



Удивительный мир чисел



Андрофанова Наталия Владимировна
Кубанский казачий кадетский корпус
имени атамана М.П.Бабыча, г. Краснодар
учитель математики

С 1 декабря 2024 год отмечается профессиональный праздник – *День математика*.



Этот профессиональный праздник учреждён в честь великого русского математика Николая Ивановича Лобачевского (1792–1856), внёсшего неоценимый вклад в отечественную науку.



Пифагору приписывают слова: «Все есть число».



Один из последователей Пифагора писал: *«Если бы не число и его природа, ничто существующее нельзя было бы постичь ни само по себе, ни в его отношении к другим вещам. Мощь чисел проявляется во всех деяниях и помыслах людей, во всех ремеслах и музыке».*

По мнению Пифагора, числа были основой всего сущего.

Четыре элемента, из которых по воззрениям

древнегреческих мудрецов состоял мир, то есть огонь,

землю, воздух и воду, он обозначил числами 1, 2, 3 и 4.

Весь мир (Вселенную) он обозначал числом 10:

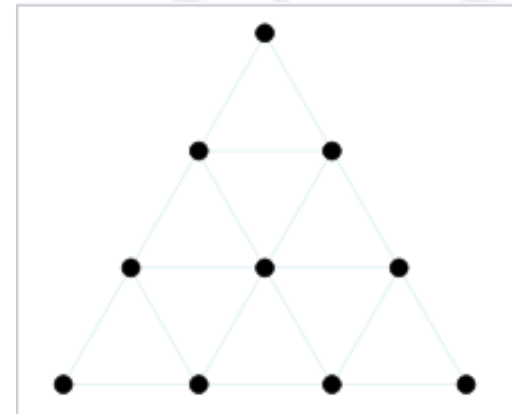
$1+2+3+4$ («священная четверица»)

Священный символ *Тетрактис*

демонстрировал совершенство и

математическую точность организации

пространства и Вселенной.



Числа с фантастическими названиями

Натуральные числа

Избыточные
(менее 25%)

Совершенные
(малая доля)

Недостаточные
(примерно 75%)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

	избыточные числа (21 из 99)	21%
	совершенные числа (2 из 99)	2%
	недостаточные числа (76 из 99)	77%

Совершенные числа

Натуральное число считается *совершенным*, если оно равно сумме своих делителей, отличных от самого числа:

$$6=1+2+3$$

I-II в.

$$28=1+2+4+7+14$$

$$496=1+2+4+8+16+31+62+124+248$$

$$8128=1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064$$

$$33\ 550\ 336$$

XV в.

$$2^{756838}(2^{756839}-1)$$
 состоит из 455 663 цифр

Совершенные числа

Свойство 1. Все совершенные числа (кроме 6) являются суммой кубов последовательных нечетных натуральных чисел:

$$28=1^3+3^3$$

...

$$496=1^3+3^3+5^3+7^3$$

Свойство 2. Сумма всех чисел, обратных делителям совершенного числа (включая само число), равна 2.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 2$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{31} + \frac{1}{62} + \frac{1}{124} + \frac{1}{248} + \frac{1}{496} = 2$$

Совершенные числа

Свойство 3. Все четные совершенные числа, кроме 6 и 496, заканчиваются в десятичной записи на 16, 28, 36, 56 или 76.

6, 28, 496, 8128, 33 550 336, 8 589 869 056, ...

Свойство 4. Если сложить все цифры четного совершенного числа (кроме 6), затем сложить все цифры полученного числа и так повторять, пока не получится однозначное число, то это число будет равно 1.

6

28: $2+8=10$, $1+0=1$

496: $4+9+6=19$, $1+9=10$, $1+0=1$

8128: $8+1+2+8=19$, $1+9=10$, $1+0=1...$

Совершенные числа

Свойство 5. Все четные совершенные числа являются треугольными числами, т.е. могут быть представлены в виде $n \cdot (2n - 1)$ для некоторого натурального n :

$$n=2, 2 \cdot (2 \cdot 2 - 1) = 6$$

$$n=4, 4 \cdot (2 \cdot 4 - 1) = 28$$

$$n=16, 16 \cdot (2 \cdot 16 - 1) = 496 \dots$$

Совершенные числа

Свойство 6. Число $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ является совершенным, если число $2^n - 1$ является простым (имеет ровно два различных натуральных делителя: 1 и само себя).

Алгоритм построения чисел описан в «Началах» Евклида в предложении 36 книги IX. Доказан в XVIII веке Леонардом Эйлером.

$$n = 2, \quad 2^{2-1} \cdot (2^2 - 1) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$n = 3, \quad 2^{3-1} \cdot (2^3 - 1) = 4 \cdot 7 = 28$$

$$n = 5, \quad 2^{5-1} \cdot (2^5 - 1) = 16 \cdot 31 = 496$$

$$n = 7, \quad 2^{7-1} \cdot (2^7 - 1) = 64 \cdot 127 = 8128$$

$$n = 31, \quad 2^{31-1} \cdot (2^{31} - 1) = 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 1073741824 = 2305843008139952128$$

Программа поиска совершенных чисел

1. По определению совершенных чисел
(результат – только первые 4 числа)

```
var N,i,j, sum:longint;  
begin  
Write ('Введите N: '); readln(N);  
  for i:=2 to N do  
  begin  
    Sum:=0;  
    For j:=1 to i-1 do  
      If I mod j = 0 then sum:=sum+j;  
    If sum=i then writeln (i, ' совершенное');  
  end  
end.
```

Окно вывода

```
Введите N: 1000000000  
6 совершенное  
28 совершенное  
496 совершенное  
8128 совершенное
```

2. По определению совершенных чисел
(поиск делителей уменьшен в 2 раза)

```
var N,i,j, Sum:int64;  
Begin  
Write ('Введите N: '); readln(N);  
  i:=2;  
  while i<=N do  
  begin  
    Sum:=1;  
    j:=2;  
    while j*j<i do  
    begin  
      If i mod j = 0 then Sum:=Sum+j+ i div j;  
      j:=j+1;  
    end;  
    If Sum=i then writeln (i, ' совершенное');  
    i:=i+2  
  end  
End.
```

Окно вывода

```
Введите N: 100000000  
6 совершенное  
28 совершенное  
496 совершенное  
8128 совершенное  
33550336 совершенное
```

При

Дружественные числа

220	2	Делители:			284	2	Делители:
110	2	2·2=4			142	2	2·2=4
55	5	2·5=10			71	71	2·71=142
11	11	2·11=22			1		
1		2·2·5=20					
		2·2·11=44			284=2·2·71·1		1,2,4,71,142,284
		5·11=55					
пара							
220=2·2·5·11·1		1,2,4,5,10,11,20,22,44,55,110,220					

220: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220 (делители),

284: 1, 2, 4, 71, 142, 284 (делители).

Сумма собственных делителей числа **220**:

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284.$$

Сумма собственных делителей числа **284**:

$$1+2+4+71+142=220$$

Формула *Сабита ибн Куры*:

$$p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1 \quad 2^n pq \quad \text{и} \quad 2^n r$$

$$q = 3 \cdot 2^n - 1$$

$$r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$$

$$n = 2$$

$$p = 3 \cdot 2^{2-1} - 1 = 3 \cdot 2 - 1 = 5, \quad (220; 284)$$

$$q = 3 \cdot 2^2 - 1 = 3 \cdot 4 - 1 = 11,$$

$$r = 9 \cdot 2^{2 \cdot 2 - 1} - 1 = 9 \cdot 8 - 1 = 71,$$

$$2^n pq = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 = 220,$$

$$2^n r = 2^2 \cdot 71 = 284$$

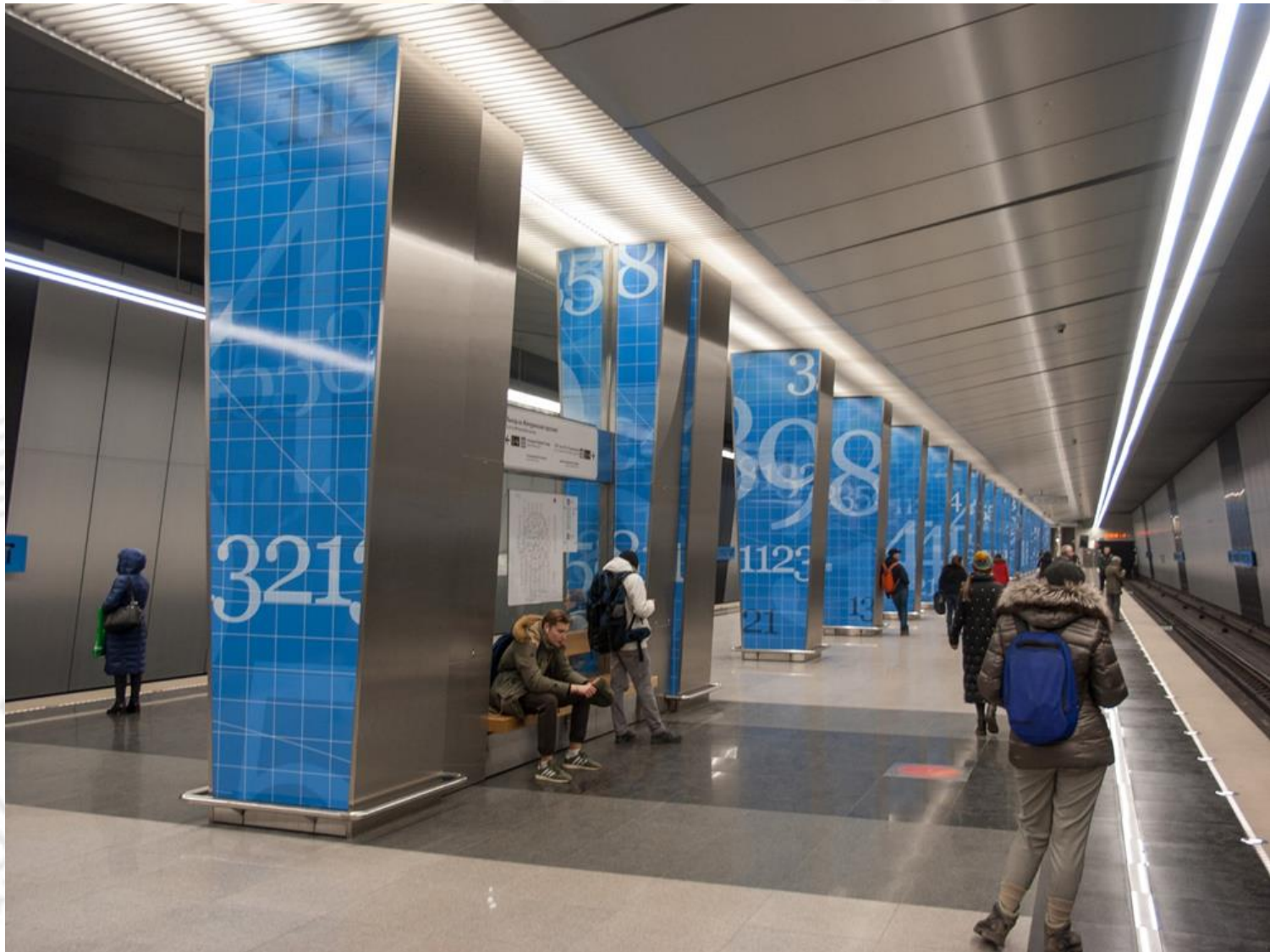
Компанейские числа

12496	2	Делители:		Делители:	14288	2	Делители:		Делители:	
6248	2	2	2·2·2·11·71=6248	1	7144	2	2	2·2·2·19·47=7144	1	
3124	2	2·2=4	2·2·11·71=3124	2	3572	2	2·2=4	2·2·19·47=3572	2	
1562	2	2·2·2=8	2·11·71=1562	4	1786	2	2·2·2=8	2·19·47=1786	4	
781	11	2·2·2·2=16	11·71=781	8	893	19	2·2·2·2=16	19·47=893	8	
71	71	11	2·2·2·2·71=1136	11	47	47	19	2·2·2·2·47=752	16	
1		2·11=22	2·2·2·71=568	16	1		2·2·19=38	2·2·2·47=376	19	
		2·2·11=44	2·2·71=284	22			2·2·19=76	2·2·47=188	38	
12496=2·2·2·2·11·71·1		2·2·2·11=88	2·71=142	44	14288=2·2·2·2·19·47·1		2·2·2·19=152	2·47=94	47	
		2·2·2·2·11=176	71	71			2·2·2·2·19=304	47	76	
		1	12496	88			1	14288	94	
				142					152	
				176					188	
				284					304	
				568					376	
				781					752	
				1136					893	
				1562					1786	
				3124					3572	
				6248					7144	
				Сумма:	14288	!!!		Сумма:	15472	!!!

15472	2	Делители:		Делители:	14536	2	Делители:		Делители:	
7736	2	2	2·2·2·967=7736	1	7268	2	2	2·2·23·79=7268	1	
3868	2	2·2=4	2·2·967=3868	2	3634	2	2·2=4	2·23·79=3634	2	
1934	2	2·2·2=8	2·967=1934	4	1817	23	2·2·2=8	23·79=1817	4	
967	967	2·2·2·2=16	967	8	79	79	23	2·2·2·79=632	8	
1		1	15472	16	1		2·23=46	2·2·79=316	23	
				967			2·2·23=92	2·79=158	46	
				1934			2·2·2·23=184	79	79	
15472=2·2·2·2·967·1				3868	14536=2·2·2·23·79·1	1		14536	92	
				7736					158	
				Сумма:	14536	!!!			184	
									316	
									632	
									1817	
									3634	
14264	2	Делители:		Делители:					7268	
7132	2	2	2·2·1783=7132	1				Сумма:	14264	!!!
3566	2	2·2=4	2·1783=3566	2						
1783	1783	2·2·2=8	1783	4						
1		1	14264	8						
				1783						
				3566						
				7132						
14264=2·2·2·1783·1				Сумма:	12496	!!!				

Пример пятерки компанийских чисел: 12 496, 14 288, 15 472, 14 536, 14 264.

Станция московского метро «Ломоносовский проспект»



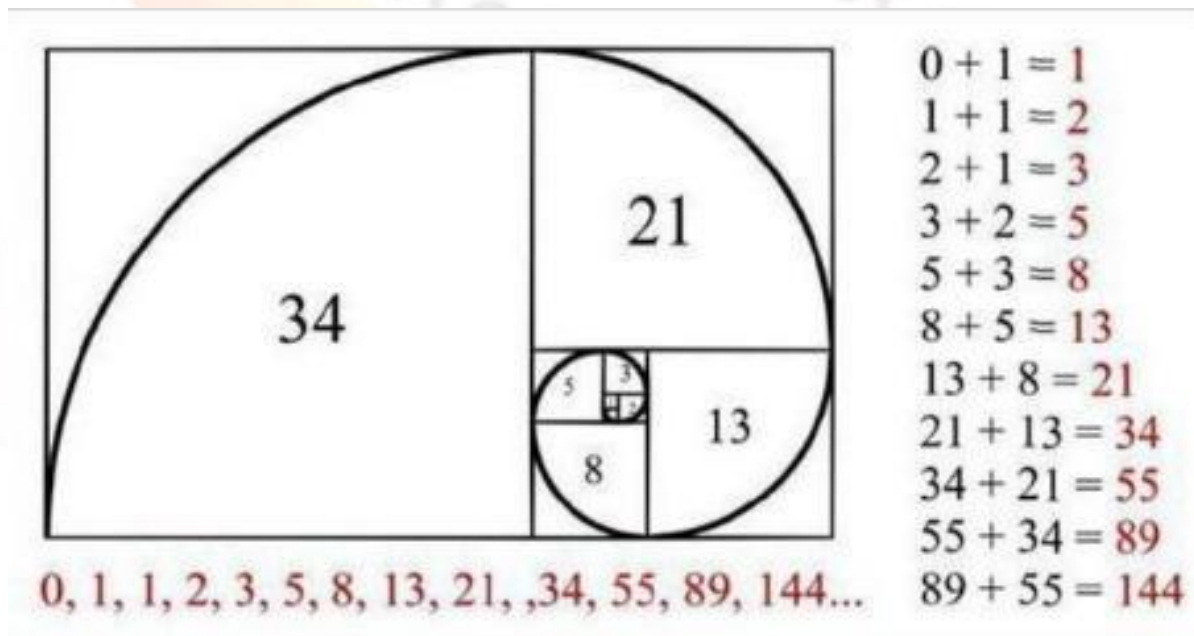
День Фибоначчи

23.11



23 ноября в мире принято праздновать «**День Фибоначчи**». Большинство из людей, скорее всего, не вспомнят этого имени. Некоторые вспомнят «числа **Фибоначчи**», которые проявляются внезапно в очень различных областях человеческой жизни — от биологии до живописи, художественной фотографии и биржевой торговли...

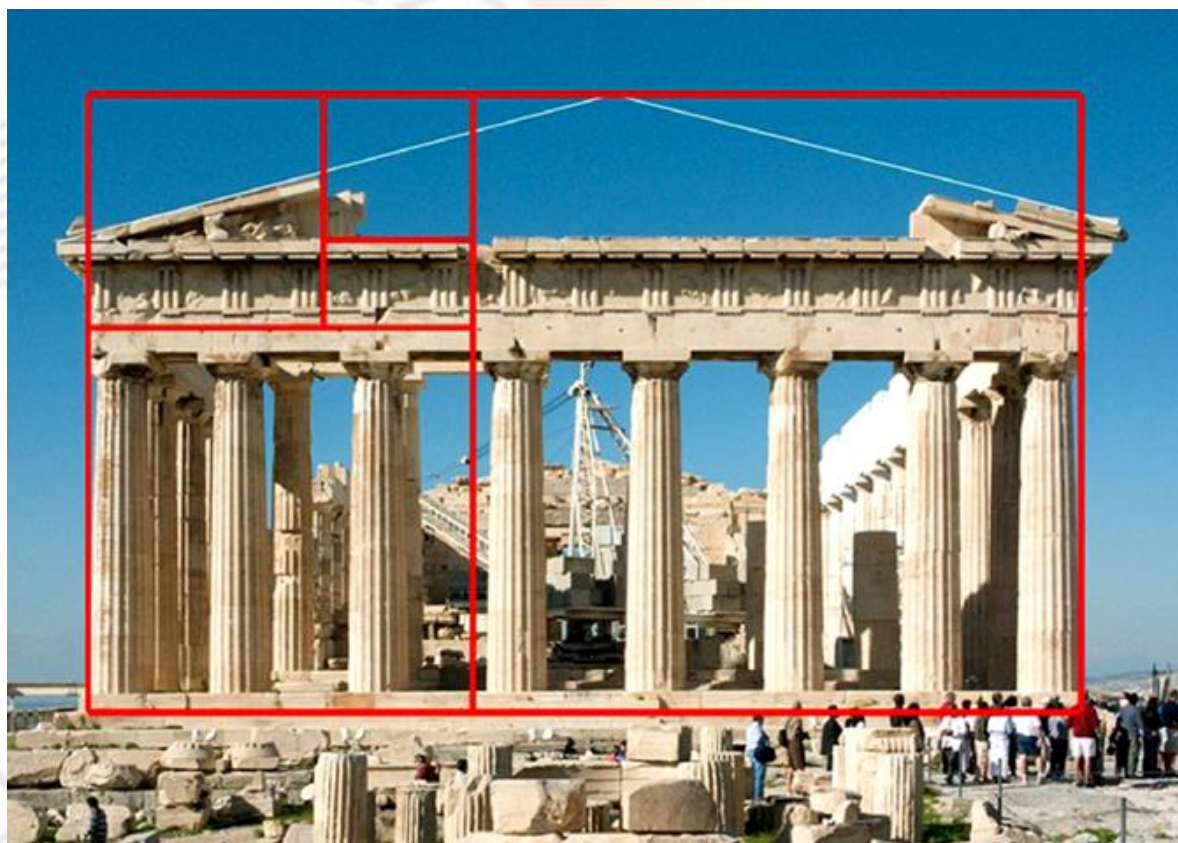
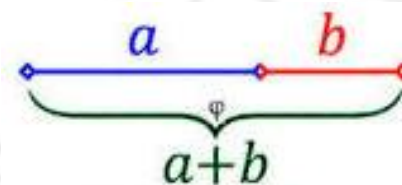
Числа Фибоначчи с геометрической точки зрения



Число Φ

Божественная пропорция $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$

$$\Phi = \frac{a}{b} \approx 1,62$$



	A	B
1	3/2=	1,50000
2	5/3=	1,66667
3	8/5=	1,60000
4	13/8=	1,62500
5	21/13=	1,61538
6	34/21=	1,61905
7	55/34=	1,61765
8	89/55=	1,61818
9	144/89=	1,61798
10	233/144=	1,61806
11	377/233=	1,61803
12	610/377=	1,61804
13	987/610=	1,61803
14	1597/987=	1,61803

Карл Фридрих Гаусс (1777—1855)



*«Математика — царица наук,
арифметика — царица
математики»*

Задача.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 = ?$$

Ответ: 5050

Математические головоломки

Задача 1.

По порядку записаны девять цифр:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Не меняя расположение цифр, вставьте между ними знаки + и - ,
Чтобы в сумме получилось ровно 100.

Решение.

$$12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100 \text{ (шесть знаков действий)}$$

$$123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100 \text{ (четыре знака действия)}$$

$$123 - 45 - 67 + 89 = 100 \text{ (3 знака действия)}$$

Интересные свойства чисел и математических действий

Число 9 часто встречается в русской народной культуре

Пословицы

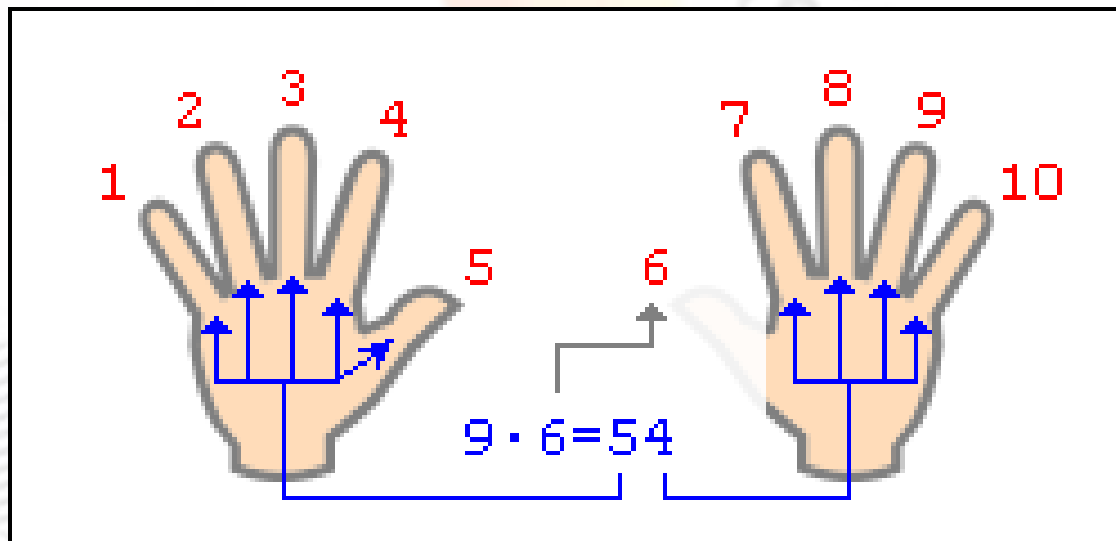
За тридевять земель, в тридевятом (тридесятом) царстве.

Девять дней, девять верст — как сокол летел.

Кушай, кума, девяную шанежку, я ведь не считаю.

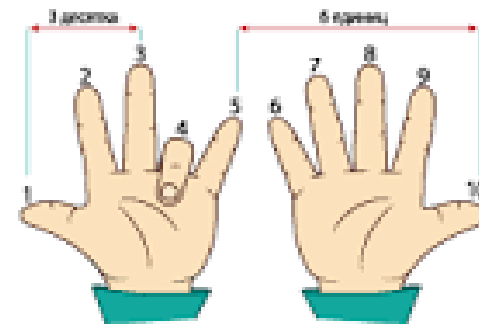
Девять человек – всё равно, что десяток.

Таблица умножение на 9 на пальцах



УМНОЖАЕМ НА ПАЛЬЦАХ

Каждый из нас, кто в детстве пытался считать на пальцах, вероятно, читал эту статью. Давайте обоим рукам назовем, по порядку, из большого и маленького пальца ладони. Чтобы запомнить, 4 на 5, нужно считать: большой палец и указательный, средний палец слева и правый от него. Считая по порядку пальцы: 1 - большой безымянный, средний, указательный - 6 пальцев (одиннадцать единиц), 4 - 4 и 10!



Посчитайте на пальцах и запишите.

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 1 · 9 = <input type="text"/> | 6 · 9 = <input type="text"/> |
| 2 · 9 = <input type="text"/> | 7 · 9 = <input type="text"/> |
| 3 · 9 = <input type="text"/> | 8 · 9 = <input type="text"/> |
| 5 · 9 = <input type="text"/> | 9 · 9 = <input type="text"/> |

9 18 27 36 45 54 63 72 81

9 1+8 2+7 3+6 4+5 5+4 6+3 7+2 8+1

Интересные свойства девятки

$$1 \times 9 = 09$$

$$90 = 9 \times 10$$

$$2 \times 9 = 18$$

$$81 = 9 \times 9$$

$$3 \times 9 = 27$$

$$72 = 9 \times 8$$

$$4 \times 9 = 36$$

$$63 = 9 \times 7$$

$$5 \times 9 = 45$$

$$54 = 9 \times 6$$

Интересные свойства числа 9

$$1 \times 9 + 2 = \mathbf{11}$$

$$12 \times 9 + 3 = \mathbf{111}$$

$$123 \times 9 + 4 = \mathbf{1111}$$

$$1234 \times 9 + 5 = \mathbf{11111}$$

$$12345 \times 9 + 6 = \mathbf{111111}$$

...

$$12345678 \times 9 + 9 = \mathbf{111111111}$$

Интересные свойства числа 9

$$9 \times 9 + 7 = \mathbf{88}$$

$$98 \times 9 + 6 = \mathbf{888}$$

$$987 \times 9 + 5 = \mathbf{8888}$$

$$9876 \times 9 + 4 = \mathbf{88888}$$

$$98765 \times 9 + 3 = \mathbf{888888}$$

...

$$98765432 \times 9 + 0 = \mathbf{888888888}$$

$$987654321 \times 9 - 1 = \mathbf{8888888888}$$

Интересные свойства числа 9

$$9^2 = 81$$

$$99^2 = 9801$$

$$999^2 = 998001$$

$$9999^2 = 99980001$$

$$99999^2 = 9999800001$$

$$999999^2 = 999998000001$$

...

Математические головоломки

Задача 1.

Сможете ли вы быстро умножить на 999....

$$46\ 538 \cdot 999 = ?$$

Решение:

$$\begin{array}{r} 46\ 538... \\ - \quad 46\ 538 \\ \hline 46\ 491\ 462 \end{array}$$

$$!!! 46\ 538 \cdot (1000 - 1) = 456\ 538\ 000 - 46\ 538$$

Математические головоломки

Задача 2.

Сможете ли вы быстро разделить на 999....

$$248\ 561 : 999 = ?$$

Решение:

$$248\ 561 : 999 = 248 \text{ и } 809 \text{ в остатке } (809 = 248 + 561)$$

Доказательство:

$$248\ 561 = 248 \cdot 1000 + 561$$

$$248 \cdot (999 + 1) + 561$$

$$248 \cdot 999 + 248 + 561$$

$$248 \cdot 999 + (248 + 561)$$

$$248 \cdot 999 + 809$$

Математические головоломки

Задача 3.

Разделите быстро 248 798 на 999.

Решение:

$$\begin{aligned} 248\,798 : 999 &= \mathbf{248} && (1046 = 248 + 798) \\ & && (1046 : 999 = 1 \text{ в остатке } 47) \\ &= \mathbf{249} && \text{ и } 47 \text{ в остатке} \end{aligned}$$

Математические головоломки

Задача 4.

Остаток от деления любого числа на 9 всегда равен полученному при делении суммы цифр этого числа на 9.

Решение:

$$1583 : 9 = \mathbf{175} \quad \text{в остатке } 8$$

$$1 + 5 + 8 + 3 = 17$$

$$17 : 9 = 1 \quad \text{в остатке } 8$$

The background of the slide is a light-colored surface with a pencil, a ruler, and mathematical formulas. The pencil is positioned diagonally from the top left towards the center. The ruler is visible in the bottom left corner. Mathematical formulas, including $(2x+1)^2$, $x-2$, and x^2 , are scattered across the background, some appearing to be written on a piece of paper.

Спасибо за внимание!

Литература:

Щепан Еленьский. По следам Пифагора. Магические квадраты и волшебные числа.

Яков Перельман. Первая сотня головоломок.