



# Удивительный мир чисел



Андрафанова Наталия Владимировна  
Кубанский казачий кадетский корпус  
имени атамана М.П.Бабыча, г. Краснодар  
учитель математики

С 1 декабря 2024 год отмечается профессиональный праздник – *День математика*.



Этот профессиональный праздник учреждён в честь великого русского математика Николая Ивановича Лобачевского (1792–1856), внёсшего неоценимый вклад в отечественную науку.



Пифагору приписывают слова: «Все есть число».



Один из последователей Пифагора писал: *«Если бы не число и его природа, ничто существующее нельзя было бы постигнуть ни само по себе, ни в его отношении к другим вещам. Мощь чисел проявляется во всех действиях и помыслах людей, во всех ремеслах и музыке».*

По мнению Пифагора, числа были основой всего сущего.

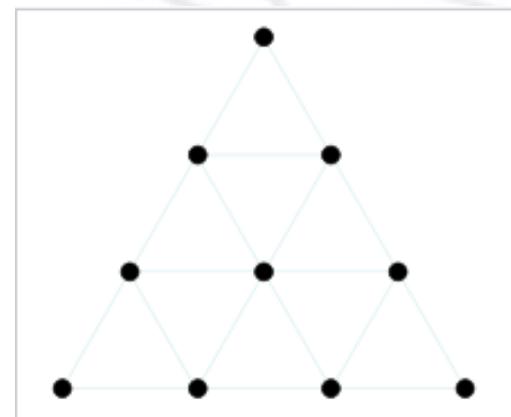
Четыре элемента, из которых по воззрениям

древнегреческих мудрецов состоял мир, то есть огонь, землю, воздух и воду, он обозначил числами 1, 2, 3 и 4.

Весь мир (Вселенную) он обозначал числом 10:

$1+2+3+4$  («священная четверица»)

Священный символ *Тетрактис*  
демонстрировал совершенство и  
математическую точность организации  
пространства и Вселенной.



# Числа с фантастическими названиями

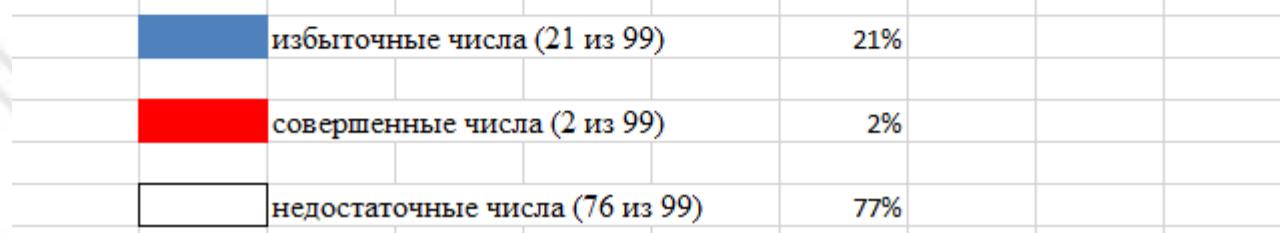
## Натуральные числа

Избыточные  
(менее 25%)

Совершенные  
(малая доля)

Недостаточные  
(примерно 75%)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



# *Совершенные числа*

Натуральное число считается *совершенным*, если оно равно сумме своих делителей, отличных от самого числа:

$$6=1+2+3$$

I-II в.

$$28=1+2+4+7+14$$

$$496=1+2+4+8+16+31+62+124+248$$

$$8128=1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4084$$

$$33\ 550\ 336$$

XV в.

$$2^{756838}(2^{756839}-1)$$

состоит из 455 663 цифр

# Совершенные числа

*Свойство 1.* Все совершенные числа (кроме 6) являются суммой кубов последовательных нечетных натуральных чисел:

$$28 = 1^3 + 3^3$$

...

$$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$$

*Свойство 2.* Сумма всех чисел, обратных делителям совершенного числа (включая само число), равна 2.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 2$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{31} + \frac{1}{62} + \frac{1}{124} + \frac{1}{248} + \frac{1}{496} = 2$$

# *Совершенные числа*

*Свойство 3.* Все четные совершенные числа, кроме 6 и 496, заканчиваются в десятичной записи на 16, 28, 36, 56 или 76.

6, **28**, ~~496~~, 8128, 33 550 336, 8 589 869 056, ...

*Свойство 4.* Если сложить все цифры четного совершенного числа (кроме 6), затем сложить все цифры полученного числа и так повторять, пока не получится однозначное число, то это число будет равно 1.

6

28:  $2+8=10$ ,  $1+0=\mathbf{1}$

496:  $4+9+6=19$ ,  $1+9=10$ ,  $1+0=\mathbf{1}$

8128:  $8+1+2+8=19$ ,  $1+9=10$ ,  $1+0=\mathbf{1}$ ...

# *Совершенные числа*

*Свойство 5.* Все четные совершенные числа являются треугольными числами, т.е. могут быть представлены в виде  $n \cdot (2n-1)$  для некоторого натурального  $n$ :

$$n=2, 2 \cdot (2 \cdot 2 - 1) = 6$$

$$n=4, 4 \cdot (2 \cdot 4 - 1) = 28$$

$$n=16, 16 \cdot (2 \cdot 16 - 1) = 496\dots$$

## Совершенные числа

*Свойство 6.* Число  $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$  является совершенным, если число  $2^n - 1$  является простым (имеет ровно два различных натуральных делителя: 1 и само себя).

Алгоритм построения чисел описан в «Началах» Евклида в предложении 36 книги IX. Доказан в XVIII веке Леонардом Эйлером.

$$n = 2, \quad 2^{2-1} \cdot (2^2 - 1) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$n = 3, \quad 2^{3-1} \cdot (2^3 - 1) = 4 \cdot 7 = 28$$

$$n = 5, \quad 2^{5-1} \cdot (2^5 - 1) = 16 \cdot 31 = 496$$

$$n = 7, \quad 2^{7-1} \cdot (2^7 - 1) = 64 \cdot 127 = 8128$$

$$n = 31, \quad 2^{31-1} \cdot (2^{31} - 1) = 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 1073741824 = 2305843008139952128$$

# Программа поиска совершенных чисел

1.По определению совершенных чисел  
(результат –только первые 4 числа)

```
var N,i,j, sum:longint;
begin
Write ('Введите N: '); readln(N);
for i:=2 to N do
begin
  Sum:=0;
  For j:=1 to i-1 do
    If I mod j = 0 then sum:=sum+j;
  If sum=i then writeln (i, ' совершенное');
end
end.
```

## Окно вывода

```
Введите N: 1000000000
6 совершенное
28 совершенное
496 совершенное
8128 совершенное
```

2.По определению совершенных чисел  
(поиск делителей уменьшен в 2 раза)

```
var N,i,j, Sum:int64;
Begin
Write ('Введите N: '); readln(N);
i:=2;
while i<=N do
begin
  Sum:=1;
  j:=2;
  while j*j<i do
  begin
    If i mod j = 0 then Sum:=Sum+j+ i div j;
    j:=j+1;
  end;
  If Sum=i then writeln (i, ' совершенное');
  i:=i+2
end
End.
```

## Окно вывода

```
Введите N: 100000000
6 совершенное
28 совершенное
496 совершенное
8128 совершенное
33550336 совершенное
```

При

## Дружественные числа

<b>220</b>	2	Делители:	<b>284</b>	2	Делители:
110	2	2·2=4	142	2	2·2=4
55	5	2·5=10	71	71	2·71=142
11	11	2·11=22	1		
1		2·2·5=20			
		2·2·11=44	284=2·2·71·1		1,2,4,71,142,284
		5·11=55			
Пара		<b>220=2·2·5·11·1</b>	<b>1,2,4,5,10,11,20,22,44,55,110,220</b>		

220: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220 (делители),

284: 1, 2, 4, 71, 142, 284 (делители).

Сумма собственных делителей числа **220**:

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=\mathbf{284}.$$

Сумма собственных делителей числа **284**:

$$1+2+4+71+142=\mathbf{220}$$

Формула Сабита ибн Куры:

$$p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$$

$$2^n pq \quad \text{и} \quad 2^n r$$

$$q = 3 \cdot 2^n - 1$$

$$r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$$

$$n = 2$$

$$p = 3 \cdot 2^{2-1} - 1 = 3 \cdot 2 - 1 = 5,$$

$$q = 3 \cdot 2^2 - 1 = 3 \cdot 4 - 1 = 11,$$

$$r = 9 \cdot 2^{2 \cdot 2 - 1} - 1 = 9 \cdot 8 - 1 = 71,$$

$$2^n pq = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 = 220,$$

$$2^n r = 2^2 \cdot 71 = 284$$

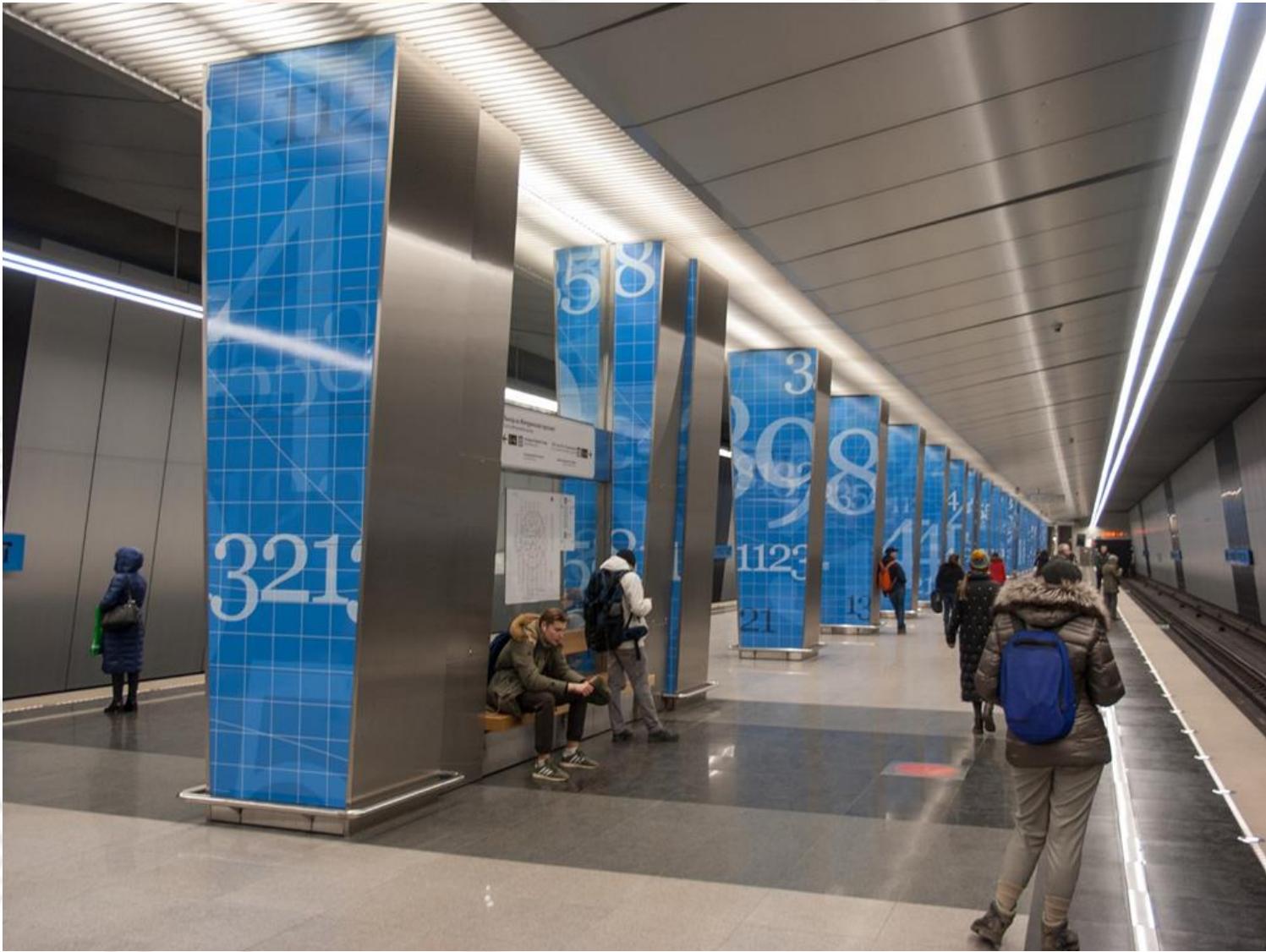
# Компанейские числа

12496		Делители:		Делители:		14288		Делители:		Делители:	
6248	2	2	2-2-2-11-71=6248	1	7144	2	2	2-2-2-19-47=7144	1		
3124	2	2-2=4	2-2-11-71=3124	2	3572	2	2-2=4	2-2-19-47=3572	2		
1562	2	2-2-2=8	2-11-71=1562	4	1786	2	2-2-2=8	2-19-47=1786	4		
781	11	2-2-2-2=16	11-71=781	8	893	19	2-2-2-2=16	19-47=893	8		
71	71	11	2-2-2-2-71=1136	11	47	47	19	2-2-2-2-47=752	16		
1		2-11=22	2-2-71=568	16	1		2-19=38	2-2-2-47=376	19		
		2-2-11=44	2-2-71=284	22			2-2-19=76	2-2-47=188	38		
12496=2·2·2·2·11·71·1		2·2·2·11=88	2·71=142	44	14288=2·2·2·2·19-47·1		2·2·2·19=152	2·47=94	47		
		2·2·2·2·11=176	71	71			2·2·2·2·19=304	47	76		
		1	12496	88			1	14288	94		
				142					152		
				176					188		
				284					304		
				568					376		
				781					752		
				1136					893		
				1562					1786		
				3124					3572		
				6248					7144		
				Сумма: 14288 !!!					Сумма: 15472 !!!		

15472		Делители:		Делители:		14536		Делители:		Делители:	
7736	2	2	2-2-967=7736	1	7268	2	2	2-2-23-79=7268	1		
3868	2	2-2=4	2-2-967=3868	2	3634	2	2-2=4	2-23-79=3634	2		
1934	2	2-2-2=8	2-967=1934	4	1817	23	2-2-2=8	23-79=1817	4		
967	967	2-2-2-2=16	967	8	79	79	23	2-2-2-79=632	8		
1		1	15472	16	1		2-23=46	2-2-79=316	23		
				967			2-2-23=92	2-79=158	46		
				1934			2-2-2-23=184	79	79		
15472=2·2·2·2·967·1				3868	14536=2·2·2·23-79·1		1	14536	92		
				7736					158		
				Сумма: 14536 !!!					184		
									316		
									632		
									1817		
14264		Делители:		Делители:		14264		Делители:		Делители:	
7132	2	2	2-2-1783=7132	1					3634		
3566	2	2-2=4	2-1783=3566	2					7268		
1783	1783	2-2-2=8	1783	4						Сумма: 14264 !!!	
1		1	14264	8							
				1783							
				3566							
				7132							
14264=2·2·2-1783·1				Сумма: 12496 !!!							

Пример пятерки компанейских чисел: 12 496, 14288, 15 472, 14 536, 14 264.

# *Станция московского метро «Ломоносовский проспект»*



# День Фибоначчи

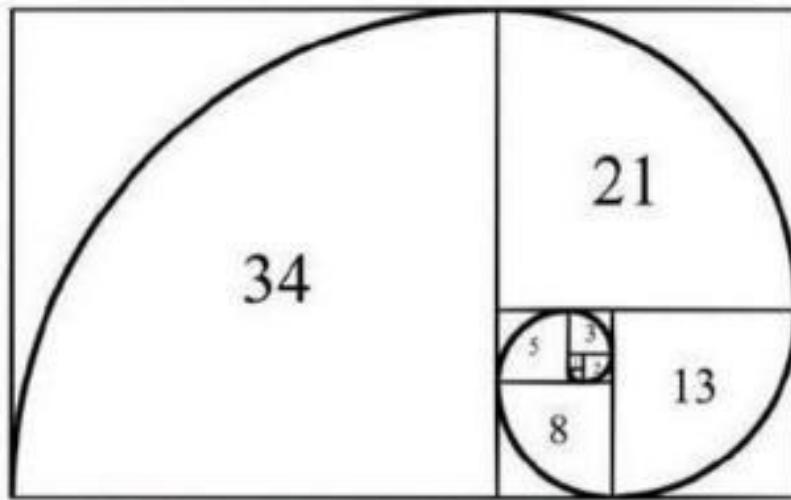


23.11



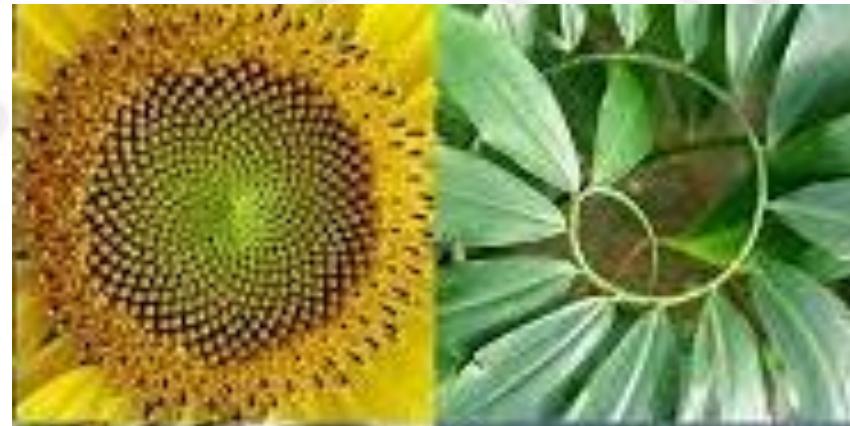
23 ноября в мире принято праздновать «День Фибоначчи». Большинство из людей, скорее всего, не вспомнят этого имени. Некоторые вспомнят «числа Фибоначчи», которые проявляются внезапно в очень различных областях человеческой жизни — от биологии до живописи, художественной фотографии и биржевой торговли...

# Числа Фибоначчи с геометрической точки зрения



0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...

$$\begin{aligned}0 + 1 &= 1 \\1 + 1 &= 2 \\2 + 1 &= 3 \\3 + 2 &= 5 \\5 + 3 &= 8 \\8 + 5 &= 13 \\13 + 8 &= 21 \\21 + 13 &= 34 \\34 + 21 &= 55 \\55 + 34 &= 89 \\89 + 55 &= 144\end{aligned}$$

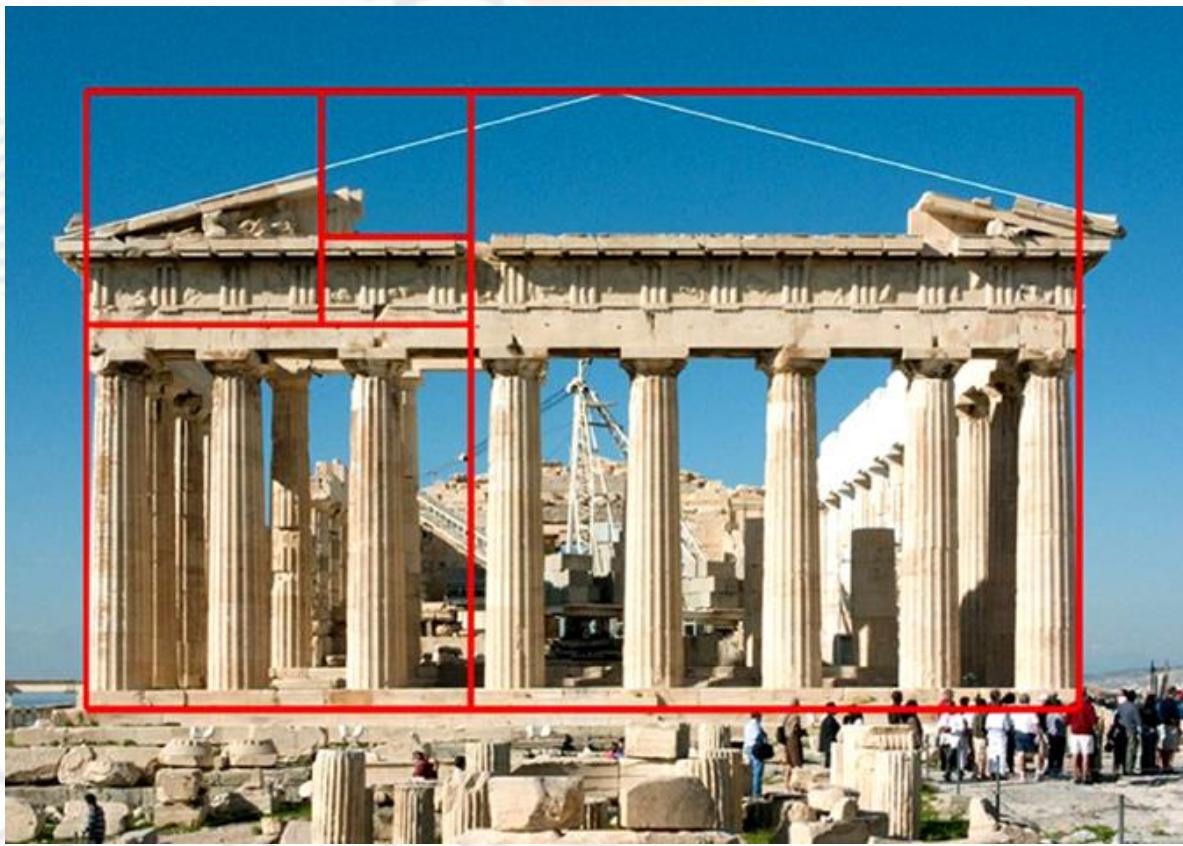
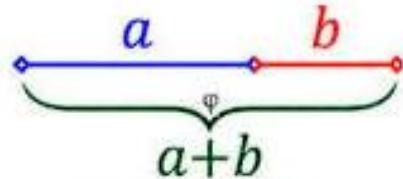


# Число $\Phi$

Божественная пропорция

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

$$\Phi = \frac{a}{b} \approx 1,62$$



	A	B
1	$3/2 =$	1,50000
2	$5/3 =$	1,66667
3	$8/5 =$	1,60000
4	$13/8 =$	1,62500
5	$21/13 =$	1,61538
6	$34/21 =$	1,61905
7	$55/34 =$	1,61765
8	$89/55 =$	1,61818
9	$144/89 =$	1,61798
10	$233/144 =$	1,61806
11	$377/233 =$	1,61803
12	$610/377 =$	1,61804
13	$987/610 =$	1,61803
14	$1597/987 =$	1,61803

# Карл Фридрих Гаусс (1777—1855)



«Математика — царица наук,  
арифметика — царица  
математики»

Задача.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 = ?$$

Ответ: 5050

# *Математические головоломки*

*Задача 1.*

По порядку записаны девять цифр:

1      2      3      4      5      6      7      8      9

Не меняя расположение цифр, вставьте между ними знаки + и – ,  
Чтобы в сумме получилось ровно 100.

*Решение.*

$$12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100 \text{ (шесть знаков действий)}$$

$$123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100 \text{ (четыре знака действия)}$$

$$123 - 45 - 67 + 89 = 100 \text{ (3 знака действия)}$$

# *Интересные свойства чисел и математических действий*

*Число 9 часто встречается в русской народной культуре*

Пословицы

\*\*\*

За тридевять земель, в тридевятом (тридесятом) царстве.

\*\*\*

Девять дней, девять верст — как сокол летел.

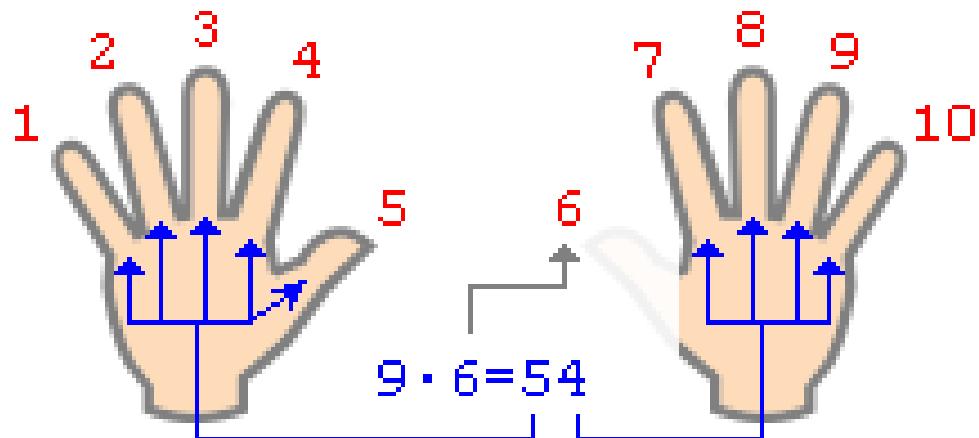
\*\*\*

Кушай, кума, девятую шанежку, я ведь не считаю.

\*\*\*

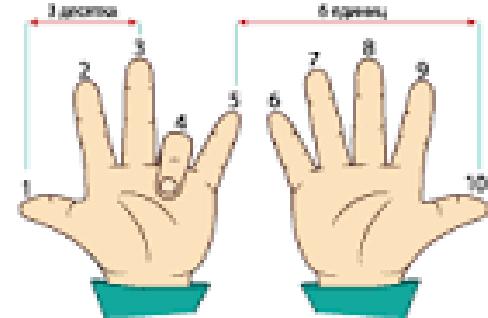
Девять человек — всё равно, что десяток.

# Таблица умножение на 9 на пальцах



## УМНОЖАЕМ НА ПАЛЬЦАХ

Задача для вас, чтобы помочь вам в изучении таблицы умножения на 9. Помогите себе руками и пальцами на разумном и интересном примере пальцев. Число умножения 9 на 6, нужно умножить пальцы и пальчики, пальцы показывают сколько единиц в ответе. Сколько из пальчиков пальчики - 6 пальца (единицы в ответе), пальчики - 6 пальцев (единицы в ответе).  $4 \cdot 9 = 36$



Проверка на пальцах и карточках.

$1 \cdot 9 =$ <input type="text"/>	$6 \cdot 9 =$ <input type="text"/>
$2 \cdot 9 =$ <input type="text"/>	$7 \cdot 9 =$ <input type="text"/>
$3 \cdot 9 =$ <input type="text"/>	$8 \cdot 9 =$ <input type="text"/>
$5 \cdot 9 =$ <input type="text"/>	$9 \cdot 9 =$ <input type="text"/>

9      18      27      36      45      54      63      72      81

9      1+8      2+7      3+6      4+5      5+4      6+3      7+2      8+1

## *Интересные свойства девятерки*

$$1 \times 9 = 09$$

$$90 = 9 \times 10$$

$$2 \times 9 = 18$$

$$81 = 9 \times 9$$

$$3 \times 9 = 27$$

$$72 = 9 \times 8$$

$$4 \times 9 = 36$$

$$63 = 9 \times 7$$

$$5 \times 9 = 45$$

$$54 = 9 \times 6$$

# *Интересные свойства числа 9*

$$1 \times 9 + 2 = \mathbf{11}$$

$$12 \times 9 + 3 = \mathbf{111}$$

$$123 \times 9 + 4 = \mathbf{1111}$$

$$1234 \times 9 + 5 = \mathbf{11111}$$

$$12345 \times 9 + 6 = \mathbf{111111}$$

...

$$12345678 \times 9 + 9 = \mathbf{111111111}$$

## *Интересные свойства числа 9*

$$9 \times 9 + 7 = \mathbf{88}$$

$$98 \times 9 + 6 = \mathbf{888}$$

$$987 \times 9 + 5 = \mathbf{8888}$$

$$9876 \times 9 + 4 = \mathbf{88888}$$

$$98765 \times 9 + 3 = \mathbf{888888}$$

...

$$98765432 \times 9 + 0 = \mathbf{888888888}$$

$$987654321 \times 9 - 1 = \mathbf{8888888888}$$

## *Интересные свойства числа 9*

$$9^2 = 81$$

$$99^2 = 9801$$

$$999^2 = 998001$$

$$9999^2 = 99980001$$

$$99999^2 = 9999800001$$

$$999999^2 = 999998000001$$

...

# *Математические головоломки*

*Задача 1.*

Сможете ли вы быстро умножить на 999....

$$46\ 538 \cdot 999 = ?$$

*Решение:*

$$\begin{array}{r} 46\ 538\dots \\ - \quad 46\ 538 \\ \hline 46\ 491\ 462 \end{array}$$

$$!!!\ 46\ 538 \cdot (1000 - 1) = 456\ 538\ 000 - 46\ 538$$

# *Математические головоломки*

*Задача 2.*

Сможете ли вы быстро разделить на 999....

$$248\ 561 : 999 = ?$$

*Решение:*

$$248\ 561 : 999 = 248 \text{ и } 809 \text{ в остатке } (809 = 248 + 561)$$

*Доказательство:*

$$248\ 561 = 248 \cdot 1000 + 561$$

$$248 \cdot (999 + 1) + 561$$

$$248 \cdot 999 + 248 + 561$$

$$248 \cdot 999 + (248 + 561)$$

$$248 \cdot 999 + 809$$

# Математические головоломки

Задача 3.

Разделите быстро 248 798 на 999.

Решение:

$$\begin{aligned} 248\ 798 : 999 &= \mathbf{248} \quad (1046 = 248 + 798) \\ &\quad (1046 : 999 = 1 \text{ в остатке } 47) \\ &= \mathbf{249} \text{ и } 47 \text{ в остатке} \end{aligned}$$

# Математические головоломки

*Задача 4.*

Остаток от деления любого числа на 9 всегда равен  
полученному при делении суммы цифр этого числа на 9.

*Решение:*

$$1583 : 9 = \mathbf{175} \quad \text{в остатке } 8$$

$$1 + 5 + 8 + 3 = 17$$

$$17 : 9 = 1 \text{ в остатке } 8$$

*Спасибо за внимание!*

*Литература:*

*Щепан Елецкий.* По следам Пифагора. Магические квадраты и волшебные числа.

*Яков Перельман.* Первая сотня головоломок.