннего треугольника	Прямоугольного треугольника
8	Осевое сечение конуса - это	треугольник	круг	прямоугольник
9	Формула площади боковой поверхности конуса	$S_{бок} = \pi Rl$	$S_{бок} = \pi R^2 l$	$S_{бок} = 2\pi Rl$
10	Формула площади боковой поверхности цилиндра	$S_{бок} = 2\pi Rh$	$S_{бок} = \pi R^2 h$	$S_{бок} = \pi Rh$
11	Сечение конуса плоскостью, проходящее перпендикулярно его оси, это	трапеция	треугольник	круг
12	Радиус основания конуса 3 см, высота 4 см. Найдите образующую	7 см	5 см	1 см
13	Сфера - это поверхность	шара	цилиндра	конуса
14	Формула площади сферы	$2\pi R^2$	$4\pi R^2$	πR^2
15	Площадь сферы равна 36π см^2. Чему равен радиус шара	3 см	9 см	6 см
16	Любое сечение шара плоскостью – это	квадрат	круг	прямоугольник
17	Осевым сечением усеченного конуса является	прямоугольник	треугольник	трапеция
18	Что представляет из себя геометрическое место точек, удаленных от данной точки на расстояние, меньшее или равное 10 см.	шар радиуса 5 см	шар радиуса 20 см	шар радиуса 10 см
19	Формула длины окружности	$2\pi R$	πR^2	$2\pi R^2$
20	Пересечение двух сфер - это	круг	окружность	шар

	ВАРИАНТ II	ОТВЕТЫ		
№	Задание	а	б	в
1	Формула длины окружности	πR^2	$2\pi R$	$2\pi R^2$
2	Сечение цилиндра плоскостью, проходящее перпендикулярно его оси	прямоугольник	треугольник	круг
3	Формула площади боковой поверхности цилиндра	$S_{бок}= \pi Rh$	$S_{бок} = 2\pi Rh$	$S_{бок} = \pi R^2h$
4	Высота конуса 6 см, радиус его основания 8 см. найдите длину образующей конуса.	10 см	14 см	2 см
5	Боковая поверхность цилиндра состоит из	осей	высот	образующих
6	Формула площади круга	πR^2	$2\pi R$	$2\pi R^2$
7	Сечение конуса плоскостью, проходящее через его вершину, это	прямоугольник	трапеция	треугольник
8	Осевое сечение усеченного конуса это	круг	трапеция	треугольник
9	Геометрическое место точек, удаленных от данной точки на расстояние меньшее или равное 5 см это	Шар радиуса 5 см	Шар радиуса 10 см	Шар радиуса 2,5 см
10	Сечение шара плоскостью – это	овал	окружность	круг
11	Площадь сферы равна 100 π см$^{2.}$ Чему равен радиус соответствующего шара?	10 см	5 см	25 см
12	При вращении прямоугольника вокруг его стороны получается	цилиндр	шар	конус
13	Площадь боковой поверхности конуса	$S_{бок} =2 \pi Rl$	$S_{бок} = \pi Rl$	$S_{бок} = \pi R^2l$
14	При вращении прямоугольного треугольника вокруг катета получится	цилиндр	шар	конус
15	Сечение конуса плоскость, проходящее перпендикулярно оси есть	прямоугольник	круг	трапеция
16	Радиус основания цилиндра – 3 см, высота – 7 см. найдите площадь осевого сечения цилиндра	42 см^2	21 см^2	10 см^2
17	Отрезок, соединяющий вершину конуса с точками окружности основания, называется	осью	образующей	высотой
18	Сечение цилиндра плоскостью, параллельно его оси это	прямоугольник	круг	треугольник
19	Сфера это поверхность	цилиндра	конуса	шара
20	Формула площади сферы	πR^2	$2\pi R^2$	$4\pi R^2$

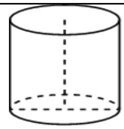
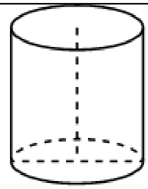
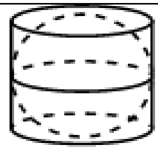
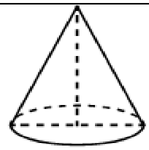
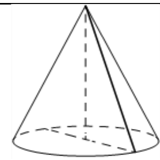
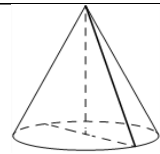
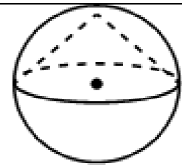
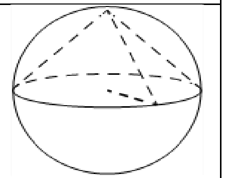
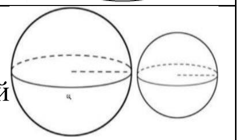
Ответы

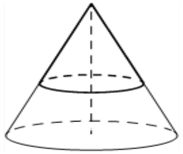
1 вариант																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
б	в	а	в	а	б	в	а	а	а	в	б	а	б	а	б	в	в	а	б

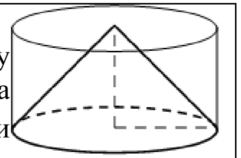
2 вариант																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
б	в	б	а	в	а	в	б	а	в	б	а	б	в	б	а	б	а	в	в

Проверочная работа по теме «Тела вращения».

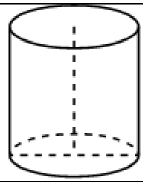
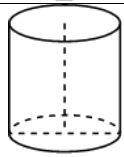
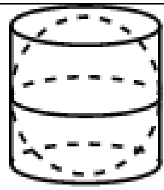
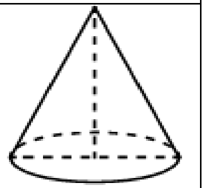
Вариант 1

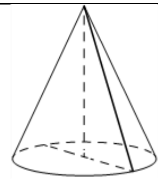
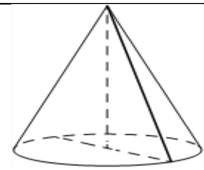
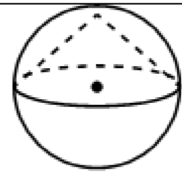
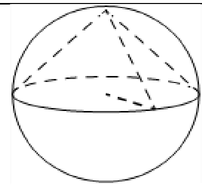
1.	Площадь боковой поверхности цилиндра равна $12\ \pi$, а диаметр основания равен 6. Найдите высоту цилиндра.	
2.	Площадь боковой поверхности цилиндра равна $20\ \pi$, а высота равна 4. Найдите диаметр основания.	
3.	Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 48. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.	
4.	Диаметр основания конуса равен 40, а длина образующей – 25. Найдите высоту конуса.	
5.	Площадь полной поверхности конуса равна 35. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении 3:2, считая от вершины конуса. Найдите площадь полной поверхности отсечённого конуса.	
6.	Высота конуса равна 21, а длина образующей равна 29. Найдите диаметр основания конуса.	
7.	Высота конуса равна 24, а диаметр основания равен 90. Найдите образующую конуса	
8.	Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $10\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.	
9.	Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $11\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.	
10.	Радиусы двух шаров равны 9 и 12. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.	

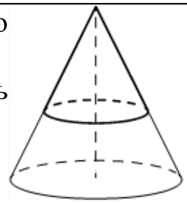
		

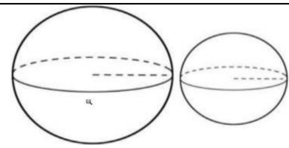
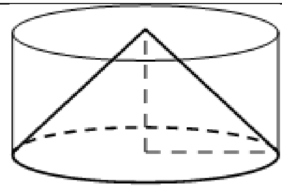
11.	Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $5\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.	

Вариант 2

1.	Площадь боковой поверхности цилиндра равна $24\,\pi$, а диаметр основания равен 8. Найдите высоту цилиндра.	
2.	Площадь боковой поверхности цилиндра равна $24\,\pi$, а высота равна 8. Найдите диаметр основания.	
3.	Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 120. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.	
4.	Диаметр основания конуса равен 32, а длина образующей – 65. Найдите высоту конуса.	

6.	Высота конуса равна 9, а длина образующей равна 41. Найдите диаметр основания конуса.	
7.	Высота конуса равна 16, а диаметр основания равен 60. Найдите длину образующей конуса.	
8.	Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $51\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.	
9.	Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $13\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.	

5.	Площадь полной поверхности конуса равна 32,5. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении 4:1, считая от вершины конуса. Найдите площадь полной поверхности отсечённого конуса.	

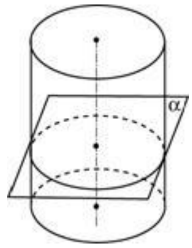
10.	Радиусы двух шаров равны 3 и 4.Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.	
11.	Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $3\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.	

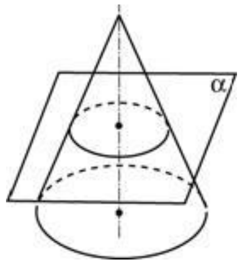
Ответы	Вариант 1	Вариант 2
Задание 1	2	3
Задание 2	5	3
Задание 3	72	180
Задание 4	15	63
Задание 5	12,6	20,8
Задание 6	40	80
Задание 7	51	34
Задание 8	20	102
Задание 9	11	13
Задание 10	15	5
Задание 11	5	6

Занятие 17. Практическая работа «Сечения тел вращения»

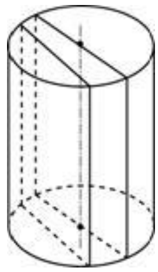
Романова Анна Владимировна

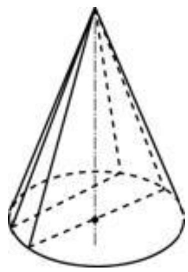
Сечением цилиндра или конуса плоскостью, параллельной плоскости основания, является окружность равная (для цилиндра) или подобная (для конуса) основанию.



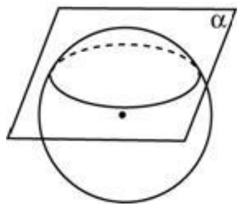


Сечением цилиндра плоскостями, параллельными образующим являются прямоугольники. Сечением плоскостями, проходящими через вершину конуса, являются треугольники.



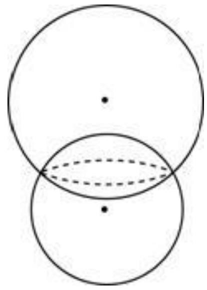


Осевым называется сечение, проходящее через ось тела вращения. Осевое сечение шара (сферы) также называется *диаметральным*.

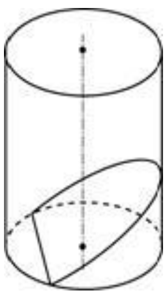


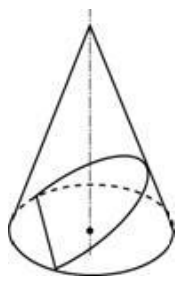
Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Цент этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

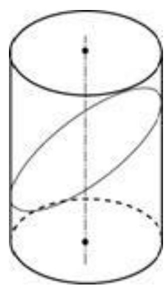
Линия пересечения двух сфер есть окружность. Других точек пересечения они не имеют.



Сечением цилиндра или конуса плоскостью, не параллельной плоскости основания и не проходящей через вершину конуса является либо эллипс (если плоскость не пересекает основание), либо парабола и прямая (если плоскость пересекает основание).







Решаем задачи

№1

Изобразите

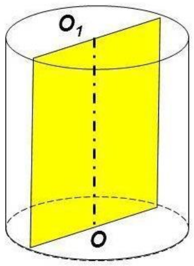
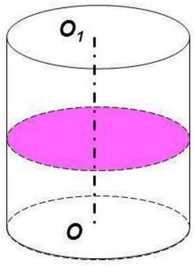
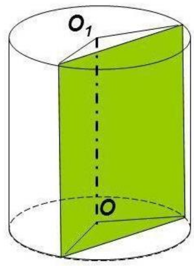
а) осевое сечение цилиндра;

б) сечение цилиндра плоскостью, проходящей перпендикулярно оси цилиндра;

в) сечение цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра.

Какая фигура получается в каждом случае?

Ответ:

а)	*б)*	*в)*
		
прямоугольник	*круг*	*прямоугольник*

№2

Изобразите

а) сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину и хорду основания;

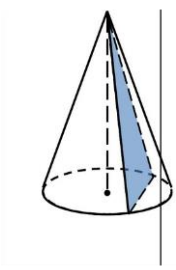
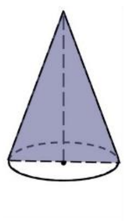
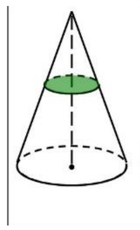
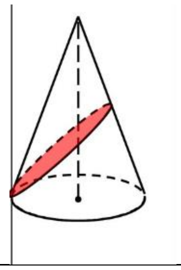
б) осевое сечение конуса;

в) сечение конуса плоскостью, параллельной основанию;

г) сечение конуса плоскостью, не параллельной основанию.

Какая фигура получается в каждом случае?

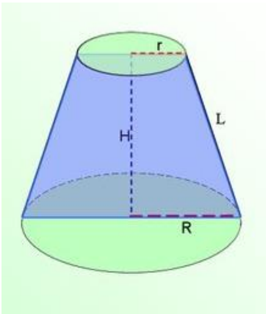
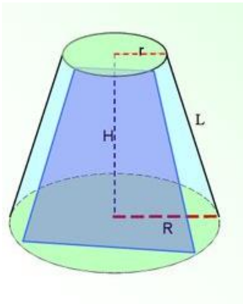
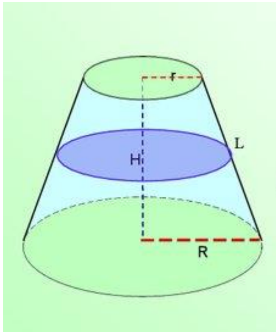
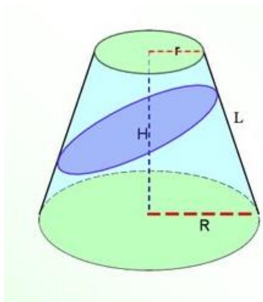
Ответ:

а)	*б)*	*в)*	*г)*
			
треугольник	*треугольник*	*круг*	*эллипс*

№3

Изобразите

а) сечение усеченного конуса плоскостью, проходящей через его ось;
б) сечение усеченного конуса плоскостью, проходящей через основания конуса, параллельно его оси;
в) сечение усеченного конуса плоскостью, перпендикулярной его оси;
г) сечение усеченного конуса плоскостью, проходящей под углом к его оси.
Какая фигура получается в каждом случае?
Ответ:

а)	*б)*	*в)*	*г)*
			
трапеция	*трапеция*	*круг*	*эллипс*

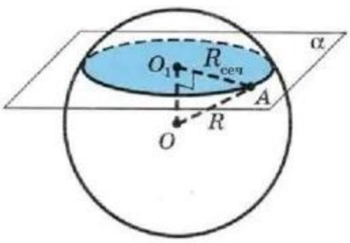
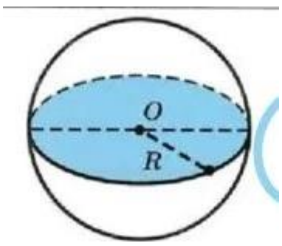
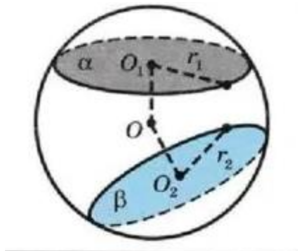
№4 Изобразите

а) сечение шара плоскостью, не проходящей через его центр;

б) сечение шара плоскостью, проходящей через его центр;

в) сечение шара двумя плоскостями, не проходящими через его центр.

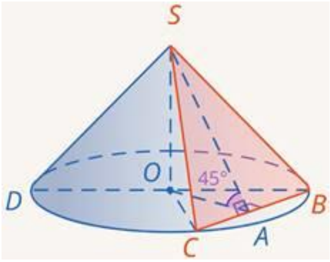
Какая фигура получается в каждом случае?
Ответ:

а)	*б)*	*в)*
		
круг	*круг*	*2 круга*

№5

Высота конуса равна 10. Сечение проходит через вершину конуса и хорду основания, стягивающей дугу в 60^0. Плоскость сечения наклонена к плоскости основания под углом 45^0. Найти площадь сечения.

Решение.



Т. к. плоскость сечения наклонена к основанию под углом 45^0, то $\angle AOS = 45^0$ (SA перпендикулярна BC, как высота равнобедренного треугольника, OA перпендикулярна BC, как высота равнобедренного треугольника OBC, а, значит, угол AOS – линейный угол двугранного угла между плоскостями). Тогда прямоугольный треугольник SOA является равнобедренным, значит:

OA=OS=10.

Т. к. дуга CB равна 60^0, то угол COB равен 60^0 (как центральный). Следовательно, треугольник COB не только равнобедренный, но и равносторонний. В равностороннем треугольнике COB мы знаем высоту. Найдем его сторону:

$CB=OB=\frac{OA}{Sin60}=\frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{20\sqrt{3}}{3}$

$SA=\frac{10}{Cos45}=\frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=10\sqrt{2}$

Найдем площадь сечения:

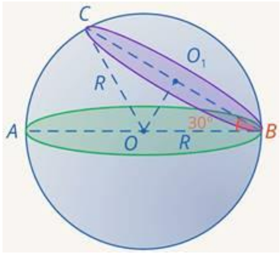
$S=\frac{1}{2}CB\cdot SA=\frac{1}{2}\cdot\frac{20\sqrt{3}}{3}\cdot 10\sqrt{2}=\frac{100\sqrt{6}}{3}$

Ответ: $\frac{100\sqrt{6}}{3}$

№6

Секущая плоскость проходит через конец диаметра сферы радиуса 2. Угол между секущей плоскостью и диаметром равен 30^0. Найти длину окружности сечения.

Решение:



В сечении сферы любой плоскостью получается окружность. Так что, наше сечение – окружность. Рассмотрим треугольник COB. Две его стороны равны радиусу сферы, т. е. он равнобедренный. Проведем высоту OO_1. Она является медианой.

Найдем O_1B:

$O_1B = r = R \cdot \text{Cos}\angle B = 2\ \text{Cos}\ 30^0 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Но O_1B – это радиус сечения. Найдем длину окружности сечения:

$C = 2\pi r = 2\sqrt{3}\pi$

Ответ: $2\sqrt{3}\pi$

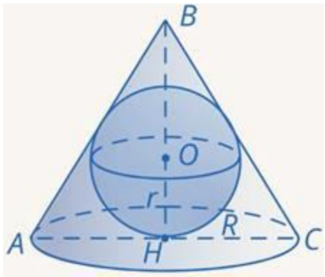
Задача с развернутым ответом

В конус, радиус основания которого равен R=3, вписан шар радиуса r=1,5:

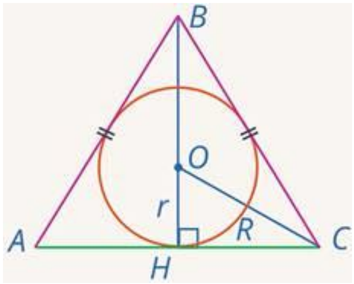
а) изобразить осевое сечение комбинации этих тел;

б) найти отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.

Решение.



а) Осевым сечением является равнобедренный треугольник, боковые стороны которого являются образующими конуса, а основанием — его диаметр, и вписанная в треугольник окружность, радиус которой равен радиусу шара



б) Теперь перейдем к площадям. Для площади сферы нам нужен только ее радиус, и он у нас есть. Для площади полной поверхности конуса необходимо знать радиус и длину образующей.

Найдем длину образующей ВС.

Найдем тангенс $\angle HCO$:

tg $\angle HCO = \frac{r}{R} = \frac{1.5}{3} = 0{,}5$

Чтобы найти ВС, необходимо найти тангенс $\angle HCB$. Но $\angle HCB$ в два раза больше $\angle HCO$, то есть:$\angle HCB = 2\ \angle HCO$

Воспользуемся формулой тангенса двойного угла:

tg $\angle HCO$ = tg $(2 \cdot \angle HCO) = \frac{2\text{tg } \angle HCO}{1-\text{tg}^2 \angle HCO} = \frac{2\cdot 0{,}5}{1-0{,}5^2} = \frac{4}{3}$

Найдем теперь образующую конуса. Для этого найдем высоту конуса:

ВН = R$\cdot$ tg$\angle HCB = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$

Тогда катеты треугольника ВНС равны 3 и 4, это египетский треугольник, гипотенуза ВС=5. Найдем теперь площади и их отношение:

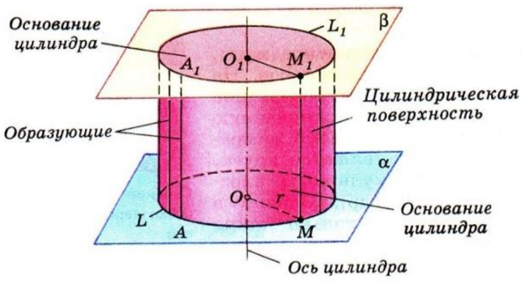
$S_{\text{конус}} = \pi R^2 + \pi R l = \pi(9+15) = 24\pi$

$S_{\text{сф}} = 4\pi r^2 = 9\pi \quad \frac{S\text{конус}}{S\text{сф}} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$ *Ответ*: $\frac{8}{3}$.

Занятие 18. Площадь поверхности цилиндра. Объём цилиндра

Шевцова Карина Анатольевна

Цилиндрическая поверхность – это поверхность, образованная прямыми, проходящими через все точки окружности, перпендикулярными плоскости, в которой лежит эта окружность.

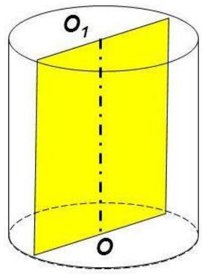


Осевое сечение – вариант сечения, при котором плоскость проходит через ось тела.

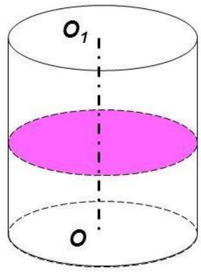
Развёртка боковой поверхности цилиндра – прямоугольник, одна сторона которого равна высоте цилиндра, а другая длине окружности основания.

Сечения цилиндра различными плоскостями

Если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то такое сечение называют осевым. Оно представляет собой прямоугольник, две стороны которого – образующие, а две другие – диаметры оснований цилиндра.



Если секущая плоскость перпендикулярна оси цилиндра, то сечение является кругом.



Основные формулы

Формула для вычисления площади боковой поверхности цилиндра: $S_{бок} = 2\pi Rl$

Площадь основания (площадь круга) $S = \pi R^2$

Площадью полной поверхности цилиндра: $S_{полн} = 2\pi R(R + l)$.

Формула для вычисления объёма цилиндра: $V = \pi R^2 h$.

Проверяем себя

Т1. Заполните пропуски:

а) Цилиндр – это ____________и двумя кругами.

Ответ: тело, ограниченное цилиндрической поверхностью

б) Длина образующей называется _________________

Ответ: высотой цилиндра.

в) Осевое сечение – это вариант сечения, при котором ________________

Ответ: плоскость проходит через ось тела.

Т2. Укажите верные утверждения:

а) формула площади боковой поверхности цилиндра $S = \pi R^2$;

б) формула площади полной поверхности цилиндра $S_{\text{полн}} = 2\pi R(R + l)$;

в) формула объёма цилиндра $V = \pi R^2 h$.

Ответ: б), в)

Т3. Укажите неверные утверждения:

а) если секущая плоскость параллельна оси цилиндра, то сечение является кругом;

б) если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то такое сечение называют осевым;

в) разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник.

Ответ: а)

Решаем задачи

№1

а) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 2π, а высота – 1. Найдите диаметр основания.

Ответ: 2

б) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 12π, а высота – 2. Найдите диаметр основания.

Ответ: 6

в) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 36π, а высота – 4. Найдите диаметр основания.

Ответ: 9

№2

а) Длина окружности основания цилиндра равна 3. Площадь боковой поверхности равна 6. Найдите высоту цилиндра.

Ответ: 2

б) Длина окружности основания цилиндра равна 14. Площадь боковой поверхности равна 182. Найдите высоту цилиндра.

Ответ: 13

в) Длина окружности основания цилиндра равна 1. Площадь боковой поверхности равна 2. Найдите высоту цилиндра.

Ответ: 2

№3

а) Площадь осевого сечения цилиндра равна 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π.

Ответ: 4

б) Площадь осевого сечения цилиндра равна 7. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π.

Ответ: 7

в) Площадь осевого сечения цилиндра равна 9. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π.

Ответ:9

№4

а) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 9π, а диаметр основания равен 3. Найдите высоту цилиндра.

Ответ: 3

б) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 2π, а диаметр основания равен 1. Найдите высоту цилиндра.

Ответ: 2

в) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 15π, а диаметр основания равен 5. Найдите высоту цилиндра.

Ответ:3

№5

а) Длина окружности основания цилиндра равна 3, высота равна 2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Ответ: 6

б) Длина окружности основания цилиндра равна 3, высота равна 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Ответ: 12

в) Длина окружности основания цилиндра равна 5, высота равна 2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Ответ: 10

№6

а) В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй сосуд, диаметр которого в 2 раза больше первого? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: 4

б) В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 8 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй сосуд, диаметр которого в 2 раза больше первого? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: 2

в) В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 128 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй сосуд, диаметр которого в 8 раза больше первого? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: 2

№7

а) В цилиндрический сосуд налили 2000 см^3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 12 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.

Ответ: 1500

б) В цилиндрический сосуд налили 6000 см^3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 12 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.

Ответ: 4500

в) В цилиндрический сосуд налили 1200 см^3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 12 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 10 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.

Ответ: 1000

№8

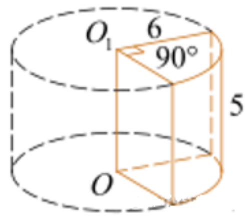
а) Объём первого цилиндра равен 30 м^3. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания – в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

Ответ: 22,5

б) Объём первого цилиндра равен 6 м^3. У второго цилиндра высота в два раза меньше, а радиус основания – в три раза больше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.
Ответ: 27
в) Объём первого цилиндра равен 12 м^3. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания – в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.
Ответ: 9

№9

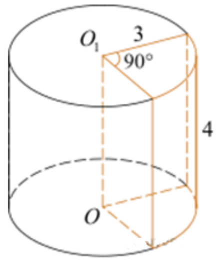
а) Найдите объём цилиндра, изображённого на рисунке.



В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

Ответ: 45

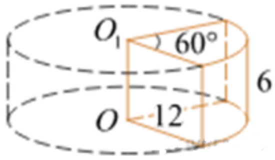
б) Найдите объём цилиндра, изображённого на рисунке.



В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

Ответ: 9

в) Найдите объём цилиндра, изображённого на рисунке.

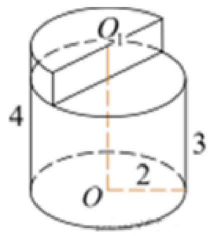


В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

Ответ: 144

№10

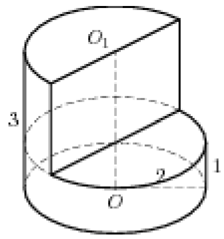
а) Найдите объём цилиндра, изображённого на рисунке.



В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

Ответ: 14

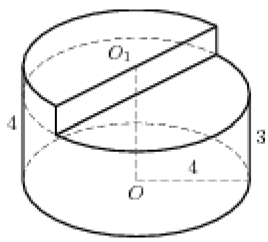
б) Найдите объём цилиндра, изображённого на рисунке.



В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

Ответ: 8

в) Найдите объём цилиндра, изображённого на рисунке.



В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

Ответ: 56

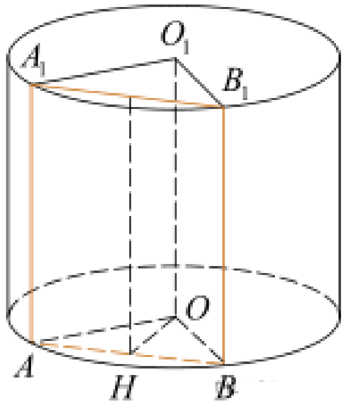
Задача с развернутым ответом

Высота цилиндра равна 5, а радиус основания 10.

а) Докажите, что площадь боковой поверхности цилиндра равна площади его основания.

б) Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра на расстоянии 6 от неё.

Решение:



а) Площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле

$S = 2\pi RH$, R – радиус основания, H – высота цилиндра. В данном случае

$H = \frac{R}{2}$, поэтому $2\pi RH = \pi R^2$, следовательно площадь боковой поверхности цилиндра равна площади его основания.

б) Сечение цилиндра плоскостью, проходящей параллельно его оси OO_1, — прямоугольник ABB_1A_1(O и AB — соответственно центр и хорда нижнего основания цилиндра), $AA_1 = 5$. Расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения равно высоте *OH* треугольника *OAB*. *OA*=*OB* = 10, *OH* = 6, откуда

$AB = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 16.$

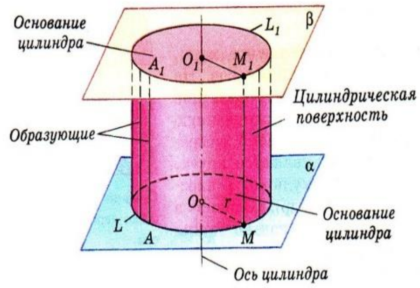
Площадь прямоугольника ABB_1A_1:

$S = AA_1 \cdot AB = 80.$

Ответ: б) 80.

Занятие 19. Площадь поверхности цилиндра. Объём цилиндра.

Шевцова Карина Анатольевна

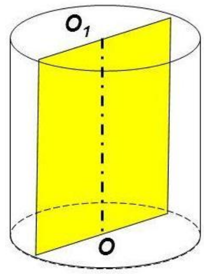


Цилиндрическая поверхность – это поверхность, образованная прямыми, проходящими через все точки окружности, перпендикулярными плоскости, в которой лежит эта окружность.

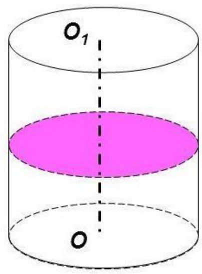
Осевое сечение – вариант сечения, при котором плоскость проходит через ось тела.

Развёртка боковой поверхности цилиндра – прямоугольник, одна сторона которого равна высоте цилиндра, а другая длине окружности основания.

Сечения цилиндра различными плоскостями



Если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то такое сечение называют осевым. Оно представляет собой прямоугольник, две стороны которого – образующие, а две другие – диаметры оснований цилиндра.



Если секущая плоскость перпендикулярна оси цилиндра, то сечение является кругом.

Основные формулы

Формула для вычисления площади боковой поверхности цилиндра:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rl$$

Площадь основания (площадь круга) $S = \pi R^2$

Площадью полной поверхности цилиндра: $S_{\text{полн}} = 2\pi R(R + l)$.

Формула для вычисления объёма цилиндра: $V = \pi R^2 h$.

Проверяем себя

Т1. Заполните пропуски:

а) Площадью полной поверхности цилиндра называется _______________

Ответ: сумма площадей боковой поверхности и двух оснований.

б) площадь боковой поверхности равна ______________________________

Ответ: произведению длины окружности основания цилиндра на его высоту.

в) Развёртка боковой поверхности цилиндра – __________, одна сторона которого равна высоте цилиндра, а другая длине окружности основания.

Ответ: прямоугольник.

Т2. Укажите верные утверждения:

а) формула площади боковой поверхности цилиндра $S = 2\pi Rl$;

б) формула площади полной поверхности цилиндра $S_{\text{полн}} = 2\pi R(R + l)$;

в) формула объёма цилиндра $V = \pi R^2 h$.

Ответ: а), б)

Т3. Укажите неверные утверждения:

а) площадью полной поверхности цилиндра называется сумма площадей боковой поверхности и двух оснований;

б) если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то такое сечение называют диагональным;

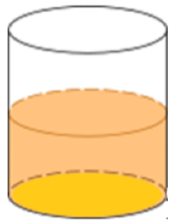
в) разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник.

Ответ: б)

Решаем задачи

№1

а) В цилиндрический сосуд, в котором находится 4 литра воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 2,2 раза. Чему равен объем детали? Ответ выразите в литрах.



Ответ: 4,8

б) В цилиндрический сосуд, в котором находится 4 литра воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,4 раза. Чему равен объем детали? Ответ выразите в литрах.

Ответ: 1,6

в) В цилиндрический сосуд, в котором находится 6 литров воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза. Чему равен объем детали? Ответ выразите в литрах.

Ответ: 3

№2

а) Объём первого цилиндра равен 74 м^3. У второго цилиндра высота в 3 раза больше, а радиус основания в 2 раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

Ответ: 27,75

б) Объём первого цилиндра равен 80 м^3. У второго цилиндра высота в 3 раза больше, а радиус основания в 4 раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

Ответ: 15

в) Объём первого цилиндра равен 38 м^3. У второго цилиндра высота в 3 раза больше, а радиус основания в 2 раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

Ответ: 28,5

№3

а) В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 24 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй сосуд, диаметр которого в 2 раза больше первого? Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: 6

б) В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 48 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй сосуд, диаметр которого в 4 раза больше первого? Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: 3

в) В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 175 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй сосуд, диаметр которого в 5 раза больше первого? Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ:7

№4

а) В цилиндрический сосуд налили 4000 см^3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 18 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см. Чему равен объём детали? Выразите ответ в см^3.

Ответ: 2000

б) В цилиндрический сосуд налили 5000 см^3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 15 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 3 см. Чему равен объём детали? Выразите ответ в см^3.

Ответ: 1000

в) В цилиндрический сосуд налили 3000 см^3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 22 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 11 см. Чему равен объём детали? Выразите ответ в см^3.

Ответ:1500

№5

а) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 80π, а его объём равен 320 π. Найти его высоту.

Ответ: 5

б) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 130π, а его объём равен 325 π. Найти его высоту.

Ответ: 13

в) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 200π, а его объём равен 425 π. Найти его высоту.

Ответ: 4,25

№6

а) Объем цилиндра равен 27π. Найдите диаметр основания цилиндра, если площадь полной его поверхности в два раза больше площади боковой поверхности.

Ответ: 6

б) Объем цилиндра равен 64π. Найдите диаметр основания цилиндра, если площадь полной его поверхности в два раза больше площади боковой поверхности.

Ответ: 8

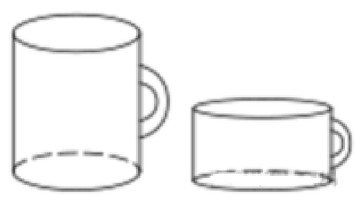
в) Объем цилиндра равен 125π. Найдите диаметр основания цилиндра, если площадь полной его поверхности в два раза больше площади боковой поверхности.

Ответ: 10

№7

а) Первая цилиндрическая кружка в 4,5 раз шире второй, а вторая в 6

раз выше первой. Найдите отношение объёма первой кружки к объёму второй.



Ответ: 3,375

б) Первая цилиндрическая кружка в 8 раз выше второй, а вторая в 5

раз шире первой. Найдите отношение объёма первой кружки к объёму второй.

Ответ: 0,32

в) Первая цилиндрическая кружка в 8 раз шире второй, а вторая в 2,5 раза выше первой. Найдите отношение объёма первой кружки к объёму второй.

Ответ: 25,6

№8

а) В цилиндрический сосуд налили 1000 см3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 500 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в 1,688 раза. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см3.

Ответ: 688

б) В цилиндрический сосуд налили 1500 см3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 10 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в $\frac{13}{10}$ раза. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см3.

Ответ: 45

в) В цилиндрический сосуд налили 3900 см3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 26 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в $1\frac{1}{2}$ раза. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см3.

Ответ: 1950

№9

а) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 1634π, радиус основания равен 19. Найдите высоту цилиндра.

Ответ: 38

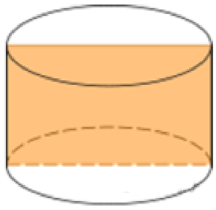
б) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 960π, высота равна16. Найдите диаметр основания цилиндра.

Ответ: 30

в) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 680π, радиус основания равен 34. Найдите высоту цилиндра.

Ответ: 10

№10



а) Радиус основания цилиндра равен 2м, высота 3м. Найти диагональ осевого сечения.

Ответ: 5

б) Радиус основания цилиндра равен 4м, высота 6 м. Найти диагональ осевого сечения.

Ответ: 10

в) Радиус основания цилиндра равен 5м, диагональ осевого сечения 12 м. Найти высоту цилиндра.

Ответ: 11

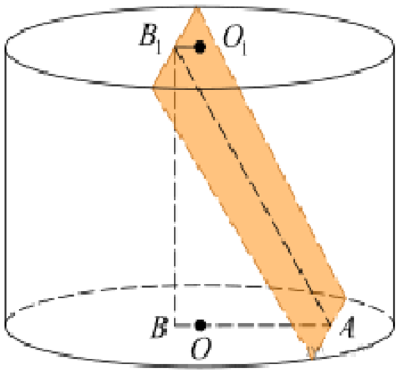
Задача с развернутым ответом

Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно $\sqrt{730}$.

а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от этой плоскости.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

Решение:



а) В окружности радиуса R расстояние от центра до хорды, то есть до середины хорды, длиной $2a$ равно $\sqrt{R^2 - a^2}$. Поэтому расстояния от центров оснований до хорд равны 5 и 12.

Пусть A и B_1 – середины хорд, B – проекция B_1 на другое основание цилиндра. Тогда $AB = 12 \mp 5, AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{21^2 + (12 \mp 5)^2} = \sqrt{730}$, поэтому следует выбирать знак +, что как раз и означает, что хорды лежат по разные стороны от центров оснований, поэтому центры лежат по разные стороны от плоскости.

б) Указанные две плоскости пересекаются по хорде, содержащей точку A, при этом AB перпендикулярна этой хорде, следовательно, и AB_1 тоже. Поэтому $\alpha = < BAB_1 = arctg\,\frac{BB_1}{AB} = arctg\,\frac{21}{17}$.

Ответ: б) $arctg\,\frac{21}{17}$.

Занятие 20. Объёмы тел. Конус

Пшеничная Любовь Александровна

Объём – это количественная характеристика пространства, занимаемого телом или веществом. Объём тела определяется его формой и линейными размерами.

V – это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

● Равные тела имеют равные объёмы.

● Если тело составлено из нескольких тел, то его объём равен сумме объёмов этих тел.

● В качестве единицы измерения объёма обычно берут куб, ребро которого равно единице измерения отрезков

●Отношение объёмов подобных тел равно кубу коэффициента подобия.

●Объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Проверяем себя

Т1. Заполните пропуски:

а) Отношение объёмов подобных тел равно______________________

Ответ: Отношение объёмов подобных тел равно кубу коэффициента подобия.

б) Если тело составлено из нескольких тел, то его объём равен ______________________

Ответ. Если тело составлено из нескольких тел, то его объём равен сумме объёмов этих тел.

Т2. Укажите верные утверждения:

а) Любые два конуса подобны.

б) Сечением конуса плоскостью, параллельной оси конуса является круг.

в) Если объёмы двух тел равны, то и сами тела равны.

г) Объём конуса равен произведению третьей части площади основания на высоту.

Ответ: в)

Т3. Вычислить:

Конус получен вращением прямоугольного треугольника с катетами 5 см и 12 см вокруг большего катета.

а) Образующая конуса равна ____ см.

б) Площадь основания конуса равна ____ $см^2$.

в) Объём конуса равен _____ $см^3$.

Ответ: а)13см; б)25π $см^2$; в)100π$см^3$

Решаем задачи

№1

а) Высота конуса равна 20, образующая равна 22. Найдите его объем, деленный на π.

Ответ: 560

б) Высота конуса равна 20, образующая равна 25. Найдите его объем, деленный на π.

Ответ: 1500

в) Высота конуса равна 15, образующая равна 18. Найдите его объем, деленный на π.

Ответ: 495

№2

а) Диаметр основания конуса равен 30, а угол при вершине осевого сечения равен 90°. Вычислите объем конуса, деленный на π.

Ответ: 1125

б) Диаметр основания конуса равен 36, а угол при вершине осевого сечения равен 90°·Вычислите объем конуса, деленный на π.

Ответ:1944

в) Диаметр основания конуса равен 12, а угол при вершине осевого сечения равен 90°·Вычислите объем конуса, деленный на π.

Ответ: 72

№3

а) Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 20 раз, а радиус основания останется прежним?

Ответ: 20

б) Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 22 раза, а радиус основания останется прежним?

Ответ: 22

в) Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 12 раз, а радиус основания останется прежним?

Ответ: 12

№4

а) Во сколько раз увеличится объём конуса, если радиус его основания увеличится в 4 раза, а высота останется прежней?

Ответ:16

б) Во сколько раз увеличится объём конуса, если радиус его основания увеличится в 3 раза, а высота останется прежней?

Ответ:9

в) Во сколько раз увеличится объем конуса, если радиус его основания увеличится в 14 раз, а высота останется прежней?

Ответ:196.

№5

а) Конус получается при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника *ABC* вокруг катета, равного 30. Найдите его объем, деленный на π.

Ответ:9000

б) Конус получается при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника *ABC* вокруг катета, равного 21. Найдите его объем, деленный на π.

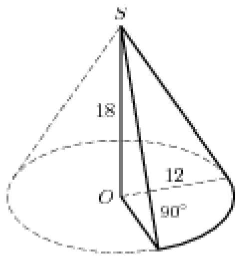
Ответ:3087

в) Конус получается при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника *ABC* вокруг катета, равного 60. Найдите его объем, деленный на π.

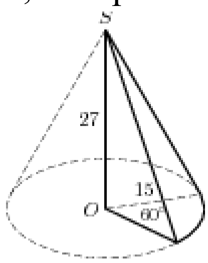
Ответ:72000

№6

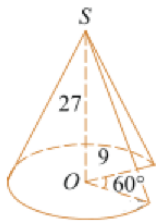
Найдите объем *V* части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π.



а)



б)

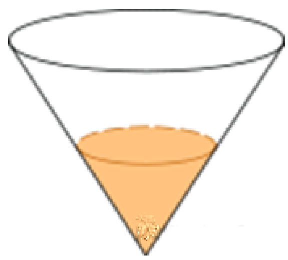


в)

Ответ: а)216 б) 337,5 в)607,5

№7

а) В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 14 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы наполнить сосуд доверху?



Ответ: 364

б) В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{2}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 152 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы наполнить сосуд доверху?

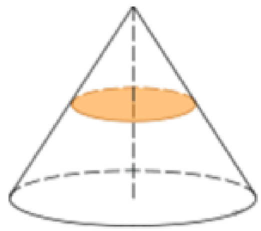
Ответ: 361

в) В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{4}$высоты. Объём жидкости равен 4 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы наполнить сосуд доверху?

Ответ: 252

№8

а) Объем конуса равен 120. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.



Ответ:15

б) Объем конуса равен 112. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

Ответ:14

в) Объем конуса равен 24. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

Ответ:3.

№9

а) Найдите объем V конуса, образующая которого равна 7 и наклонена к плоскости основания под углом 30°. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

Ответ:42,875

б) Найдите объем V конуса, образующая которого равна 10 и наклонена к плоскости основания под углом 30°. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

Ответ:125

в) Найдите объем V конуса, образующая которого равна 13 и наклонена к плоскости основания под углом 30°. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

Ответ: 274,625

Задача с развернутым ответом

Точки А, В и С лежат на окружности основания конуса и делят её в отношении 1 : 2 : 3.

а) Докажите, что треугольник АВС прямоугольный.

б) Найдите объём конуса, если меньшая сторона треугольника АВС равна 10, а расстояние от центра его основания до образующей равно 5.

Решение.

а) Градусная мера дуги окружности равна 360^0. Пусть градусные меры дуг равны : $\overset{\frown}{AC} = x$, $\overset{\frown}{CB} = 2x$, $\overset{\frown}{AB} = 3x$

Тогда $x + 2x + 3x = 360$

$6x = 360$

$x = 60$

$\overset{\frown}{AC} = 60^0$, $\overset{\frown}{CB} = 120^0$, $\overset{\frown}{AB} = 180^0$.

Угол АСВ вписанный, значит он равен половине дуги АВ: $< ACB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = 90$.

В Δ АВС один из углов прямой, значит этот треугольник прямоугольный, что и требовалось доказать.

б) ΔABC – прямоугольный, доказано выше. Углы A и B треугольника ABC равны соответственно 30^0 и 60^0 так как являются вписанными в окружность. В треугольнике против меньшего угла лежит меньшая сторона, значит АС =10. По свойству прямоугольного треугольника с углом 30^0 $AB = 2\cdot AC = 20$, но АВ является диаметром конуса, а ОА = ОВ = 10 его радиусы. Так как образующие конуса равны ΔSAB – равнобедренный и SO – его высота и высота конуса.

Проведём перпендикуляр из точки О на образующую конуса SB. В треугольнике ОМВ катет ОМ = 5, а гипотенуза ОВ = 10, значит угол ОВМ равен 30^0. Из треугольника SBO $tg\, B = \frac{SO}{OB}$, $SO = OB \cdot tgB, SO = \frac{10}{\sqrt{3}}$.

Объём конуса находится по формуле $S = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h$.

$$S = \frac{1}{3}\pi 10^2 \cdot \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$S = \frac{1000\pi}{3\sqrt{3}}$$

Ответ: $\frac{1000\pi}{3\sqrt{3}}$

Занятие 21. Объёмы тел. Конус

Пшеничная Любовь Александровна

Объём – это количественная характеристика пространства, занимаемого телом или веществом. Объём тела определяется его формой и линейными размерами.

V – это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

● Равные тела имеют равные объёмы.

● Если тело составлено из нескольких тел, то его объём равен сумме объёмов этих тел.

● В качестве единицы измерения объёма обычно берут куб, ребро которого равно единице измерения отрезков

●Отношение объёмов подобных тел равно кубу коэффициента подобия.

●Объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Проверяем себя

Т1. Заполните пропуски:

а) Объём конуса равен произведению___________________________________.

Ответ: Объём конуса равен произведению третьей части площади основания на высоту.

б) Сечением конуса плоскостью, перпендикулярной его оси является____________

Ответ: *круг.*

Т2. Укажите верные утверждения:

а) Отношение объёмов подобных тел равно квадрату коэффициента подобия.

б) Секущая плоскость, параллельная основанию конуса, отсекает конус, подобный исходному.

в) Объём конуса равен произведению третьей части площади основания на высоту.

Ответ: б) в)

Т3. Конус получен вращением прямоугольного треугольника с катетами 6 см и 8 см вокруг меньшего катета.

а) Образующая конуса равна ____ см.

б) Площадь основания конуса равна ____ $см^2$.

в) Объём конуса равен _____ $см^3$.

Ответ: а) 10 см; б) 64π *$см^2$; в)128*π*$см^3$*

Решаем задачи

№ 1. а) Высота конуса равна диаметру его основания. Найдите объём конуса, если его образующая равна $3\sqrt{5}$. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.
Ответ: 18
б) Высота конуса равна диаметру его основания. Найдите объём конуса, если его образующая равна $6\sqrt{5}$. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.
Ответ: 144
в) Высота конуса равна диаметру его основания. Найдите объём конуса, если его образующая равна $12\sqrt{5}$. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.
Ответ: 1152

№ 2. а) Объём конуса равен 96π, а его высота равна 8. Найдите радиус основания конуса.
Ответ: 6
б) Объём конуса равен 50π, а его высота равна 6. Найдите радиус основания конуса.
Ответ: 5
в) Объём конуса равен 21π, а его высота равна 7. Найдите радиус основания конуса.
Ответ: 3

№ 3. а) Высота конуса равна 7 см. На расстоянии 3см от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объём исходного конуса, если объём меньшего конуса, отсекаемого от исходного, равен 54 см^3.
Ответ: 686
б) Высота конуса равна 8 см. На расстоянии 5см от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объём исходного конуса, если объём меньшего конуса, отсекаемого от исходного, равен 25 см^3.
Ответ: 102,4
в) Высота конуса равна 9 см. На расстоянии 4см от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объём исходного конуса, если объём меньшего конуса, отсекаемого от исходного, равен 32 см^3.
Ответ: 364,5

№ 4. а) Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна 36 м^2. Найдите объём конуса. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.
Ответ: 72

б) Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна 81 м^2. Найдите объём конуса. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

Ответ:243

в) Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна 144 м^2. Найдите объём конуса. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

Ответ: 576

№ 5. а) Длина образующей конуса равна 25, а длина окружности основания 14π. Найти объём конуса.

Ответ: 392

б) Длина образующей конуса равна 13, а длина окружности основания 10π. Найти объём конуса.

Ответ:100

в) Длина образующей конуса равна 17, а длина окружности основания 16π. Найти объём конуса.

Ответ:320

№ 6. а) Куча щебня имеет коническую форму, радиус основания которой 2 м, а образующая 2,5 м. Сколько нужно сделать рейсов, чтобы перевести щебень, уложенный в эту кучу, если 1м^3 щебня весит 3т, за один рейс можно увезти 1,5 т. $(\pi \approx 3)$

Ответ: 12

б) Куча щебня имеет коническую форму, радиус основания которой 2 м, а образующая 2,5 м. Сколько нужно сделать рейсов, чтобы перевести щебень, уложенный в эту кучу, если 1м^3 щебня весит 3т, за один рейс можно увезти 0,5 т. $(\pi \approx 3)$

Ответ: 20

в) Куча щебня имеет коническую форму, радиус основания которой 1,5 м, а образующая 2,5 м. Сколько нужно сделать рейсов, чтобы перевести щебень, уложенный в эту кучу, если 1м^3 щебня весит 3т, за один рейс можно увезти 1,5 т. $(\pi \approx 3)$

Ответ: 9

Задача с развернутым ответом

Точки A, B и C лежат на окружности основания конуса, так что дуги AB, BC и CA равны. Образующая конуса равна 8. Точки M и N середины отрезков AB и SC соответственно, MN = 5.
а) Докажите, что проекции отрезков SA и MN на плоскость основания конуса равны.
б) Найдите объём конуса.

Решение.

а) Равные дуги стягивают равные между собой хорды, значит AB = BC = CA, то есть треугольник ABC это равносторонний треугольник, вписанный в окружность. Пусть SO – это высота конуса, точка O – это точка пересечения медиан ΔABC. SO⊥(ABC), значит отрезок AO – это проекция SA на плоскость основания конуса. В плоскости (SOC) проведём NH ⊥ CO. Точки M, O и H лежат на одной прямой, значит MH – это проекция MN на плоскость основания конуса. Нужно доказать, что AO = MH.

SO ⊥ MC и NH ⊥ MC, значит SO ∥ NH и N – середина SC по условию задачи, значит NH – средняя линия Δ SOC, то есть OH = HC. По свойству медиан треугольника MO = OH = HC. AO = OC как радиусы окружности, но
OC = OH + HC = OH + OM = MH. Получили AO = MH, что и требовалось доказать.

б) SA = 8, MN = 5.

Объём конуса находится по формуле $V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, значит нужно найти длины отрезков SO и AO.

Пусть MH = h, а SO = 2h. Из ΔSOA по теореме Пифагора $AO^2 = 64 - 4h^2$, а из Δ MNH $MH^2 = 25 - h^2$. В пункте а) было доказано, что AO = MH, значит

$$64 - 4h^2 = 25 - h^2$$

$$h^2 = 13$$

$$h = \sqrt{13}$$

$$MH = \sqrt{13}, \quad SO = 2\sqrt{13}, \ AO^2 = 64 - 4 \cdot 13 = 12.$$

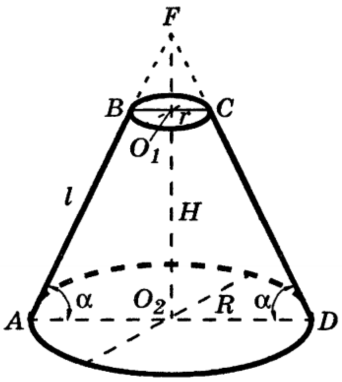
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12 \cdot 2\sqrt{13} = 8\pi\sqrt{13}$$

Ответ: $8\pi\sqrt{13}$

Занятие 22. Усеченный конус

Власова Александра Анатольевна

Усеченным конусом называется часть конуса, заключенная между основанием и параллельным основанию сечением конуса.

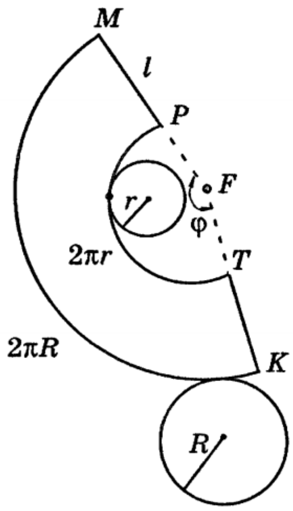


Круги с центрами O_1 и O_2 – *верхнее и нижнее основания усеченного конуса*,

r и R – радиусы оснований, отрезок $AB = l$ – *образующая*, a – угол наклона образующей к плоскости нижнего основания, отрезок O_1O_2 – *высота* (расстояние между плоскостями оснований), трапеция ABCD – *осевое сечение*.

$H = l \sin a$

$H^2 + (R - r)^2 = l^2$



$\angle MFK = \frac{2\pi(R - r)}{l} = \varphi$

φ — угол развертки

Развертка усеченного конуса – часть кругового кольца и два круга.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса

$S_{бок} = \pi l(r + R)$

Площадь полной поверхности усеченного конуса

$S_{полн} = S_1 + S_2 + S_{бок} = \pi l(r + R) + \pi R^2 + \pi r^2$

Объем усеченного конуса

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi H(R^2 + rR + r^2)$

Проверяем себя

Т1. Заполните пропуски:

а) Усеченным конусом называется часть конуса, заключенная ____.

Ответ: между основанием и параллельным основанию сечением.

б) Развертка усеченного конуса – часть ____________________ и _______________.

Ответ: кругового кольца, два круга.

Т2. Укажите верное утверждение:

а) Отрезок, концы которого лежат на окружностях оснований, называется высотой усеченного конуса;

б) Осевое сечение усеченного конуса – равнобедренная трапеция;

в) Сечение усеченного конуса, перпендикулярное высоте, - квадрат.

Ответ: б).

Т3. Укажите неверное утверждение:

а) Отрезок, соединяющий центры оснований, называется высотой усеченного конуса;

б) Все образующие усеченного конуса равны;

в) Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг её большего основания.

Ответ: в).

Решаем задачи

№1 а) Площади оснований усеченного конуса равны 9 и 25, его высота равна 6. Найдите объем усеченного конуса.

Ответ:98

б) Площади оснований усеченного конуса равны 4 и 16, его высота равна 9. Найдите объем усеченного конуса.

Ответ:84

в) Площади оснований усеченного конуса равны 36 и 49, его высота равна 3. Найдите объем усеченного конуса.

Ответ:127

№2

а) Диаметры оснований усеченного конуса равны $\frac{8}{\sqrt{\pi}}$ и $\frac{10}{\sqrt{\pi}}$, его высота

равна 3. Найдите объем усеченного конуса.

Ответ: 61

б) Диаметры оснований усеченного конуса равны $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ и $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$, его высота

равна 6. Найдите объем усеченного конуса.

Ответ: 14

в) Диаметры оснований усеченного конуса равны $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$ и $\frac{8}{\sqrt{\pi}}$, его высота

равна 9. Найдите объем усеченного конуса.

Ответ: 111

№3

а) Осевое сечение усеченного конуса – трапеция с основаниями 2 и 10 и боковой стороной 5. Найдите объем усеченного конуса, деленный на π.

Ответ: 31

б) Осевое сечение усеченного конуса – трапеция с основаниями 4 и 20 и боковой стороной 10. Найдите объем усеченного конуса, деленный на π.

Ответ: 248

в) Осевое сечение усеченного конуса – трапеция с основаниями 6 и 30 и боковой стороной 15. Найдите объем усеченного конуса, деленный на π.

Ответ: 837

№4

а) Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 и 5, объем конуса - 98π. Найдите высоту конуса.

Ответ: 6

б) Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 и 6, объем конуса - 52π. Найдите высоту конуса.

Ответ: 3

в) Радиусы оснований усеченного конуса равны 4 и 7, объем конуса - 279π. Найдите высоту конуса.

Ответ: 9

№5

а) Радиус основания конуса равен 4, высота равна 6. Через середину высоты параллельно основанию провели сечение. Найдите объем полученного усеченного конуса, деленный на π.

Ответ: 28

б) Радиус основания конуса равен 2, высота равна 12. Через середину высоты параллельно основанию провели сечение. Найдите объем полученного усеченного конуса, деленный на π.

Ответ: 14

в) Радиус основания конуса равен 6, высота равна 18. Через середину высоты параллельно основанию провели сечение. Найдите объем полученного усеченного конуса, деленный на π.

Ответ: 189

№6 а) Плоскость, параллельная основанию конуса, отсекает от него конус, высота которого равна 6 и объем в 64 раза меньше объема данного конуса. Найдите высоту усеченного конуса.

Ответ: 18

б) Плоскость, параллельная основанию конуса, отсекает от него конус, высота которого равна 4 и объем в 8 раз меньше объема данного конуса. Найдите высоту усеченного конуса.

Ответ: 4

в) Плоскость, параллельная основанию конуса, отсекает от него конус, высота которого равна 5 и объем в 27 раз меньше объема данного конуса. Найдите высоту усеченного конуса.

Ответ: 10

№7

а) Суммы радиусов оснований усеченного конуса равна $5\sqrt{3}$, образующая равна 6 и составляет с плоскостью основания угол 30º. Найдите объем усеченного конуса, деленный на π.

Ответ: 63

б) Суммы радиусов оснований усеченного конуса равна $10\sqrt{3}$, образующая равна 12 и составляет с плоскостью основания угол 30º. Найдите объем усеченного конуса, деленный на π.

Ответ: 504

в) Суммы радиусов оснований усеченного конуса равна $11\sqrt{3}$, образующая равна 18 и составляет с плоскостью основания угол 30º. Найдите объем усеченного конуса, деленный на π.

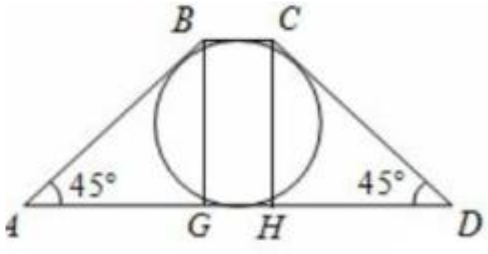
Ответ: 1287

Задача с развернутым ответом

В усеченный конус, образующая которого наклонена под углом 45 градусов к нижнему основанию, вписан шар. Найти отношение величины боковой поверхности усеченного конуса к величине поверхности шара.

Решение:

$\angle$ Рассмотрим осевое сечение. В нем получится трапеция $ABCD$, $\angle A = \angle D = 45^\circ$, в которую вписана окружность. Проведем высоты BG и CH из точек B и C. Тогда $AG = BG = CH = HD$, $AB = CD = \sqrt{2}BG$; кроме того:

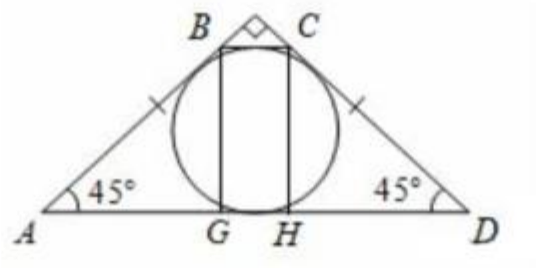


$2AB = AB + CD = AD + BC = AG + GH + HD + BC = 2AG + 2BC$, поэтому

$BC = AB - AG = \left(\sqrt{2} - 1\right)AG,\ AD = BC + 2AG = \left(\sqrt{2} + 1\right)AG$

Радиус окружности (радиус сферы) равен $\frac{AG}{2}$. Тогда площадь сферы составляет πAG^2.

Достроим усеченный конус до конуса. Трапеция при этом достроится до треугольника, он будет прямоугольный и равнобедренный, поэтому его катеты составят $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}AG$. Это образующая



конуса. Из неё $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}AG - \sqrt{2}AG = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}AG$ - добавленный кусок.

Поэтому площадь поверхности усеченного конуса будет равна:

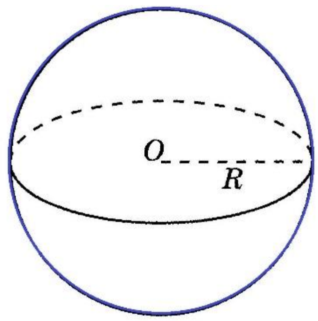
$\frac{\pi\left(\sqrt{2}+1\right)^2 - \pi\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2\sqrt{2}}AG^2 = 2\pi AG^2$ Поэтому искомое отношение равно 2

Ответ 2.

Занятие 23. Шар

Решетилова Татьяна Васильевна

Шаром называется геометрическое тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не больше заданного от одной данной точки.



Эта точка называется *центром* шара.

Поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки называется *сферой.*

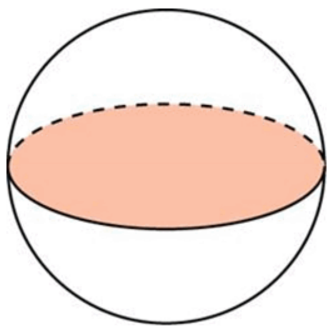
Радиус шара (R) – расстояние от центра шара до любой точки сферы.

Диаметр шара (и диаметр сферы) – отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр.

Очевидно, диаметр сферы равен 2R

Сечение шара плоскостью есть круг

Если секущая плоскость проходит через центр шара и в сечении получается круг, радиус которого равен радиусу шара R, то такой круг называется *большим кругом шара.*



Площадь сферы $S = 4\pi R^2$

Формула *объема шара* $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Проверяем себя

Т1. Заполните пропуски:

а) Сфера это _______________ шара

Ответ: поверхность

б) Сечение шара, проходящее через _______, называется большим кругом шара.

Ответ: центр

в) Продолжите определение: отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр называется _________________.

Ответ: диаметром шара

Т2. Укажите верные утверждения:

а) Радиус шара – отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр.

б) Сечение шара плоскостью есть круг

в) 2 радиуса шара составляют его диаметр

Ответ: б)

Т3. Укажите неверные утверждения:

а) если сечение шара является кругом, значит оно проходит через центр шара

б) Шаром называется геометрическое тело, состоящее из всех точек пространства, равноудаленных от одной данной точки

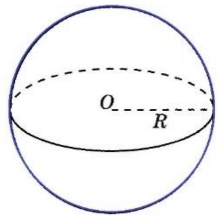
в) Радиус большого круга шара равен радиусу шара

Ответ: а), б)

Решаем задачи

№1

а) Радиус шара равен 6. Найдите его объем, деленный на π



Ответ: 288

б) Радиус шара равен 3. Найдите его объем, деленный на π

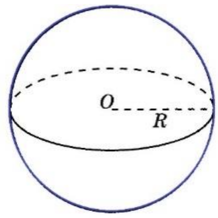
Ответ: 36

в) Радиус шара равен 1,5. Найдите его объем, деленный на π

Ответ: 4,5

№2

а) Объем шара равен 36π. Найдите диаметр шара



Ответ: 6

б) Объем шара равен $\frac{4}{3}\pi$. Найдите диаметр шара

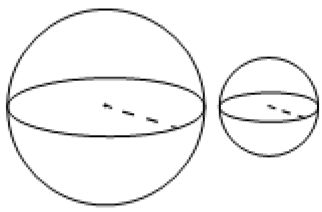
Ответ: 2

в) Объем шара равен 288π. Найдите диаметр шара

Ответ: 12

№3

а) Даны два шара с радиусами 4 и 1. Во сколько раз объём первого шара больше объёма второго?



Ответ: 64

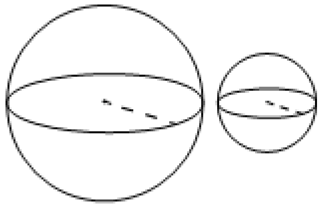
б) Даны два шара с радиусами 10 и 2. Во сколько раз объём первого шара больше объёма второго?

Ответ: 125

в) Даны два шара с радиусами 6 и 2. Во сколько раз объём первого шара больше объёма второго?

Ответ: 27

№4



а) Даны два шара. Радиус первого шара в 7 раз больше радиуса второго. Во сколько раз объём первого шара больше объёма второго?

Ответ: 343

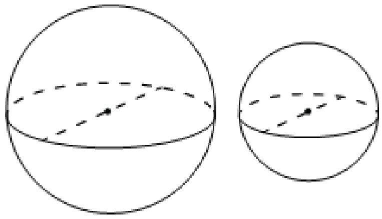
б) а) Даны два шара. Радиус первого шара в 10 раз больше радиуса второго. Во сколько раз объём первого шара больше объёма второго?

Ответ: 1000

в) а) Даны два шара. Радиус первого шара в 9 раз больше радиуса второго. Во сколько раз объём первого шара больше объёма второго?

Ответ: 729

№5



а) Однородный шар диаметром 3 см весит 162 грамма. Сколько граммов весит шар диаметром 2 см, изготовленный из того же материала? Ответ дайте в граммах

Ответ: 48

б) Однородный шар диаметром 3 см весит 81 грамм. Сколько граммов весит шар диаметром 2 см, изготовленный из того же материала? Ответ дайте в граммах
Ответ: 24
в) Однородный шар диаметром 3 см имеет массу 162 грамма. Чему равна масса шара, изготовленного из того же материала, с диаметром 2 см? Ответ дайте в граммах
Ответ: 48
№6

а) Площадь большого круга шара равна 36π. Найдите его объем, деленный на π
Ответ: 288
б) Площадь большого круга шара равна 2,25π. Найдите его объем, деленный на π

Ответ: 4,5

в) Площадь большого круга шара равна 1,44π. Найдите его объем, деленный на π

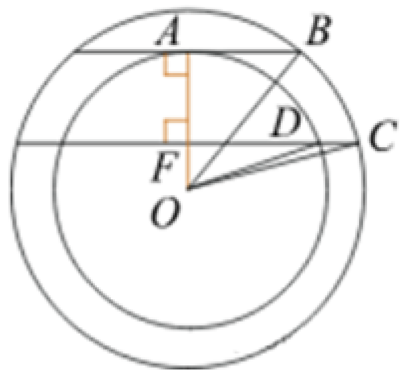
Ответ: 2,304

Задача с развернуты ответом

Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5.

а) Докажите, что сечение шара плоскостью есть круг.
б) Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.

Решение:
а) Докажем, что сечение шара плоскостью есть круг. По определению: Круг — это множество всех точек плоскости, удалённых от данной точки не более, чем на длину данного отрезка.
Пусть O – центр шара, R – его радиус, K – произвольная точка шара, принадлежащая плоскости α. Опустим перпендикуляр OH на секущую плоскость α. По теореме Пифагора: $OK^2=OH^2+KH^2$, откуда $KH^2=OK^2-OH^2$. То есть, длина отрезка $KH=\sqrt{OK^2-OH^2}$. Так как OK не больше радиуса шара, то $KH\leq\sqrt{R^2-OH^2}$. Следовательно, любая точка сечения шара плоскостью α находится на расстоянии, не большем, чем
$\sqrt{R^2-OH^2}$ от точки H. Следовательно, сечение шара плоскостью – круг
б) Пусть O – общий центр двух шаров, F – центр сечения шаров плоскостью α, A – точка касания и центр сечения большего шара плоскостью β, FD, FC, AB - радиусы сечений. Параллельные прямые AB и FC перпендикулярны прямой AF. Применим теорему Пифагора:



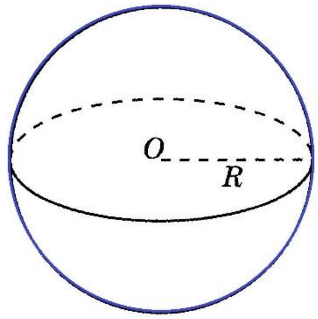
$FC^2=OC^2-OF^2$
$OF^2=OD^2-FD^2$
$OC=OB$, $OD=OA$, =>
$OC^2=OB^2=AB^2+OA^2$
$FC^2=AB^2+OA^2-(OA^2-FD^2)$
$FC^2=AB^2+FD^2$
$\pi\cdot AB^2=5$, => $AB^2=\frac{5}{\pi}$
$\pi\cdot FD^2=7$, => $FD^2=\frac{7}{\pi}$
$FC^2=\frac{5}{\pi}+\frac{7}{\pi}=\frac{12}{\pi}$
$S=\pi\cdot FC^2=\pi\cdot\ \frac{12}{\pi}\ =12$

Ответ: 12

Занятие 24. Шар

Решетилова Татьяна Васильевна

Шаром называется геометрическое тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не больше заданного от одной данной точки.



Эта точка называется *центром* шара.

Поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки называется *сферой.*

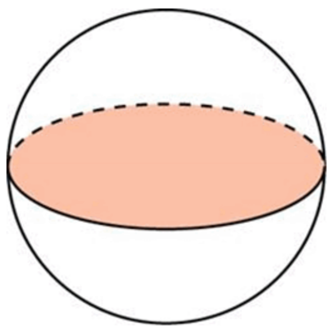
Радиус шара (R) – расстояние от центра шара до любой точки сферы.

Диаметр шара (и диаметр сферы) – отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр.

Очевидно, диаметр сферы равен 2R

Сечение шара плоскостью есть круг

Если секущая плоскость проходит через центр шара и в сечении получается круг, радиус которого равен радиусу шара R, то такой круг называется *большим кругом шара.*



Площадь сферы $S = 4\pi R^2$

Формула *объема шара* $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Т1. Заполните пропуски:

а) *Шаром* называется геометрическое тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на ____________________от одной данной точки.

Ответ: расстоянии, не больше заданного

б) Формула _____________ шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Ответ: объема

в) Если секущая плоскость проходит через центр шара и в сечении получается круг, радиус которого равен радиусу шара R, то такой круг называется ____________________________________

Ответ: большим кругом шара

Т2. Укажите верные утверждения:

а) Для любой точки шара расстояние от нее до центра шара равно радиусу

б) Расстояние между двумя точками сферы равно диаметру шара

в) Диаметр шара равен двум его радиусам

Ответ: в)

Т3. Укажите неверные утверждения:

а) Сфера – геометрическое тело

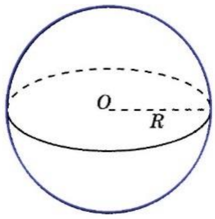
б) Зная радиус сферы, можно найти объем шара, ограниченного данной сферой

в) Чтобы найти площадь поверхности сферы, можно объем шара умножить на три

Ответ: а), в)

Решаем задачи

№1



а) Площадь сферы равна 9π. Найдите объем шара, ограниченного этой сферой. В ответ запишите результат, поделенный на π

Ответ: 4,5

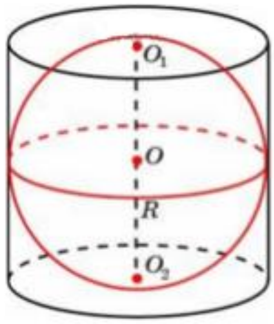
б) Площадь сферы равна 36π. Найдите объем шара, ограниченного этой сферой. В ответ запишите результат, поделенный на π

Ответ: 36

в) Площадь сферы равна 5,76π. Найдите объем шара, ограниченного этой сферой. В ответ запишите результат, поделенный на π

Ответ: 2,304

№2



а) Шар вписан в цилиндр объемом 150. Найдите объем шара

Ответ: 100

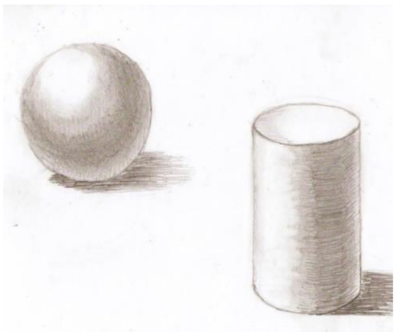
б) Шар вписан в цилиндр объемом 90. Найдите объем шара

Ответ: 60

в) Шар вписан в цилиндр объемом 240. Найдите объем шара

Ответ: 160

№3



а) Шар и цилиндр имеют равные объемы, а радиус шара равен радиусу основания цилиндра. Найдите высоту цилиндра, если радиус шара равен 6

Ответ: 8

б) Шар и цилиндр имеют равные объемы, а радиус шара равен радиусу основания цилиндра. Найдите высоту цилиндра, если радиус шара равен 15

Ответ: 20

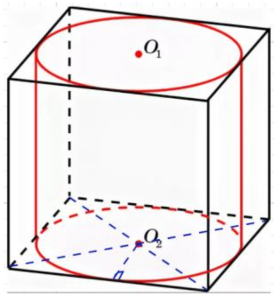
в) Шар и цилиндр имеют равные объемы, а радиус шара равен радиусу основания цилиндра. Найдите высоту цилиндра, если радиус шара равен 27.

Ответ: 36

№4

а) В цилиндрический сосуд с радиусом основания, равным 4 и наполненный жидкостью до определенного уровня помещают 3 стеклянных шарика, диаметром 2. На сколько изменится высота жидкости в сосуде?

Ответ: 0,25



б) В цилиндрический сосуд с радиусом основания, равным 20 и наполненный жидкостью до определенного уровня помещают 3 стеклянных шарика, диаметром 10. На сколько изменится высота жидкости в сосуде?

Ответ: 1,25

в) В цилиндрический сосуд с радиусом основания, равным 6 и наполненный жидкостью до определенного уровня помещают 3 стеклянных шарика, диаметром 6. На сколько изменится высота жидкости в сосуде?

Ответ: 3

Задача с развернутым ответом

Проведены две параллельные плоскости по одну сторону от центра сферы на расстоянии 3 друг от друга. Эти плоскости дают в сечении две окружности, длины которых равны 18π и 24π.

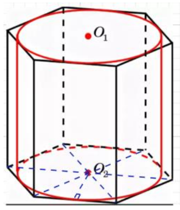
а) Точка H — ортогональная проекция произвольной точки меньшей окружности на плоскость большей. Докажите, что точка H делит проходящий через неё диаметр большей окружности в отношении 1 : 7.
б) Найдите объём шара, ограниченного данной сферой.
Решение:
а) Пусть A – произвольная точка меньшей окружности (AD – её диаметр), H – проекция точки A на плоскость большей окружности. BC – диаметр большей окружности, проходящий через точку H. Докажем, что BH:CH=1:7
Проведем перпендикуляр OK к отрезку AD. AD параллелен BC, а значит, OK - перпендикуляр к BC. M- точка пересечения OK и BC. По условию, длина меньшей окружности равна 18π.
$2\pi \cdot AK=18\pi$, => $AK=9$
Длина большей окружности равна 24π
$2\pi \cdot MB=24\pi$, => $MB=12$
AHMK – прямоугольник, => $MH=9$, тогда $BH=12-9=3$, а $CH=12+9=21$
$BH:CH=3:21=1:7$
б) Найдем объём шара, ограниченного данной сферой. $OA=OB=R$ (радиус шара)
По теореме Пифагора
$R^2=OM^2+MB^2$ и $R^2=(OM+3)^2+AK^2$
Следовательно: $OM^2+144=OM^2+6 \cdot OM+9+81$
$6 \cdot OM=144-90$
$6 \cdot OM=54$
$OM=9$
Тогда $R^2=9^2+12^2$
$R^2=81+144$
$R^2=225$
$R=15$
$V=\frac{4}{3}\pi R^3$
$V=\frac{4}{3}\pi\, 15^3$
$V=\frac{4}{3}\pi \cdot 3375$
$V=4500\pi$

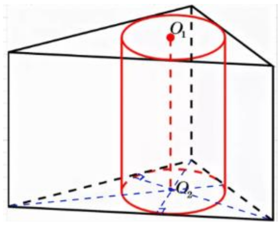
Ответ. 4500π

Занятие 25. Комбинация тел. Цилиндр, призма

Марич Ольга Ивановна

Цилиндр называется вписанным в призму, если его основания вписаны в основания цилиндра. При этом, призма называется описанной около цилиндра.





Свойства:

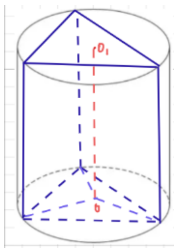
1. В призму можно вписать цилиндр тогда и только тогда, когда в ее основание можно вписать окружность.
2. Радиус основания цилиндра равен радиусу окружности, вписанной в основание призмы.

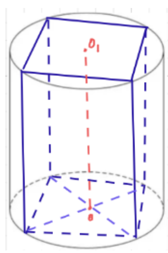
3, Высота цилиндра равна высоте призмы.

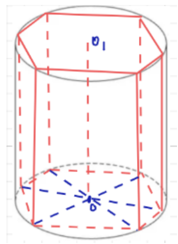
a - сторона, r – радиус вписанной окружности, h - высота, S - площадь, p – полупериметр.

Правильный треугольник	$\boldsymbol{r = \frac{a}{2\sqrt{3}}}$ или $\boldsymbol{r = \frac{1}{3}h}$
Прямоугольный треугольник	$\boldsymbol{r = \frac{a+b-c}{2}}$
Произвольный треугольник	$\boldsymbol{r = \frac{S}{p}}$
Квадрат	$\boldsymbol{r = \frac{a}{2}}$
Правильный шестиугольник	$\boldsymbol{r = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$

Цилиндр называется описанным около призмы, если его основания описаны около оснований цилиндра. При этом, призма называется вписанной в цилиндр.







Свойства:

1. Около призмы можно описать цилиндр, если около ее оснований можно описать окружности.

2. Радиус основания цилиндра равен радиусу окружности, описанной около основания призмы.

3. Высота цилиндра равна высоте призмы

a, b, c- стороны, R – радиус вписанной окружности, h - высота, S - площадь, d – диагональ.

Правильный треугольник	$\boldsymbol{R = \frac{a\sqrt{3}}{3}}$ или $\boldsymbol{R = \frac{2}{3}h}$
Прямоугольный треугольник	$\boldsymbol{R = \frac{1}{2}}$ гипотенузы
Произвольный треугольник	$\boldsymbol{R = \frac{abc}{4S}}$ или $\boldsymbol{R = \frac{a}{2sin\alpha}}$
Квадрат	$\boldsymbol{R = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$
Прямоугольник	$\boldsymbol{R = \frac{d}{2}}$
Правильный шестиугольник	$\boldsymbol{R = a}$

Проверяем себя

Т1. Заполните пропуски:

а) В правильном шестиугольнике радиус описанной окружности равен _____________________.

Ответ: его стороне

б) Если прямоугольный треугольник вписать в окружность, то его радиус равен ____________________ .

Ответ: половине гипотенузы.

в) Сторона квадрата ____________ радиуса, вписанной в него окружности.

Ответ: в два раза больше.

Т2. При каких условиях около цилиндра можно описать призму?

а) Призма любая.

б) Основания цилиндра вписаны в основания призмы.

в) Образующие цилиндра совпадают с боковыми ребрами призмы

Ответ: б, в.

Т3. При каких условиях призма вписана в цилиндр?

а) Призма прямая.

б) Основания призмы вписаны в основания цилиндра.

в) Боковые ребра в два раза больше радиуса.

Ответ: а, б.

Решаем задачи

№1 а) Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 4. Объем параллелепипеда равен 16. Найдите высоту цилиндра.

Ответ: 0,25

б) Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 3,5. Объем параллелепипеда равен 24,5. Найдите высоту цилиндра.

Ответ: 0,5

в) Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 18. Объем параллелепипеда равен 1296. Найдите высоту цилиндра.
Ответ: 1
№2

а) В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра равны $\frac{5}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

Ответ: 125

б) В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 7. Боковые ребра равны $\frac{8}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

Ответ: 170

в) В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 9 и 6. Боковые ребра равны $\frac{2}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

Ответ: 58,5

№3

а) Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания которого равен 2. Площадь боковой поверхности призмы равна 48. Найдите высоту цилиндра.

Ответ: 3

б) Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания которого равен 5. Площадь боковой поверхности призмы равна 40. Найдите высоту цилиндра.

Ответ: 1

в) Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания которого равен 6. Площадь боковой поверхности призмы равна 48. Найдите высоту цилиндра.

Ответ: 1

№4

а) Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Ответ: 8

б) Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 16. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Ответ: 2048

в) Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 7. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Ответ: 392

№5 а) Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен $2\sqrt{3}$ а высота равна 3.

Ответ: 54

б) Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен $8\sqrt{3}$, а высота равна

Ответ: 432

в) Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен $2\sqrt{3}$, а высота равна 4.

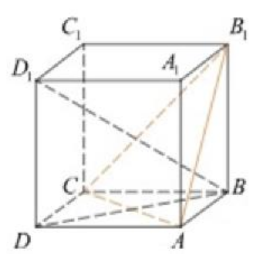
Ответ 72

Задача с развернутым ответом

Внутри цилиндра расположен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, что все его вершины лежат на поверхности цилиндра, причём вершины B и D_1 совпадают с центрами оснований, а остальные вершины лежат на боковой поверхности цилиндра.

а) Докажите, что плоскость AB_1C параллельна основаниям цилиндра.

б) Найдите объём цилиндра, если ребро куба равно 3.



а) Заметим, что BD_1 — ось цилиндра, BD — проекция BD_1 на плоскость $ABCD$, при этом прямые BD и AC перпендикулярны, следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах, прямые BD_1 и AC перпендикулярны. Аналогично, прямые BD_1 и AB_1 перпендикулярны, прямые BD_1 и CB_1 перпендикулярны. Таким образом, прямая BD_1 перпендикулярна плоскости AB_1C, следовательно, плоскость AB_1C параллельна основаниям цилиндра.

б) Из пункта а) следует, что радиус описанной окружности треугольника AB_1C равен радиусу основания цилиндра, кроме того, высота цилиндра равна BD_1. Имеем:

$$BD_1 = AB\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$AC = AB_1 = CB_1 = AB\sqrt{2}$$

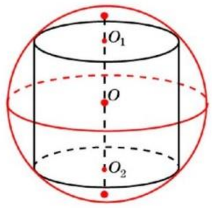
Тогда : $$R_{AB_1C} = \frac{2}{3}\, h_{AB_1C} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC = \sqrt{6}$$

$$V = \pi R^2 \cdot BD_1 = 18\,\pi\sqrt{3}$$

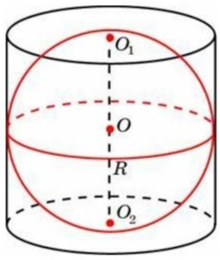
Ответ. б) $18\,\pi\sqrt{3}$

Занятие 26. Комбинация тел. Цилиндр, шар

Марич Ольга Ивановна



Цилиндр вписан в шар (сферу), если каждое его основание лежит на сфере данного шара. Любой цилиндр может быть вписан в шар.



Так как основания цилиндра имеют равный радиус, то расстояние от центра до их плоскостей одинаково, а значит, в силу их параллельности, центр находится в середине высоты цилиндра.

Шар (сфера) вписан в цилиндр, если он касается оснований цилиндра и его боковой поверхности.

1. Так как шар касается боковой поверхности, то в соответствующем сечении должен получиться круг, радиус которого равен радиусу шара. А значит, радиус цилиндра равен радиусу шара.

2. Высота должна быть равна диаметру шара.

Таким образом, совсем не любой цилиндр может быть описан около шара, для этого нужно, чтобы его высота была вдвое больше радиуса основания.

$\boldsymbol{V}_{\text{шара}}$ – объем шара, $\boldsymbol{V}_{\text{цилиндра}}$ - объем цилиндра, описанного около шара

R - радиус шара, $\boldsymbol{S}_{\text{шара}}$ – площадь основания,

$\boldsymbol{S}_{\text{цилиндра}}$ – площадь цилиндра, описанного около шара

H – высота цилиндра

Высота цилиндра, описанного около шара в два раза больше радиуса шара.

$\boldsymbol{S}_{\text{цилиндра}} = \boldsymbol{2\pi R^2 + 2\pi RH = 6\pi R^2}$ $\qquad$ $\boldsymbol{S}_{\text{шара}} = \boldsymbol{4\pi R^2}$

$\boldsymbol{V}_{\text{шара}} = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3}$ $\quad$ $\boldsymbol{V}_{\text{цилиндра}} = \boldsymbol{S}_{\text{осн}} \cdot \boldsymbol{H = \pi \cdot R^2 \cdot H = 2\pi R^3}$

$$\frac{\boldsymbol{V}_{\text{шара}}}{\boldsymbol{V}_{\text{цилиндра}}} = \frac{\boldsymbol{S}_{\text{шара}}}{\boldsymbol{S}_{\text{цилиндра}}} = \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}}$$

Проверяем себя

Т1. Заполните пропуски:

а) Высота цилиндра описанного около шара равна ______________________.

Ответ: диаметру шара или двум его радиусам.

б) Объем цилиндра равен ________________ объема вписанного в него шара.

Ответ: двум третьим.

в) Чтобы вписать шар в цилиндр, нужно, чтобы _______________________.

Ответ: высота цилиндра была в равна двум радиусам шара.

Т2. Укажите верные утверждения:

а) Любой цилиндр можно описать около шара.

б) Радиус вписанного в цилиндр шара в два раза меньше его высоты.

в) Радиус основания цилиндра равен радиусу вписанного в него шара.

Ответ: б, в.

Т3. Укажите неверные утверждения:

а) Радиус основания цилиндра равен радиусу описанного около него шара.

б) Высота цилиндра равна двум радиусам, вписанного в него шара.

в) Объем цилиндра в два раза больше объема вписанного в него шара.

Ответ: а, в.

Решаем задачи

№1

а) Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 111. Найдите площадь поверхности шара.

Ответ: 74

б) Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 6. Найдите площадь поверхности шара.

Ответ: 4

в) Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 69. Найдите площадь поверхности шара.

Ответ: 46

№2

а) Шар вписан в цилиндр объемом 42. Найдите объем шара.

Ответ: 28

б) Цилиндр описан около шара. Объем цилиндра равен 102. Найдите объем шара.

Ответ: 68

в) Цилиндр описан около шара. Объем цилиндра равен 105. Найдите объем шара.

Ответ: 70.

№3

а) Цилиндр описан около шара. Объем шара равен 38. Найдите объем цилиндра.

Ответ: 57

б) Цилиндр описан около шара. Объем шара равен 50. Найдите объем цилиндра.

Ответ: 75

в) Цилиндр описан около шара. Объем шара равен 20. Найдите объем цилиндра.
Ответ: 30

№4 а) Объём куба, описанного около сферы, равен 1000. Найдите радиус сферы.

Ответ: 5

б) Объём куба, описанного около сферы, равен 1728. Найдите радиус сферы.

Ответ: 6

в) Площадь поверхности куба, описанного около сферы, равна 96. Найдите радиус сферы.

Ответ: 2

№5

а) В куб с ребром 21 вписан шар. Найдите объем этого шара, деленный на π.

Ответ: 1543,5

б) В куб с ребром 9 вписан шар. Найдите объем этого шара, деленный на π.

Ответ: 121,5

в) В куб с ребром 18 вписан шар. Найдите объем этого шара, деленный на π.

Ответ: 972

№6

а) Около куба с ребром $\sqrt{243}$ описан шар. Найдите объем этого шара, деленный на π.

Ответ: 3280,5

б) Около куба с ребром $\sqrt{300}$ описан шар. Найдите объем этого шара, деленный на π.

Ответ: 4500

в) Около куба с ребром $\sqrt{507}$ описан шар. Найдите объем этого шара, деленный на π.

Ответ: 9886,5

Задача с развернутым ответом

Даны цилиндр и шар. Радиусы основания цилиндра и большого круга шара равны. Полная поверхность цилиндра относится к поверхности шара как m : n . Найти отношение их объёмов.

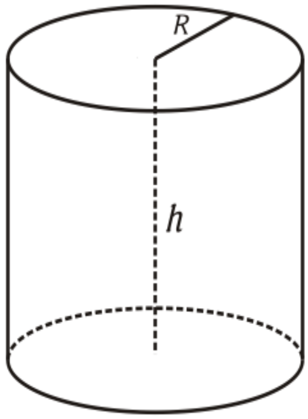
Решение. Пусть R – радиус основания цилиндра и радиус шара, H – высота, S_1 – полная поверхность цилиндра, V_1 – объём цилиндра, S_2 - полная поверхность шара, V_2 - объём шара. Тогда $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi R^2 + 2\pi RH}{4\pi R^2} = \frac{R+H}{2R} = \frac{m}{n}$

Пусть $R + H = m$. Тогда $2R = n$, $R = \frac{n}{2}$ и $H = m - R = \frac{2m-n}{2}$. Следовательно, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R^2 H}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3H}{4R} = \frac{3(2m-n)}{2} : 2n = \frac{6m-3n}{4n}$.

Ответ: $\frac{6m-3n}{4n}$.

Занятие 27. Комбинация тел. Цилиндр, конус. Конус, шар.

Кармазина Маргарита Викторовна



Цилиндр – фигура вращения, ограниченная цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями (плоскости основания). Цилиндрическая поверхность называется боковой поверхностью цилиндра, а круги – основаниями цилиндра.

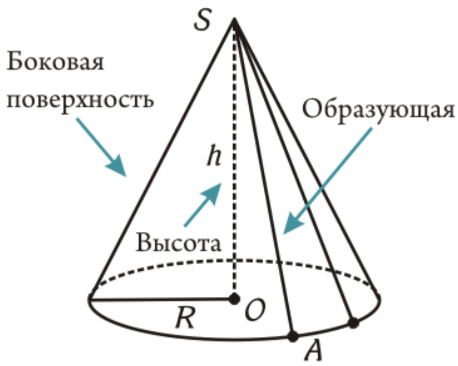
Площадь боковой поверхности цилиндра:

$S_{бок\ поверхности\ цилиндра} = 2\pi Rh$.

Площадь полной поверхности цилиндра:

$S_{полной\ поверхности\ цилиндра} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$

Формула объема: $V_{цилиндра} = S_{основания} \cdot h = \pi R^2 h$, где R – радиус основания, h – высота.



Конус – фигура вращения, образованная лучами, исходящими из вершины конуса, проходящую через некоторую плоскость (плоскость основания).

Образующая конуса — это **отрезок, соединяющий вершину конуса с любой точкой окружности основания**.

Площадь полной поверхности конуса:

$S_{полн\ поверхности\ конуса} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$, где R — радиус основания, l — образующая.

Площадь боковой поверхности конуса находится по формуле:

$S_{боковой\ конуса} = \pi Rl$, где R — радиус основания, l — образующая

Формула объема конуса: $V_{конуса} = \frac{1}{3} \cdot S_{основания} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot h$,

где R – радиус основания, h –высота.

<u>Проверяем себя</u>

Т1. Заполните пропуски:
а) Цилиндр – фигура вращения, ограниченная _________________и _________ параллельными плоскостями (плоскости основания).
Ответ: Цилиндр – фигура вращения, ограниченная цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями (плоскости основания).

б) Конус – фигура вращения, образованная ____________, исходящими из _______________ конуса, проходящую через некоторую плоскость (плоскость основания).
Ответ: Конус – фигура вращения, образованная лучами, исходящими из вершины конуса, проходящую через некоторую плоскость (плоскость основания).
в) Образующая конуса — это ____________, соединяющий _____________ конуса с любой точкой ____________________________________.
Ответ: Образующая конуса — это отрезок, соединяющий вершину конуса с любой точкой окружности основания.

Т2. Укажите верное утверждение:

1) Площадь полной поверхности конуса вычисляется по формуле:

а) $S_{\text{полн поверхности конуса}} = \pi Rl$

б) $S_{\text{полн поверхности конуса}} = 2\pi Rl + \pi R^2$

в) $S_{\text{полн поверхности конуса}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$

г) $S_{\text{полн поверхности конуса}} = 2\pi R(l + R)$

Ответ: в

2) Площадь боковой поверхности цилиндра определяется по формуле:

а) $S_{\text{бок цилиндра}}=4\pi Rh$ б) $S_{\text{бок цилиндра}}=2\pi Rh$
в) $S_{\text{бок цилиндра}}=2\pi R^2h$ г) $S_{\text{бок цилиндра}}=2\pi R^3$

Ответ: б

Т3. Вычислить:

Если высота конуса 15см, а радиус основания 8см, образующая конуса равна:

а) 14 см б) 17 см в) 13 см г) 6 см

Ответ: б

Решаем задачи.

№ 1.

а) Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем конуса, если объем цилиндра равен 126.

Ответ:42.

б) Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем конуса, если объем цилиндра равен 114.

Ответ: 38.

в) Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем конуса, если объем цилиндра равен135.

Ответ: 45.

№ 2.

а) Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 42.

Ответ:126

б) Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 25.

Ответ: 75

в) Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 18.

Ответ: 54

№ 3.

а) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $28\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Ответ: 56

б) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $15\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Ответ: 30

в) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $27\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Ответ: 54

№ 4

а) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна 6. Найдите образующую конуса l, если она наклонена к плоскости основания под углом 60°. В ответе укажите $\frac{l}{\sqrt{3}}$.

Ответ: 4.

б) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна 15. Найдите образующую конуса l, если она наклонена к плоскости основания под углом 60°. В ответе укажите $\frac{l}{\sqrt{3}}$.

Ответ: 10.

в) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна 18. Найдите образующую конуса l , если она наклонена к плоскости основания под углом 60°. В ответе укажите $\frac{l}{\sqrt{3}}$.

Ответ: 12.

№ 5

а) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем цилиндра, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 30° и равна 2. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

Ответ: 3.

б) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем цилиндра, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 30° и равна 4. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

Ответ: 24.

в) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем цилиндра, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 30° и равна 6. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

Ответ: 81.

№ 6

а) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите высоту цилиндра, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 45° и равна 8. В ответе укажите $\frac{h}{\sqrt{2}}$.

Ответ: 4.

б) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите высоту цилиндра, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 45° и равна 10. В ответе укажите $\frac{h}{\sqrt{2}}$.

Ответ: 5 .

в) а) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите высоту цилиндра, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 45° и равна 12. В ответе укажите $\frac{h}{\sqrt{2}}$.

Ответ: 6..

№ 7

а) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 45° и равна 8. В ответе укажите V/ π.

Ответ: 128.

б) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 45° и равна 10. В ответе укажите V/ π.

Ответ: 200.

в) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 45° и равна 12. В ответе укажите V/ π

Ответ: 288.

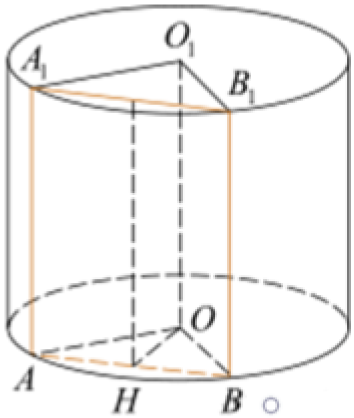
Задача с развернутым ответом

Высота цилиндра равна 5, а радиус основания 10.

а) Докажите, что площадь боковой поверхности цилиндра равна площади его основания.

б) Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра на расстоянии 6 от неё.

Решение.



а) Вспомним, что площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле $\boldsymbol{S_{бок\ цилиндра}=2\pi Rh}$, где R — радиус основания, h - высота цилиндра. В данном случае h = R/2, поэтому $\boldsymbol{2\pi Rh = \pi R^2}$, откуда и следует требуемое.

б) Сечение цилиндра плоскостью, проходящей параллельно его оси OO_1, — прямоугольник ABB_1A_1 (O и AB — соответственно центр и хорда нижнего основания цилиндра), $AA_1 = 5$. Расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения равно высоте OH треугольника OAB.

$OA = OB = 10$, $OH = 6$, откуда AB = 2AH = $2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 16$

Площадь прямоугольника ABB_1A_1 : S = $AA_1 \cdot AB = 80$

Ответ: 80.

Занятие 28. Комбинации тел. Конус, шар.

Кармазина Маргарита Викторовна

Конус – фигура вращения, образованная лучами, исходящими из вершины конуса, проходящую через некоторую плоскость (плоскость основания).

Образующая конуса — это **отрезок, соединяющий вершину конуса с любой точкой окружности основания**.

Площадь полной поверхности конуса:

$S_{\text{полн поверхности конуса}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$

где R — радиус основания, l — образующая

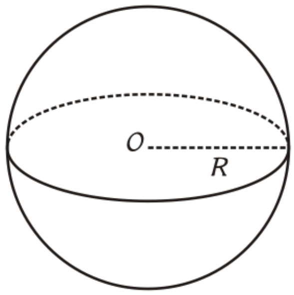
Площадь боковой поверхности конуса находится

$S_{\text{бок пов конуса}} = \pi Rl$, где R — радиус основания, l — образующая

Формула объема конуса: $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{основания}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot h$,

где R – радиус основания, h -высота

Шар – геометрической место точек в пространстве, находящихся на одинаковом расстоянии от фиксированной точки (центра шара).



Площадь поверхности шара:

$S_{\text{поверхности шара}} = 4\pi R^2$, R – радиус шара.

Формула объема шара:

$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3$, R-радиус шара.

Проверяем себя

Т1. Заполните пропуски:
а) Конус – фигура вращения, образованная ____________, исходящими из _______________ конуса, проходящую через некоторую плоскость (плоскость основания).
Ответ: Конус – фигура вращения, образованная лучами, исходящими из вершины конуса, проходящую через некоторую плоскость (плоскость основания).

б) Образующая конуса — это ____________, соединяющий ____________
конуса с любой точкой ___________________________________.

Ответ Образующая конуса — это отрезок, соединяющий вершину конуса с любой точкой окружности основания.

в) Шар – геометрической место точек в пространстве, находящихся на ________________ расстоянии от фиксированной точки (центра шара).

Ответ: Шар – геометрической место точек в пространстве, находящихся на одинаковом расстоянии от фиксированной точки (центра шара).

Т2. Укажите верное утверждение:

1) Площадь полной поверхности конуса вычисляется по формуле:

а)$S_{\text{полн поверхности конуса}} = \pi Rl$
б) $S_{\text{полн поверхности конуса}} = 2\pi Rl + \pi R^2$
в) $S_{\text{полн поверхности конуса}} =\pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$
г) $S_{\text{полн поверхности конуса}} = 2\pi R(l + R)$

Ответ: в
2) Площадь поверхности сферы определяется по формуле, где R-радиус сферы:
а) $S_{\text{поверхности шара}} = 2\pi R^2$ б) $S_{\text{поверхности шара}} = \pi R^2$
в) $S_{\text{поверхности шара}} = \frac{4}{3}\pi R^2$ г) $S_{\text{поверхности шара}} = 4\pi R^2$
Ответ: г

Т3. Вычислить:

Если высота конуса 15 см, а образующая конуса 17 см, радиус основания конуса равен:

а) 14 см б) 8 см в) 13 см г) 6 см

Ответ: б

Решаем задачи

№ 1.

а) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $83\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.

Ответ:83

б) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $50\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.

Ответ: 50

в) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $23\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.

Ответ:23.

№ 2.

а) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Радиус сферы равен $33\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

Ответ: 66.

б) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Радиус сферы равен $24\sqrt{2}$. . Найдите образующую конуса.

Ответ:48.

в) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Радиус сферы равен $7\sqrt{2}$. . Найдите образующую конуса.

Ответ:14.

№ 3.

а) Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 156. Найдите объём конуса.

Ответ: 39

б) Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 288. Найдите объём конуса.

Ответ: 72

в) Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 256. Найдите объём конуса.

Ответ: 64.

№ 4.

а) Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем конуса равен 16. Найдите объем шара.
Ответ: 64.
б) Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем конуса равен 24. Найдите объем шара.
Ответ: 96.
в) Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем конуса равен 17. Найдите объем шара.
Ответ: 68.

№ 5
а) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $5\sqrt{2}$. Найдите площадь поверхности шара. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.
Ответ: 100.
б) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $7\sqrt{2}$. Найдите площадь поверхности шара. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.
Ответ: 196.
в) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $9\sqrt{2}$. Найдите площадь поверхности шара. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.
Ответ: 324.

№ 6
а) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $3\sqrt{2}$. Найдите объём шара. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.
Ответ: 36.
б) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $6\sqrt{2}$. Найдите объём шара. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.
Ответ: 288.

в) Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $9\sqrt{2}$. Найдите объём шара. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

Ответ: 972.

№ 7

а) Высота конуса равна 4, образующая 5. Найдите радиус вписанной сферы.

Ответ: 1,5.

б) Высота конуса равна 8, образующая 10. Найдите радиус вписанной сферы.

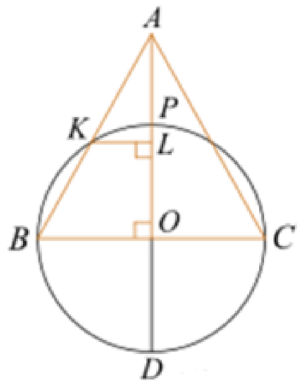
Ответ: 3.

в) Высота конуса равна 16, образующая 20. Найдите радиус вписанной сферы.

Ответ: 6.

Задача с развернутым ответом
Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как 4 : 7.
а) Докажите, что поверхность полусферы делит образующую конуса в отношении 33 : 32, считая от вершины конуса.

б) Найдите площадь поверхности полусферы, находящейся внутри конуса, если радиус их общего основания равен 13.



Решение. а) Построим осевое сечение конуса, достроим полуокружность до окружности и введем обозначения, как показано на рисунке. Пусть радиус основания равен $4t$, тогда высота конуса равна $7t$. По теореме Пифагора в треугольнике ABO найдемAB = $t\sqrt{65}$. Далее воспользуемся свойством секущих:

AK·AB = AP ·AD ⇒

$AK \cdot t\sqrt{65} = 3t \cdot 11t$, ⇔ AK = $\frac{33\sqrt{65}}{65}t$. Тогда: $\frac{AK}{KB} = \frac{33\sqrt{65}}{65} : \frac{65\sqrt{65} - 33\sqrt{65}}{65} = \frac{33}{32}$,

что и требовалось доказать.

б) Площадь сферического сегмента вычисляется по формуле S = $2\pi rh$

где r — радиус сферы, h перпендикуляр — высота сферического сегмента.

Чтобы найти высоту, проведем KL точки из K на отрезок AO. Прямоугольные треугольники ABO иAKL подобны по острому углу.

Из пункта а) сразу следует, что коэффициент подобия этих треугольников равен $\frac{33}{65}$.

$$h = PL = AL - AP = \frac{33}{65}AO - \frac{3}{4}r = \frac{33}{65} \cdot \frac{7}{4}r - \frac{3}{4}r = \frac{9}{65}r$$

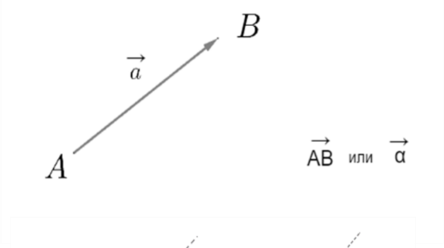
По условию $r = 13$, откуда получаем: $S = 2\pi rh = 2\pi \cdot r \cdot \frac{9}{65}r = \frac{18}{65}\pi r^2 =$ $46{,}8\,\pi$

Ответ: б) 46,8 π.

Занятие 29. Векторы

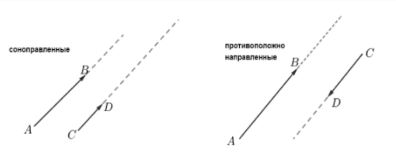
Насонова Татьяна Владимировна

1. Вектором называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, где точка А – начало, точка В – конец вектора

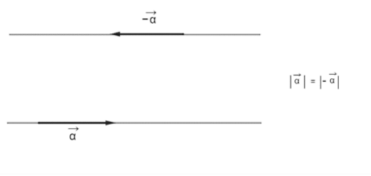


Нулевым вектором называется вектор, у которого начало совпадает с концом.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются **сонаправленными**, если лучи AB и CD одинаково направлены.

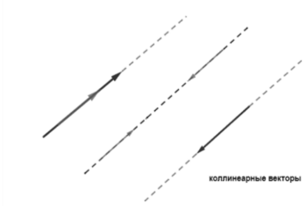


Если лучи AB и CD противоположно направлены, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются **противоположно направленными.**



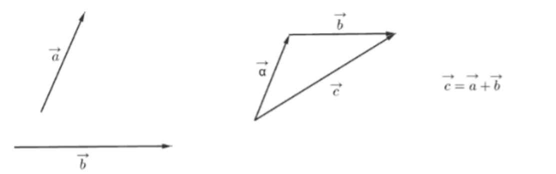
Вектор, **противоположный** вектору $\vec{a}$, обозначается как -$\vec{a}$.

Два вектора называются **коллинеарными,** если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

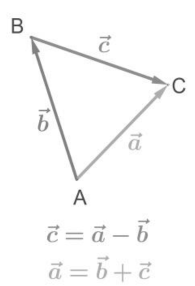


Длиной вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB, изображающего вектор. Длину вектора $\vec{a}$ обозначают $|\vec{a}|$.

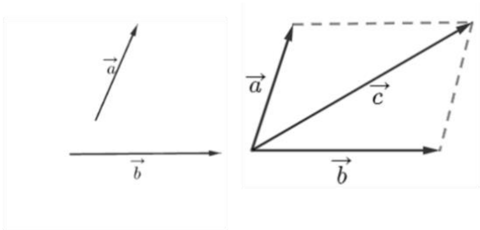
2. Суммой $\vec{a}$ + $\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой третий вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом $\vec{a}$, а конец – с концом $\vec{b}$ при условии, что конец вектора $\vec{a}$ и начало вектора $\vec{b}$ совпадают.



3. Разностью $\vec{a}$ - $\vec{b}$ векторов и называется вектор $\vec{c}$ такой, что выполняется условие: $\vec{b}$ + $\vec{c}$ = $\vec{a}$



4. Если два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ привести к общему началу, то вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ совпадает с диагонаялью параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Причем начало вектора $\vec{c}$ совпадает с началом заданных векторов.



Проверяем себя

Т1. Заполни пропуски:

а) Для любых трёх точек А, В и С выполняется равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$ ____

Ответ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

б) Два ненулевых вектора называют противоположными, если: _______
Ответ: Векторы называются противоположными, если они противоположно направлены, а длины их равны.

в) Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют: _______

Ответ: Разностью векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется такой вектор, сумма которого с вектором* $\vec{b}$ *равна вектору* $\vec{a}$.

Т2. Укажите верное утверждение:

Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $\{x_1\ y_1\};\{x_2;y_2\}$, то координаты вектора $\vec{a}$ - $\vec{b}$ равны:

а) $\{x_1x_2;\ y_1y_2\}$

б) $\{x_1+x_2;\ y_1+y_2\}$

в) $\{x_1-x_2;\ y_1-y_2\}$

Ответ. в.

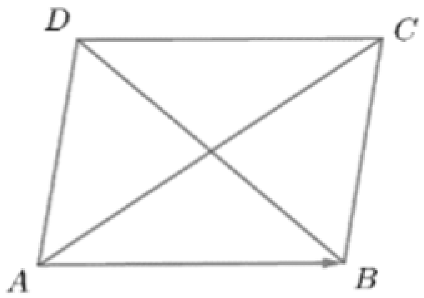
Т3. Вычислите:

В прямоугольнике ABCD AB = 3 см, BC = 4 см, M – середина стороны AB.

а) Найти длину $\overrightarrow{AB}$
б) Найти длину $\overrightarrow{BC}$
в) Найти длину $\overrightarrow{DC}$
г) Найти длину $\overrightarrow{MC}$
Ответ: а) 3см; б) 4см; в) 3см; г) $\sqrt{18{,}25}$ *см*

Решаем задачи

№1



а) Диагонали ромба ABCD равны 40 и 42. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

Ответ: 29

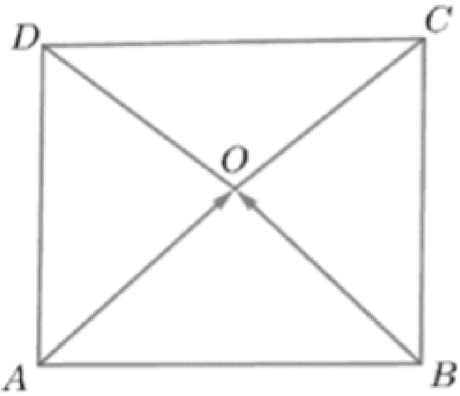
б) Диагонали ромба ABCD равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

Ответ: 10

в) Диагонали ромба ABCD равны 6 и 8. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

Ответ: 5

№2



а) Две стороны прямоугольника ABCD равны 6 и 8. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину разности векторов $\vec{AO}$ и $\vec{BO}$.

Ответ: 8

б) Две стороны прямоугольника ABCD равны 12 и 5. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину разности векторов $\vec{AO}$ и $\vec{BO}$.

Ответ: 5

в) Две стороны прямоугольника ABCD равны 13 и 25 Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину разности векторов $\vec{AO}$ и $\vec{BO}$.

Ответ: 25

№3

а) Две стороны прямоугольника ABCD равны 6 и 8. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину суммы векторов $\vec{AO}$ и $\vec{BO}$

Ответ: 6

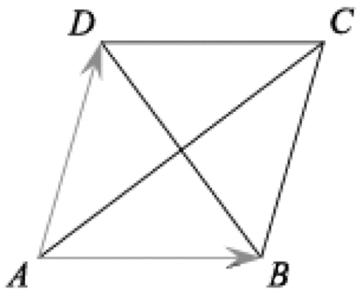
б) Две стороны прямоугольника ABCD равны 15 и 23. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину суммы векторов $\vec{AO}$ и $\vec{BO}$

Ответ: 15

в) Две стороны прямоугольника ABCD равны 30 и 46 Диагонали пересекаются в точке О. Найдите длину суммы векторов $\vec{AO}$ и $\vec{BO}$

Ответ: 30

№4



а) Диагонали ромба ABCD равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AB} + \vec{AD}$.

Ответ: 16

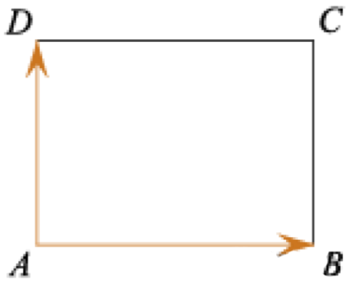
б) Диагонали ромба ABCD равны 44 и 66 Найдите длину вектора $\vec{AB} + \vec{AD}$.

Ответ: 66

в) Диагонали ромба ABCD равны 22 и 33 Найдите длину вектора $\vec{AB} + \vec{AD}$.

Ответ: 33

№5



а) Две стороны прямоугольника ABCD равны 6 и 8. Найдите длину суммы векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$.

Ответ: 10.

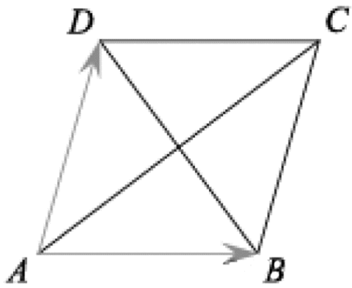
б) Две стороны прямоугольника ABCD равны 8 и 15. Найдите длину суммы векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$.

Ответ: 17.

б) Две стороны прямоугольника ABCD равны 12 и 5. Найдите длину суммы векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$.

Ответ: 13.

№6



а) Диагонали ромба ABCD равны 12 и 16 Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AD}$.

Ответ: 12

б) Диагонали ромба ABCD равны 32 и 23 Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AD}$.

Ответ: 23.

в) Диагонали ромба ABCD равны 25 и 36. Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AD}$.

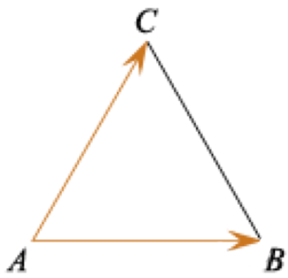
Ответ: 25

№7

а) Стороны правильного треугольника ABC равны $2\sqrt{3}$.

Найдите длину вектора $\vec{AB} + \vec{AC}$.

Ответ: 6.



б) Стороны правильного треугольника ABC равны $9\sqrt{3}$.

Найдите длину вектора $\vec{AB} + \vec{AC}$.

Ответ: 27.

в) Стороны правильного треугольника ABC равны $46\sqrt{3}$.

Найдите длину вектора $\vec{AB} + \vec{AC}$.

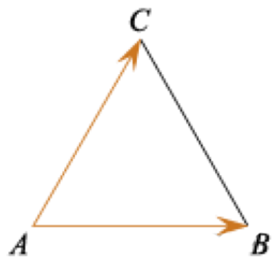
Ответ: 138.

№8

а) Стороны правильного треугольника ABC равны 3.

Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AC}$.

Ответ: 3.



б) Стороны правильного треугольника ABC равны 38.

Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AC}$.

Ответ: 38.

в) Стороны правильного треугольника ABC равны 17.

Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AC}$.

Ответ: 17.

Задача с развернутым ответом

В трапеции ABCD дано: вершина A (3;0), середина основания AB – точка E (6; -1), середина основания CD – точка F (7; 2). Боковая сторона BC параллельна оси Оу. Доказать, что трапеция равнобедренная, и найти угол при ее основании.

Решение:

Пусть B (x_1; y_1), C (x_2; y_2), D (x_3; y_3) - неизвестные вершины трапеции (рис. 1). Поскольку точка E (6; -1) – середина основания AB, имеем систему $\frac{3+x_1}{2}$ *= 6,* $\frac{0+y_1}{2}$ *= -1, откуда* x_1 *= 9,*

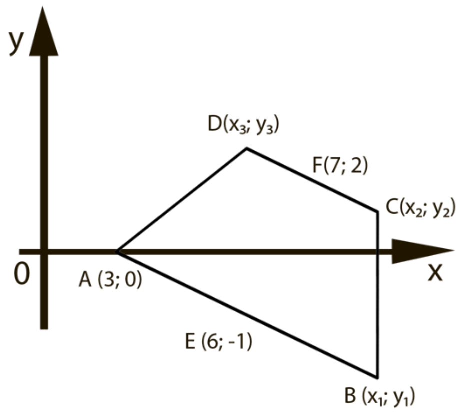


рис. 1

y_1 *= -2, т. е. B (9; -2). Но BC* || Oy и, значит, x_2 *= 9, а уравнение BC есть x=9.* *Далее, точка F(7; 2) – середина основания DC, откуда* $\frac{x_3+9}{2} = 7$, т. е. x_3*=5. Уравнение прямой AB имеет вид y+1= -k(x-6); так как A*∈(AB), то 0+1=*k(3-6)*⇒ *k*= - $\frac{1}{3}$.

Поэтому k_{DC} = - $\frac{1}{3}$ *, и получаем уравнение DC: y – 2 = -* $\frac{1}{3}$ *(x-7), или y= -* $\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$.

Решив систему уравнений прямых BC и DC, т. е. x = 9 и y = - $\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$*, находим y=*$\frac{4}{3}$ *, т. е.* C(9; $\frac{4}{3}$). Наконец, ординату точки D найдем из равенства $\frac{y_{3}+\frac{4}{3}}{2} = 2$, откуда $y_3 = \frac{8}{3}$, т. е. D(5; $\frac{8}{3}$). Таким образом, BC = y_2-y_1= $\frac{4}{3}$ + 2= $\frac{10}{3}$, AD = $\sqrt{2^2 + (\frac{8}{3})^2} = \frac{10}{3}$, т. е. BC=AD и, значит, трапеция ABCD – равнобедренная.

Положим ∠DAB = α и воспользуемся формулой cos α = $\frac{\overrightarrow{AD}*\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|}$. Имеем $\overrightarrow{AD}$ (2; $\frac{8}{3}$), $\overrightarrow{AB}$(6; -2), $|\overrightarrow{AD}|$=2$\sqrt{10}$ и, следовательно,

$$\cos \alpha = \frac{2*6+\frac{8}{3}(-2)}{\frac{10}{3}*2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$

Занятие 30. Векторы и координаты.

Насонова Татьяна Владимировна

1.Координаты вектора.

Пусть дан вектор, у которого известны координаты начала и конца.

A $\{x_{1;}\ y_1\}$ B $\{x_{2:}\ y_2\}$

Тогда координаты самого вектора находятся как разница координат конца и начала:

$\overrightarrow{AB}\{x_2\text{-}x_1;\ y_2\text{-}y_1\}$

2. Длина вектора.

Пусть дан вектор, координаты которого известны. Длина вектора находится по формуле:

$\overrightarrow{AB}\{x;\ y\}$ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3. Сумма (разность) векторов.

Если даны векторы и известны координаты этих векторов, то координаты вектора, полученные в результате суммы (разности) данных векторов, будут равны сумме (разности) соответствующих координат.

$\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$ $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$

$\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2\}$ $\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_{2;}\ y_1 - y_2\}$

4. Умножение вектора на число.

Чтобы умножить вектор на ненулевое число, нужно умножить каждую координату этого вектора на это число $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$

$\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$
$n \neq 0$
$n\vec{a} = \{nx_1:\ ny_1\}$

5. Координаты середины отрезка.

Если координаты **концов отрезка** – *A* (x_1; y_1) и *B* (x_2; y_2), то координаты его середины в точке *C* будут $((x_1+x_2)/2;\ (y_1+y_2)/2)$.

Проверяем себя.

Т1. Заполните пропуски:

а) Если известны координаты вектора $\vec{a}\{x; y\}$, то длина вектора $\vec{a}$ находится по формуле_________.

Ответ: $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

б) Координаты суммы векторов $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ находятся по формуле__.

Ответ: $\vec{a}+\vec{b}=\{x_1+x_2; y_1+y_2\}$

Т2. Укажите верный ответ.

1. Найдите длину вектора $\vec{p}\{-4; 5\}$:
   а) – 36;
   б) – 6;
   в) $\sqrt{41}$.
   г) 46.
   Ответ: в)
2. Каково расстояние между точками M и N, если $M(2; 7)$ и $N(-2; 7)$:
   а) – 4;
   б) 4;
   в) – 2;
   г) 2.
   Ответ: б)
3. Укажите координаты вектора $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, если A (2; -3), B (-8;4)
   а) {-5; 3,5}
   б) {-1; -3,5}
   в) {5; 0}
   г) {0;0}
   Ответ: а)

Т3. Вычислите.

Дано: A (2; - 4), B (-2; -6), C (0 ;7)

а) координаты вектора $\overrightarrow{BC}$ равны___

б) длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна___

в) координаты середины отрезка AC равны___

г) периметр треугольника ABC равен___

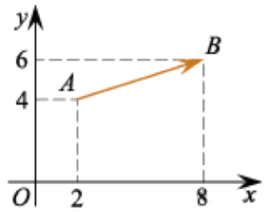
д) длина медианы BM равна___

Ответ: а) {-2; 13}; б) $2\sqrt{5}$; в) (1; 1,5); г) $7\sqrt{5}+\sqrt{173}$; д) $\sqrt{65,25}$

Решаем задачи

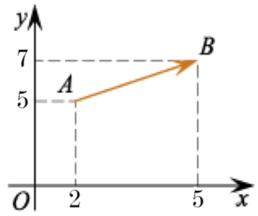
№1

а) Найдите сумму координат вектора $\overrightarrow{AB}$



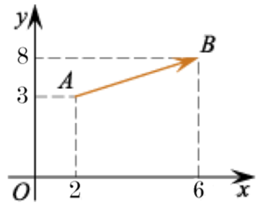
Ответ: 8

б) Найдите сумму координат вектора $\overrightarrow{AB}$



Ответ: 5

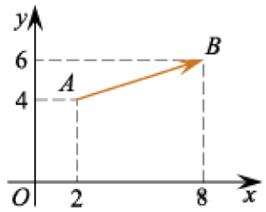
в) Найдите сумму координат вектора $\overrightarrow{AB}$



Ответ: 9

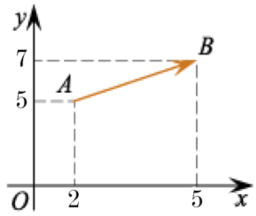
№2

а) Найти квадрат длины вектора $\overrightarrow{AB}$



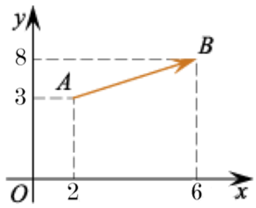
Ответ: 40

б) Найти квадрат длины вектора $\overrightarrow{AB}$



Ответ: 13

в) Найти квадрат длины вектора $\overrightarrow{AB}$

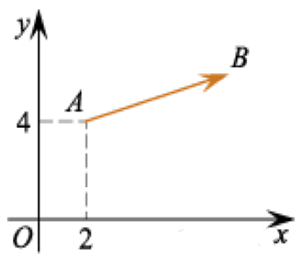


Ответ: 41

№3

а) Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке A (2; 4) имеет координаты (6; 2).

Найдите ординату точки B.

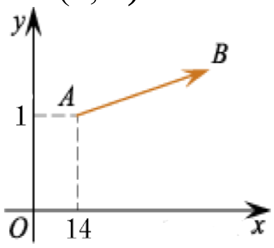


Ответ: 6

б) Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке A (14; 1) имеет координаты (8; 2).

Найдите ординату точки B.

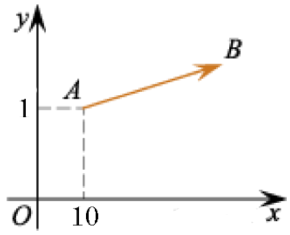
Ответ: 3



в) Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке A (10; 1) имеет координаты (8; 7).

Найдите ординату точки B.

Ответ: 8

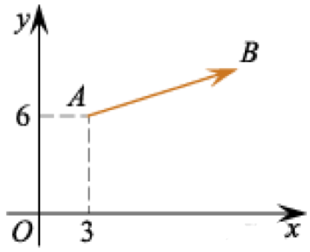


№4

а) Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке A(3; 6) имеет координаты (9; 3).

Найдите сумму координат точки B.

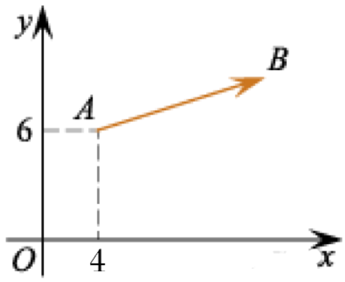
Ответ: 21



б) Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке A(4; 6) имеет координаты (10; 4).

Найдите сумму координат точки B.

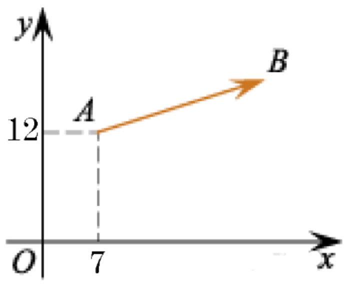
Ответ: 24



в) Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке A (7; 12) имеет координаты (20; 32).

Найдите сумму координат точки B.

Ответ: 71

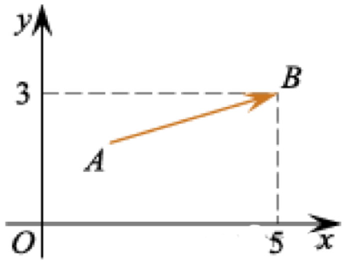


№5

а) Вектор $\overrightarrow{AB}$ с концом в точке В (5; 3) имеет координаты (3; 1).

Найдите абсциссу точки А.

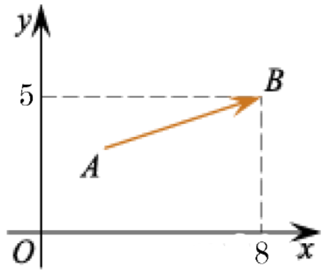
Ответ: 2



б) Вектор $\overrightarrow{AB}$ с концом в точке В (8; 5) имеет координаты (2; 3).

Найдите абсциссу точки А.

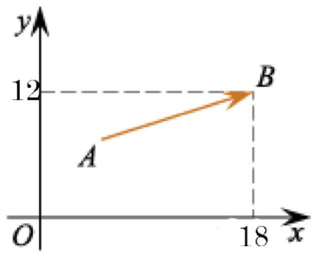
Ответ: 6



в) Вектор $\overrightarrow{AB}$ с концом в точке В (18; 12) имеет координаты (12; 30).

Найдите абсциссу точки А.

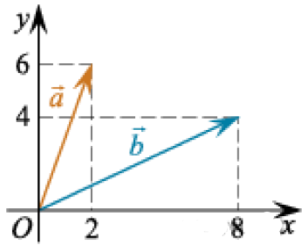
Ответ: 6



№6

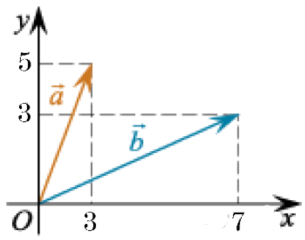
а) Найдите сумму координат вектора $\vec{a} + \vec{b}$.

Ответ: 20.



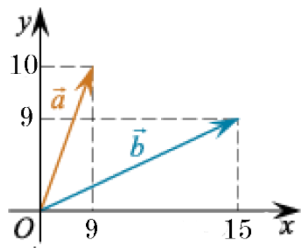
б) Найдите сумму координат вектора $\vec{a} + \vec{b}$.

Ответ: 18.



в) Найдите сумму координат вектора $\vec{a} + \vec{b}$.

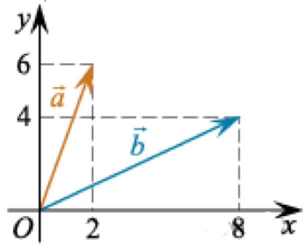
Ответ: 43.



№7

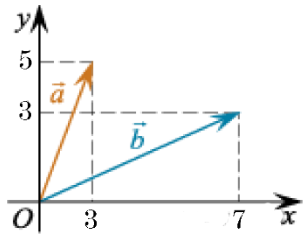
а) Найдите сумму координат вектора $\vec{a} - \vec{b}$.

Ответ: -4.



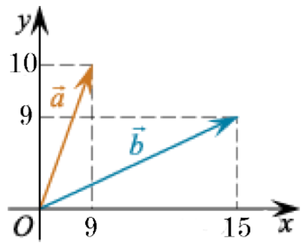
б) Найдите сумму координат вектора $\vec{a} - \vec{b}$.

Ответ: 2.



в) Найдите сумму координат вектора $\vec{a} - \vec{b}$.

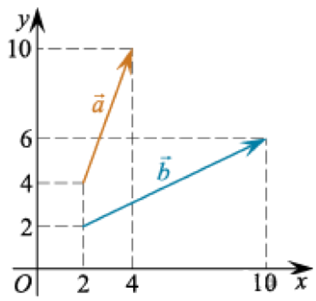
Ответ: 5.



№8

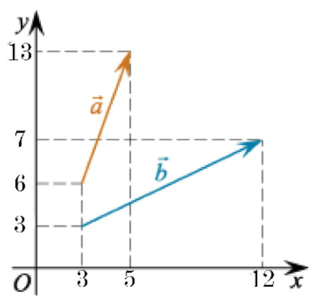
а) Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} + \vec{b}$.

Ответ: 200.



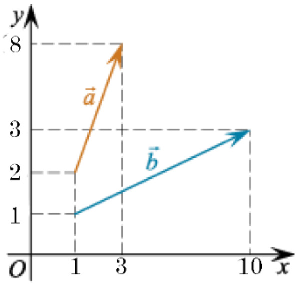
б) Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} + \vec{b}$.

Ответ: 242.



в) Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} + \vec{b}$.

Ответ: 185.



Задача с развёрнутым ответом

Медиана AA_1, и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке G взаимно перпендикулярны. Найдите сторону AB, если AC=9, BC=12. Доказать, что $AB^2 = AC^2 + BC^2$

Решение. Пусть G – точка пересечения медиан (рис. 1). Положим $\overrightarrow{GA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{GB} = \vec{b}$; по условию векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно ортогональны, поэтому $\vec{a}\vec{b} = 0$. Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} = \vec{b} - \vec{a}$ и $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\vec{b} - \vec{a})^2 = \vec{b}^2 - 2(\vec{a}\vec{b}) + \vec{a}^2 = \vec{b}^2 + \vec{a}^2$.

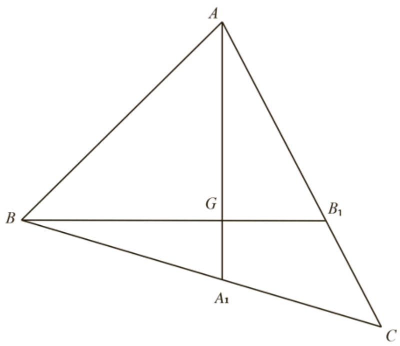


Рис.1

Медианы треугольника точкой G их пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины. Поэтому $\overrightarrow{GA_1} = -\frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{GB_1} = -\frac{1}{2}\vec{b}$ и $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{GB_1} - \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{GA_1} - \overrightarrow{GB} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$.

Отсюда

$\overrightarrow{AB_1}^2 = \vec{a}^2 + -\frac{1}{4}\vec{b}^2$, $\overrightarrow{BA_1}^2 = -\frac{1}{4}\vec{a}^2 + \vec{b}^2$

и $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BA_1}^2 = \frac{5}{4}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2)$. Таким образом,

$$AB^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \frac{4}{5}(\overrightarrow{AB_1}^2 + \overrightarrow{BA_1}^2).$$

Но $\overrightarrow{AB_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ и, значит, $AB^2 = \frac{1}{5}(\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BC}^2) = \frac{1}{2}(9^2 + 12^2) = 45$. Откуда $AB = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Ответ: $3\sqrt{5}$.

Занятие 31. Скалярное произведение векторов

Колмакова Ольга Александровна

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними: $\overrightarrow{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos \vec{a}\ \vec{b}$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ $\{x_{1;}\ y_1\}$и $\vec{b}$ $\{x_{2;}\ y_2\}$ выражается формулой

$$\vec{a} * \vec{b} = x_1 * x_2 + y_1 * y_2$$

Проверяем себя

Т1. Заполните пропуски:

а) Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное _____________ длин этих векторов на __________угла между ними.

Ответ: произведению, косинус

б) Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ $\{x_{1;}\ y_1\}$ и $\vec{b}$ $\{x_{2;}\ y_2\}$ выражается формулой ___________________.

Ответ: $\vec{a} * \vec{b} = x_1 * x_2 + y_1 * y_2$

Т2. Укажите верные утверждения:

а) Скалярное произведение векторов равно произведению их длин на косинус угла между ними.
б) Длина суммы двух векторов равна сумме их длин.
в) Сумма внутренних накрест лежащих углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равна 180 градусов.

Ответ а, в

Т3. Укажите неверные утверждения:

а) Диагонали прямоугольника равны.

б) Если два вектора перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

в) Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов

Ответ: в

Решаем задачи

№1

а) Сторона ромба LMNP равна 7 см, $\angle N=60^o$. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{LM}$ и $\overline{LP}$.

Ответ: 24,5

б) Сторона ромба LMNP равна 5 см, $\angle N=60^o$. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{LM}$ и $\overline{LP}$.

Ответ:12,5

в) Сторона ромба LMNP равна 12 см, $\angle N=60^o$. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{LM}$ и $\overline{LP}$.

Ответ:72

№2

а) В равностороннем треугольнике KLN со стороной 12 проведена медиана KE. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{KE}$ и $\overline{KL}$.

Ответ: 108

б) В равностороннем треугольнике KLN со стороной 8 проведена медиана KE. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{KE}$ и $\overline{KL}$.

Ответ: 48

в) В равностороннем треугольнике KLN со стороной 16 проведена медиана KE. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{KE}$ и $\overline{KL}$.

Ответ: 192

№3

а) Даны векторы $\vec{a}$ (3; -2) и $\vec{b}$ (0;1). Найдите скалярное произведение $\vec{a} * \vec{b}$

Ответ: -2

б) Даны векторы $\vec{a}$ (4; 8) и $\vec{b}$ (-2;1). Найдите скалярное произведение $\vec{a} * \vec{b}$

Ответ: 0

в) Даны векторы $\vec{a}$ (3; -7) и $\vec{b}$ (-4;9). Найдите скалярное произведение $\vec{a} * \vec{b}$

Ответ: -75

№4

а) Длина вектора $\vec{a}$ равна $2\sqrt{2}$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45°, а скалярное произведение $\vec{a} * \vec{b}$ равно 12. Найдите длину вектора $\vec{b}$.

Ответ: 6

б) Длина вектора $\vec{a}$ равна $2\sqrt{2}$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45°, а скалярное произведение $\vec{a} * \vec{b}$ равно 28. Найдите длину вектора $\vec{b}$.

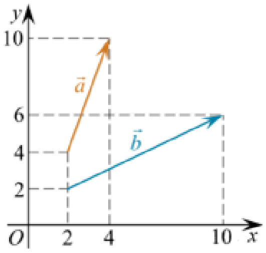
Ответ: 14

в) Длина вектора $\vec{a}$ равна $2\sqrt{2}$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45°, а скалярное произведение $\vec{a} * \vec{b}$ равно 30. Найдите длину вектора $\vec{b}$.

Ответ: 15

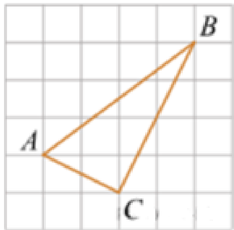
№5

а) Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Ответ: 40

б) На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен треугольник ABC. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



Ответ: 5

№6

а) Даны векторы $\vec{m}$ (2;-3), $\vec{n}$ (-2;1), $\vec{l}$ (2;3) и $\vec{s}$ (2;-6). Найдите скалярное произведение $(\vec{m} - \vec{n}) \cdot (\vec{l} - \vec{s})$.

Ответ: -12.

б) Даны векторы $\vec{m}$ (4;-6), $\vec{n}$ (-4;2), $\vec{l}$ (4;6) и $\vec{s}$ (4;-12). Найдите скалярное произведение $(\vec{m} - \vec{n}) \cdot (\vec{l} - \vec{s})$.

Ответ: -144.

в) Даны векторы $\vec{m}$ (-2;7), $\vec{n}$ (1;-3), $\vec{l}$ (-2;5) и $\vec{s}$ (2;6). Найдите скалярное произведение $(\vec{m} - \vec{n}) \cdot (\vec{l} - \vec{s})$.

Ответ: 2.

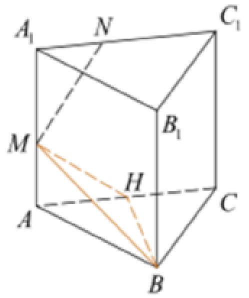
Задача с развернутым ответом

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро равно 5. На ребрах AA_1 и A_1C_1 выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = A_1N = 2$.

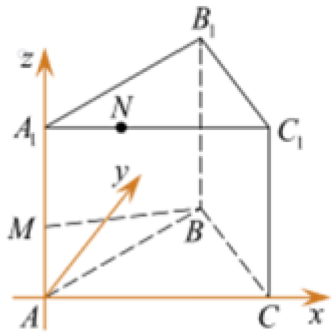
а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMN и ACC_1.

Решение:



а) Найдем координаты необходимых точек. M (0; 0; 2), $B(3; 3\sqrt{3}; 0)$, N (2; 0; 5). Координатой точки B по оси y является длина высоты треугольника, которая находится по следующей формуле: $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (только равносторонний треугольник).



Теперь зададим прямые векторами и найдем скалярное произведение:

$\vec{BM} = (3; 3\sqrt{3}; -2)$, $\vec{MN} = (2; 0; 3)$,
$\vec{BM} \cdot \vec{MN} = 6 - 6 = 0$,

прямые перпендикулярны, что и требовалось доказать.

б) Найдем уравнение плоскости BMN

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \begin{cases} 2c + d = 0, \\ 3a + 3\sqrt{3}b + d = 0, \\ 2a + 5c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -2c, \\ 3\sqrt{3}b = \frac{9}{2}c + 2c, \\ 2a = -3c \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = -2c, \\ b = \frac{13}{6\sqrt{3}}, \\ a = -\frac{3}{2}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 6\sqrt{3}, \\ d = 12\sqrt{3}, \\ b = 13, \\ a = -9\sqrt{3}. \end{cases}$$

Получаем вектор нормали: $\vec{n}_1 = (-9\sqrt{3}; 13; 6\sqrt{3})$.

Теперь найдем вектор нормали плоскости ACC_1. Можно сразу его написать, так как из чертежа видно, что ось Oy по сути является нормалью к плоскости $\vec{n}_2 = (0;\, 1;\, 0)$.

Подставляем все в формулу для угла:

$$\cos\alpha = \frac{13}{\sqrt{81\cdot 3 + 13^2 + 36\cdot 3}} = \frac{13}{\sqrt{169 + 117\cdot 3}} = \\ = \frac{13}{\sqrt{520}} = \frac{13}{2\sqrt{130}} = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{13}{10}}.$$

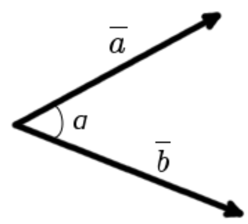
Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{39}}{13}$.

Занятие 32. Угол между векторами

Колмакова Ольга Александровна

Углом между двумя векторами, отложенными от одной точки, называется кратчайший угол, на который нужно повернуть один из векторов вокруг своего начала до положения сонаправленности с другим вектором.

Косинус угла между векторами равен скалярному произведению векторов, поделенному на произведение модулей векторов.



Формула вычисления угла между векторами $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

Проверяем себя

Т1. Заполните пропуски:

а) Углом между двумя векторами, отложенными от одной _______, называется кратчайший угол, на который нужно повернуть один из _________вокруг своего начала до положения ____________с другим вектором.
Ответ: точки, векторов, сонаправленности
б) Косинус угла между векторами равен скалярному ____________векторов, поделенному на произведение _______ векторов.
Ответ: произведению, модулей

Т2. Укажите верные утверждения:

а) Произведение вектора на число 0 равно нулю.

б) Сонаправленные вектора равны.

в) Косинус угла между векторами равен скалярному произведению векторов, поделенному на произведение модулей векторов.

Ответ: а ,в

Т3. Укажите неверные утверждения:

а) Сумма двух векторов это число

б) Формула вычисления угла между векторами $\cos a = \vec{a} * \vec{b}$.

в) Сонаправленные вектора равны, если их длины равны.

Ответ а, б

Решаем задачи

№1

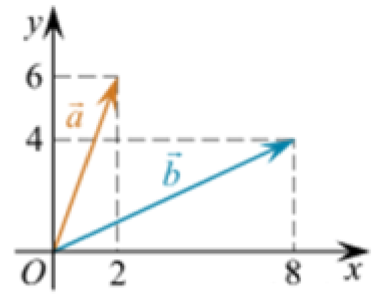
а) Даны векторы $\vec{a}$ (3;4) и $\vec{b}$ (-4;-3) Найдите косинус угла между ними.
Ответ : -0,96

б) Даны векторы $\vec{a}$ (6;8) и $\vec{b}$ (-8;-6) Найдите косинус угла между ними.
Ответ : -0,96

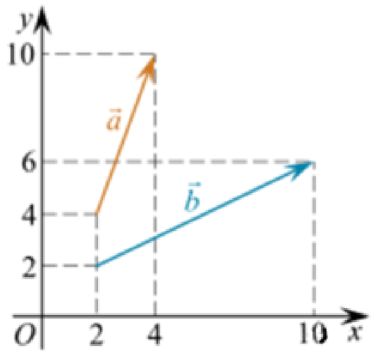
в) Даны векторы $\vec{a}$ (-5;5) и $\vec{b}$ (5;-5) Найдите косинус угла между ними.
Ответ : -1

№2

а) Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ответ дайте в градусах.
Ответ :45



б) Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ответ дайте в градусах.
Ответ : 45



№3

а) В треугольнике с вершинами в точках A(2;8) , B (-1;5) и C (3;1). Найдите косинус угла A.
Ответ: 0,6

б) В треугольнике с вершинами в точках A(4;8) , B (-1;3) и C (3;1). Найдите косинус угла A.
Ответ: 0,8

в) В треугольнике с вершинами в точках A(-4;8) , B (2;14) и C (4;0). Найдите косинус угла C.
Ответ: 0,8

№ 4

а) В треугольнике с вершинами в точках A(2;4) , B (2;8) и C (6;4). Найдите угол A.

Ответ: 90

б) В треугольнике с вершинами в точках A(8;2) , B (4;2) и C (6;4). Найдите угол A. *Ответ: 90*

в) В треугольнике с вершинами в точках A(6;4) , B (8;2) и C (8;6). Найдите угол A.

Ответ: 90

№ 5

а) В четырёхугольникеABCD с вершинами в точках A(3;3), B(1;5), C(4,5;5,5) и D (6;2) найдите угол между диагоналями. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 90

б) В четырёхугольникеABCD с вершинами в точках A(-3;-2), B(2;-3), C(9;6) и D (4;7) найдите угол между диагоналями. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 45

Задача с развернутым ответом

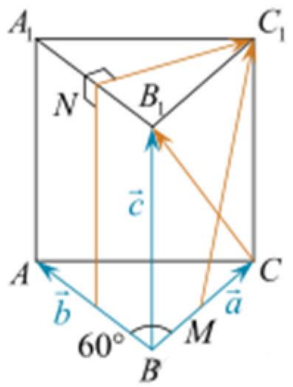
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны рёбра: $AB = 4\sqrt{2}$, $AA_1 = 4$. Точка M — середина ребра BC.

а) Докажите, что прямые B_1C и C_1M перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямой C_1M и плоскостью грани ABB_1A_1.

Решение:

а) Введем векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ как показано на рисунке и выразим через введённый базис векторы



$$\overrightarrow{MC_1} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}, \qquad \overrightarrow{CB_1} = \vec{c} - \vec{a}.$$

Боковое ребро перпендикулярно плоскости основания, а значит, и любой лежащей в ней прямой, поэтому $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = \cos(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = 0,$ откуда

$$\overrightarrow{MC_1} \cdot \overrightarrow{CB_1} = \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}\right) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) =$$
$$= \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{c}| \cdot 0 - \frac{1}{2}\vec{a}^2 + \vec{c}^2 - |\vec{a}||\vec{c}| \cdot 0 = -\frac{1}{2}\vec{a}^2 + \vec{c}^2.$$

Подставляя $\vec{a}^2 = 32,\ \vec{c}^2 = 16,$ получим

$$\overrightarrow{MC_1} \cdot \overrightarrow{CB_1} = -\frac{1}{2} \cdot 32 + 16 = 0.$$

Значит, прямые B_1C и C_1M перпендикулярны, что и требовалось доказать.

б) Пусть искомый угол между прямой C_1M и плоскостью грани ABB_1A_1 равен α. Чтобы найти его, нужно знать вектор, перпендикулярный к плоскости AA_1B_1B.

Это вектор $\overrightarrow{NC_1} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$ Тогда

$$\sin\alpha = \frac{\overrightarrow{NC_1}\cdot\overrightarrow{MC_1}}{|\overrightarrow{NC_1}|\cdot|\overrightarrow{MC_1}|} = \frac{(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b})\cdot(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c})}{\sqrt{(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b})^2\cdot(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c})^2}}.$$

Учитывая, что $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{1}{2}$, получаем:

$$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}\vec{a}^2+0-\frac{1}{4}|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\frac{1}{2}-0}{\sqrt{(\vec{a}^2+\frac{1}{4}\vec{b}^2-2|\vec{a}|\cdot\frac{1}{2}|\vec{b}|\cdot\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{4}\vec{a}^2+\vec{c}^2+0)}} =$$
$$= \frac{16-4}{\sqrt{(32+8-16)\cdot(8+16)}} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

Значит, $\alpha = 30^\circ$.

Ответ: б) 30°.

Занятие 33. Проверочная работа

Власова Александра Анатольевна

Вариант 1

1) Радиус основания цилиндра равен 5, а высота цилиндра равна 6. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 от неё.

Ответ: 36.

2) Радиус шара равен 17. Найдите площадь сечения шара, удаленного от его центра на 15.

Ответ: 64π

3) Радиус основания конуса равен 3, а высота 4. Найдите образующую и площадь осевого сечения.

Ответ: 5; 12.

4) Образующая конуса равна 6, высота 3. Найдите объем конуса.

Ответ: 27π

5) Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $2\sqrt{2}$. Найдите объем цилиндра.

Ответ: 2π

6) Диаметр шара равен высоте конуса, образующая которого составляет с плоскостью основания угол, равный 60º. Найдите отношение объемов конуса и шара.

Ответ: 2:3

7) Объем цилиндра равен 96π, площадь его осевого сечения 48. Найдите площадь сферы, описанной около цилиндра.

Ответ: 100π

Вариант 2

1) Высота цилиндра 8, радиус основания 5. Цилиндр пересечен плоскостью параллельно оси так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси цилиндра.

Ответ: 3

2) Радиус сферы равен 15. Найдите длину окружности сечения, удаленного от центра сферы на 12.

Ответ: 18π

3) Образующая конуса равна 4 и наклонена к плоскости основания под углом в 30^o. Найдите высоту конуса и площадь осевого сечения.

Ответ: 2; 12π

4) Образующая конуса, равная 12, наклонена к плоскости основания под углом 30^o. Найдите объем конуса.

Ответ: 216π

5) Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $8\sqrt{2}$. Найдите объем цилиндра.

Ответ: 108π

6) Диаметр шара равен высоте цилиндра, осевое сечение которого есть квадрат. Найдите отношение объемов шара и цилиндра.

Ответ: 2:3

7) В конус, осевое сечение которого есть правильный треугольник, вписан шар. Найдите отношение площади сферы к площади боковой поверхности конуса.

Ответ: 3:2

Занятие 34. Итоговое занятие.

Власова Александра Анатольевна

<u>Пример 1</u>. Через диагональ нижнего и вершину верхнего основания правильной четырехугольной призмы проведена плоскость, пересекающая две смежные боковые грани призмы по прямым, угол между которыми равен α. Определить объем призмы, если ребро ее основания равно a.

<u>Решение</u>. По условию сторона основания призмы равна AB = a, AD_1C – сечение и $\angle \mathbf{AD_1C} = \alpha$ *(рис. 1)*. *$AD_1 = D_1C$ как диагонали равных граней. Тогда D_1O является медианой, а, следовательно, и биссектрисой треугольника AD_1C.*

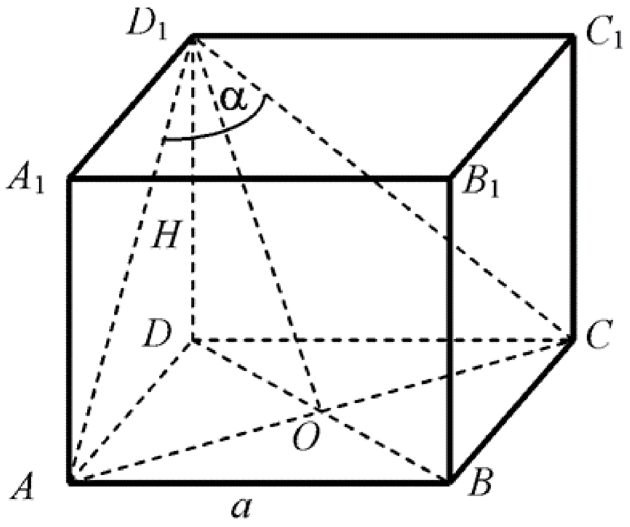


Рис. 1

Зная сторону квадрата, находим $S_{осн} = a^2$ и диагональ $AC = a\sqrt{2}$.

Из треугольника AD_1O имеем:

$$AD_1 = \frac{AO}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

из треугольника ADD_1:

$$H = \sqrt{AD_1^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - a^2} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2 - 4\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2\cos\alpha}.$$

Тогда:

$$V = S_{осн} \cdot H = \frac{a^3}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2\cos\alpha}.$$

Пример 2. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости основания под углом α и удалено от середины противоположной стороны основания на расстояние b. Определить объем пирамиды.

Решение. Из вершины A (рис. 2) проведем высоту треугольника AD, где D – середина BC. Из точки D опустим перпендикуляр DE на сторону AS; по условию $DE = b$. Проведем высоту SO. Так как у пирамиды все боковые ребра наклонены под одним и тем же углом к плоскости основания, то основание высоты пирамиды (точка O) совпадает с центром окружности, описанной около основания пирамиды (эта же точка служит точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам основания пирамиды).

Следовательно, точка O является точкой пересечения медиан, высот и биссектрис треугольника ABC (так как треугольник равносторонний).

AO - проекция ребра AS, поэтому $\angle SAO = \alpha$.

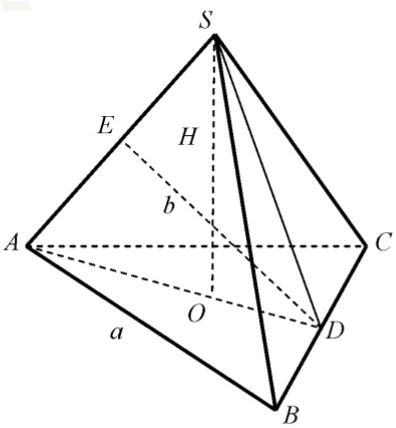


Рис. 2

Обозначим сторону основания через a и высоту через H, имеем

Тогда из треугольника ADE: $S_{осн} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и $AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$AD = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{DE}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha},$$ откуда $$a = \frac{2b}{\sqrt{3}\sin\alpha}.$$

Так как медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины треугольника, то

$$AO = \frac{2}{3}AD = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2b}{3\sin\alpha}$$

и из треугольника *AOS*

$$SO = H = AO \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{2b\operatorname{tg}\alpha}{3\sin\alpha} = \frac{2b}{3\cos\alpha}.$$

Следовательно,

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{4b^2\sqrt{3}}{3 \cdot 4 \cdot \sin^2\alpha} \cdot \frac{2b}{3\cos\alpha} = \frac{4b^3\sqrt{3}}{27\sin\alpha\sin 2\alpha}.$$

Пример 3. Два конуса имеют общее основание, причем один из них находится внутри другого. Образующие этих конусов составляют с плоскостью основания α и β *(*$\alpha > \beta$*)*. Определить объем тела, заключенного между боковыми поверхностями этих конусов, если известно, что сумма высот обоих конусов *m*.

Решение. По условию $\angle SAO = \alpha$, $\angle S_1AO = \angle S_1BO = \beta$ (рис. 3). Если обозначим высоты конусов SO = H, а S1O = h, то H + h = m.

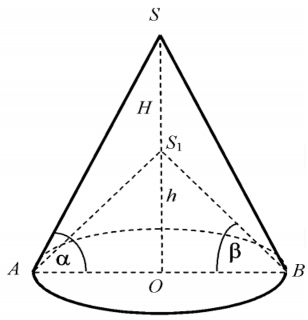


Рис. 3

$$V = V_{SAB} - V_{S_1AB} = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^2 (H - h),$$

где R – радиус основания.

Из треугольника *SAO* $SO = H = R\operatorname{tg}\alpha$, а из треугольника $S_1O = h = R\operatorname{tg}\beta$.

По условию $H + h = m$,

$R\operatorname{tg}\alpha + R\operatorname{tg}\beta = m$,

Откуда

$$R = \frac{m}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \frac{m\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

и

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2(H-h) = \frac{1}{3}\pi R^3(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\frac{m^3\cos^3\alpha\cos^3\beta}{\sin^3(\alpha+\beta)}\cdot\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\pi m^3\cos^2\alpha\cos^2\beta\sin(\alpha-\beta)}{3\sin^3(\alpha+\beta)}.$$

Пример 4. В конус вписан шар. Отношение объема конуса к объему вписанного шара равно $\frac{9}{4}$. Найти угол между образующей и плоскостью конуса.

Решение. По условию отношение конуса к объему вписанного шара равно $\frac{9}{4}$. Требуется определить $\angle SBO = \angle SAO = \alpha$ (рис. 4).

Сечение шара плоскостью *SAB* дает окружность, вписанную в треугольник *SAB*. Центр шара (окружности) лежит на пересечении биссектрис. Обозначив радиус шара через R, радиус основания конуса через r, высоту конуса через *H*, имеем:

$$V_к = \frac{1}{3}\pi r^2 H; \qquad V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3. \qquad \frac{V_к}{V_ш} = \frac{r^2 H}{4R^3} = \frac{9}{4}.$$

Из треугольника OO_1A находим

$$R = r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

А из треугольника SOA имеем:

$H = r\operatorname{tg}\alpha$

Тогда

$$\frac{r^3\operatorname{tg}\alpha}{4r^3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}} = \frac{9}{4}$$

или

откуда

$$\mathrm{tg}\,\alpha = 9\,\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}; \qquad \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = 9\,\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}; \qquad 9\,\mathrm{tg}^4\frac{\alpha}{2} - 9\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 2 = 0,$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$$

Учитывая, что α – острый угол, имеем

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{и} \quad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\ .$$

Следовательно, $\alpha = 60^o$ *и* $\alpha = 2\ arctg\sqrt{\frac{2}{3}}$

Пример 5. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса *R*.

Решение. Рассмотрим сечение шара плоскостью, которая проходит через ось конуса (рис. 4).

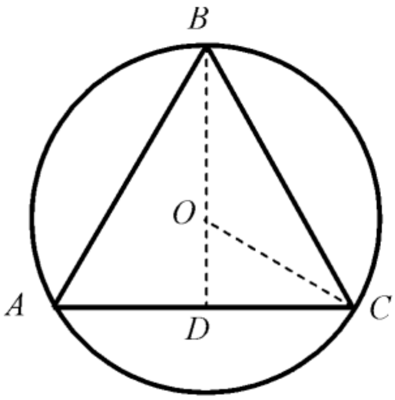


Рис. 4

По условию задачи $OA = OB = OC = R$. Обозначим высоту вписанного конуса $BD = x$ и выразим радиус основания конуса DC через x. Так как $OD = BD – OB = x - R$, то из прямоугольного треугольника ODC находим

$$DC=\sqrt{OC^2-OD^2}=\sqrt{R^2-(x-R)^2}=\sqrt{2xR-x^2}$$

Следовательно, объем конуса

$$V=\frac{1}{3}\pi DC^2\,BD=\frac{1}{3}\pi\left(2x^2R-x^3\right).$$

Таким образом, задача свелась к нахождению наибольшего значения функции *V(x)* на отрезке *[0;2R].* Найдем производную функции *V(x)*:

$$V'(x)=\frac{1}{3}\pi\left(4xR-3x^2\right).$$

Приравнивая производную к нулю, получаем уравнение

$$\frac{1}{3}\pi\left(4xR-3x^2\right)=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0,\quad x_2=\frac{4R}{3}.$$

Найдем значения V(x) на концах отрезка *[0;2R]* и в точке x = $\frac{4R}{3}$.

V(0) = V(2R) = 0, а

$$V\left(\frac{4R}{3}\right)=\frac{32\pi R^3}{81}.$$

Следовательно, объем конуса будет наибольшим, если его высота равна $\frac{4R}{3}$.

Проверяем себя

Т1. Заполните пропуски:

а) Если прямая _________________, то она перпендикулярна этой плоскости.

Ответ: перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости.

б) Если проекция наклонной перпендикулярна прямой на плоскости, то

________________________________.

Ответ: сама наклонная перпендикулярна этой прямой.

Т2. Укажите верное утверждение:

а) если одна из параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то другая прямая параллельна этой плоскости;

б) если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то их линия пересечения параллельна этой плоскости;

в) углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и ее проекцией на эту плоскость.

Ответ: в)

Т3. Укажите неверное утверждение:

а) отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны;

б) все линейные углы двугранного угла различны;

в) угол между двумя плоскостями равен углу между перпендикулярным им прямым.

Ответ: б)

Решаем задачи

№1

Найти объем прямоугольного параллелепипеда, если стороны его основания равны 3 и 4, а диагональ параллелепипеда равна $5\sqrt{2}$.

Ответ: 60.

№2

Найти объем прямой призмы, если площадь ее боковой поверхности равна 3, в основании лежит параллелограмм со сторонами 3 и 4, а угол между ними равен $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\frac{9}{7}$.

№3

Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом 60°, угол между меньшей диагональю ромба и меньшей диагональю призмы равен 30°. Определить объем призмы, если меньшая диагональ ромба равна d.

Ответ: 32.

№4

Найти объем правильной треугольной призмы, если сторона ее основания равна 4, а угол между диагоналями боковых граней, исходящими из одной вершины, равен arccos 0,68.

Ответ: $12\sqrt{3}$.

№5

Найти угол наклона бокового ребра правильной треугольной пирамиды к ее основанию, если высота пирамиды и сторона основания равны 2.

Ответ: 60°.

№6

В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 6, 8 и 10. Боковые ребра пирамиды образуют с основанием углы по 45°. Найти объем пирамиды.

Ответ: 40.

№7

Найти площадь сечения правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания перпендикулярно боковому ребру, если сторона основания равна $\sqrt{3}$, а боковое ребро равно *2*.

Ответ: 1,125.

№8

Найти площадь сечения правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через середину высоты пирамиды параллельно боковой грани, если сторона основания равна 12, а высота пирамиды равна $2\sqrt{6}$.

Ответ: 25.

№9

Площади сечений параллельных оси цилиндра, находящихся по одну сторону от оси, равны 120 и 160. Радиус и высота цилиндра равна 10. Найдите расстояние между плоскостями сечений.

Ответ: 2.

№10

Высота цилиндра равна 3. Равнобедренный треугольник ABC с боковой стороной 10 углом $\angle A = 120°$ расположен так, что его вершина A лежит на окружности нижнего основания цилиндра, а вершины B и C – на окружности верхнего основания. Найдите синус угла между плоскостью ABC и плоскостью цилиндра.

Ответ: 0,6.

№11

В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 10. Боковые ребра равны $\frac{6}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

Ответ: 300.

№12

Площадь развертки боковой поверхности цилиндра равна 30, высота цилиндра $\frac{3}{\pi}$. Найдите объем цилиндра.

Ответ: 75.

№13

Высота конуса равна диаметру его основания. Найти отношение площади основания к боковой поверхности конуса.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

№14

Равнобедренный треугольник с основанием $\frac{9}{\pi}$ и высотой $7\sqrt{2}$ вращается вокруг основания. Найти объем фигуры вращения.

Ответ: 294.

№15

Развертка боковой поверхности конуса представляет собой четверть круга радиуса 4. Найти площадь основания конуса. Ответ:

Ответ: 180°.

№16

Отношение объема усеченного конуса к объему вписанного в него шара равно $\frac{13}{6}$. Найти угол между образующей конуса и его основанием.

Ответ: 60°.

Список использованных источников

Литература

1. Геометрия: 10-11 классы: учебник для общеобразовательных организаций/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М: «Просвещение», 2024.
2. Ерина Т.М. ЕГЭ 2022. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Практическое руководство / Т.М. Ерина – Издательство «Экзамен», 2022. – 350, [2] с. (Серия «ЕГЭ. 100 баллов») - ISBN 978-5-377-17289-8
3. Потоскуев Е.В. ЕГЭ 2022. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Опорные задачи по геометрии. Планиметрия. Стереометрия / Е.В. Потоскуев. – М.: Издательство «Экзамен», 2022 – 223, [1] с. (Серия «ЕГЭ.100 баллов») – ISBN 978-5-377-17259-8
4. Мордкович А.Г., Глизбург В.И., Лаврентьев Н.Ю. Математика. Новый полный справочник школьника для подготовки к ЕГЭ. «Образовательные проекты». - ISBN 978-5-17-139154-6.
5. Ященко И.В., Шестаков С.А. Я сдам ЕГЭ! Математик. Геометрия. Типовые задания. Москва, издательство «Просвещение» 2018. - ISBN 978-5-09-056027.
6. Лысенко, Ф.Ф. Математика. 10-11 класс. Тренажёр для подготовки к ЕГЭ. Алгебра, планиметрия, стереометрия / Ф.Ф. Лысенко. - М.: Легион, 2014. - 876 с.

Интернет-ресурсы

1. ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений» Открытый банк заданий ОГЭ по математике https://fipi.ru/oge/otkrytyy-bank-zadaniy-oge#!/tab/173942232-2
2. ФГБУ «Федеральный институт оценки качества образования» образцы и описания проверочных работ для проведения ВПР в 2021 году https://fioco.ru.
3. Открытый банк задач ЕГЭ по Математике (базовый и профильный уровни) (https://base.mathege.ru/, https://prof.mathege.ru/).
4. https://multiurok.ru/blog/istoriia-vozniknoveniia-sinusa.html
5. Образовательный портал для подготовки к экзаменам https://ege.sdamgia.ru/
6. Видео уроки https://videouroki.net/tests/tiest-po-tiemie-paralliel-nost-priamykh-i-ploskostiei-variant-4.html
7. Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ по математике https://math100.ru
8. Inter урок https://interneturok.ru
9. Статья Wikipedia – Цилиндр https://ru.wikipedia.org/wiki/Цилиндр
10. Лицей Ростелеком wikipedia https://lc.rt.ru/classbook/matematika-10-klass/stereometriya-90/706

Учебно-методическое пособие

Реализация курса «Практикум по геометрии 11 класс»

Формат бумаги 60x84/8. Усл. печ. л. 25.76 Тираж 100 экз.
Отпечатано: 350080, г. Краснодар, ул. Сормовская, 167,
ГБОУ ИРО Краснодарского края
Информационно-издательский ресурсный центр