

*Простейшие уравнения
задание № 6*

*ЕГЭ по математике
профильного уровня*

Пенькова Анастасия Николаевна
учитель математики МБОУ СОШ №14
им. Д.А. Старикова
Гулькевичский район

Иррациональные уравнения

Иррациональные уравнения, включенные в задания ЕГЭ, являются уравнениями одного из трех типов:

- корень нечетной степени равен числу,
- корень четной степени равен числу,
- квадратный корень равен линейному выражению.

Сформулируем теорему для решения уравнений указанных типов.

Теорема. Пусть m — нечетное натуральное число, $m \geq 3$, n — четное натуральное число, a — любое число, $b \geq 0$. Тогда:

$$\sqrt[m]{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^m$$

$$\sqrt[n]{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = b^n$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Задание 1. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{2x - 5} = 4$.

$$(\sqrt[3]{2x - 5})^3 = 4^3$$

$$2x - 5 = 64$$

$$2x = 69$$

$$x = 34,5$$

Ответ: 34,5.

Задание 2. Найдите корень уравнения $\sqrt{10 - 3x} = 5$.

$$(\sqrt{10 - 3x})^2 = 5^2$$

$$10 - 3x = 25$$

$$-3x = 15$$

$$x = -5$$

Ответ: -5.

Задание 3. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{1}{15-4x}} = 0,2$.

$$\left(\sqrt{\frac{1}{15-4x}} \right)^2 = \left(\frac{1}{5} \right)^2$$

$$\frac{1}{15-4x} = \frac{1}{25}$$

$$15 - 4x = 25$$

$$-4x = 25 - 15$$

$$-4x = 10$$

$$x = -2,5$$

Ответ: -2,5.

Задание 4. Решите уравнение $\sqrt{-72 - 17x} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

$$\begin{cases} -72 - 17x = x^2, \\ -x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 17x + 72 = 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 17x + 72 = 0$$

$$x_1 = -8; \quad x_2 = -9$$

Ответ: -9.

Задание 5. Решите уравнение $\sqrt{9 + 2x - x^2} = x + 1$.

$$\begin{cases} 9 + 2x - x^2 = (x + 1)^2, \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 + 2x - x^2 = x^2 + 2x + 1, \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 + 2x - x^2 - x^2 - 2x - 1 = 0, \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x^2 + 8 = 0 \\ x \geq -1 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = -2$ – не удовлетворяет условию $x \geq -1$

$x_2 = 2$

Показательные уравнения

Показательные уравнения, включенные в задания ЕГЭ, приводятся к одному из трёх типов:

$$a^{f(x)} = a^b,$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)},$$

$$A \cdot a^{f(x)} = B \cdot b^{f(x)}.$$

Сформулируем теорему для решения уравнений указанных типов.

Теорема. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда:

$$a^{f(x)} = a^b \Leftrightarrow f(x) = b,$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$A \cdot a^{f(x)} = B \cdot b^{f(x)} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = \left(\frac{A}{B}\right)^{-1}$$

Задание 6 . Найдите корень уравнения $9^{-2-x} = 81$.

$$9^{-2-x} = 81$$

$$9^{-2-x} = 9^2$$

$$-2 - x = 2$$

$$-x = 4$$

$$x = -4$$

Ответ: -4.

Задание 7. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{7}\right)^{x+4} = 49$.

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{x+4} = \left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$$

$$x + 4 = -2$$

$$x = -6$$

Ответ: -6.

Задание 8 . Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{6}\right)^{x-2} = 6^x$.

$$(6^{-1})^{x-2} = 6^x$$

$$6^{-x+2} = 6^x$$

$$-x + 2 = x$$

$$-2x = -2$$

$$x = 1$$

Ответ: 1.

Задание 9. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-13} = 3$.

$$(3^{-2})^{x-13} = 3$$

$$3^{-2x+26} = 3$$

$$-2x + 26 = 1$$

$$-2x = -25$$

$$x = 12,5$$

Ответ: 12,5.

Задание 10. Найдите корень уравнения $2^{3-4x} = 0,16 \cdot 5^{3-4x}$.

$$2^{3-4x} = 0,16 \cdot 5^{3-4x}$$

$$\frac{2^{3-4x}}{5^{3-4x}} = \frac{16}{100}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{3-4x} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$3 - 4x = 2$$

$$-4x = -1$$

$$x = 0,25$$

Ответ: 0,25.

Логарифмические уравнения

Логарифмические уравнения, включенные в задания ЕГЭ, приводятся к одному из трех типов: $\log_a f(x) = b$, $\log_{f(x)} a = b$, $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Для этого могут понадобиться формулы свойств логарифмов:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc, \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}, \log_a b^n = n \log_a b, a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0.$$

Сформулируем теорему для решения уравнений указанных типов.

Теорема. Пусть $a > 0, a \neq 1, b \in R$. Тогда

$$1) \log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b,$$

$$2) \log_{f(x)} a = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ (f(x))^b = a. \end{cases}$$

$$3) \log_a f(x) = \log_a g(x) \quad 1 \text{ способ: равносильный переход} \begin{cases} g(x) > 0 \text{ или } f(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

2 способ: $f(x) = g(x)$ - проверка

Задание 11. Найдите корень уравнения $\log_2(-5 - x) = 3$

$$\log_2(-5 - x) = 3$$

$$-5 - x = 2^3$$

$$-5 - x = 8$$

$$-x = 8 + 5$$

$$x = -13$$

Ответ: -13.

Задание 12. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{7}}(7 - x) = -2$

$$\log_{\frac{1}{7}}(7 - x) = -2$$

$$7 - x = \left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$$

$$7 - x = 49$$

$$-x = 49 - 7$$

$$x = -42$$

Ответ: -42.

Задание 13. Решите уравнение $\log_{(x+6)} 32 = 5$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

При условии, что $\begin{cases} x + 6 > 0 \\ x + 6 \neq 1 \end{cases}$ получим:

$$(x + 6)^5 = 32$$

$$(x + 6)^5 = 2^5$$

$$x + 6 = 2$$

$$x = -4$$

Ответ: -4.

Задание 14. Решите уравнение $\log_{(x-5)} 49 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

При условии, что $\begin{cases} x - 5 > 0 \\ x - 5 \neq 1 \end{cases}$ получим:

$$(x - 5)^2 = 49$$

$$x - 5 = 7 \text{ или } x - 5 = -7$$

$$x = 12 \quad \text{или} \quad x = -2 \text{ — не является корнем}\\ \text{уравнения}$$

Ответ: 12.

Задание 15. Решите уравнение $\log_7(x^2 + 5x) = \log_7(x^2 + 6)$.

$$\begin{cases} x^2 + 6 > 0 \\ x^2 + 5x = x^2 + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 6 > 0 \\ 5x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 6 > 0 \\ x = 1,2 \end{cases} \Rightarrow x = 1,2$$

Ответ: 1,2

Задание 16. Решите уравнение $\log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + 1$.

$$\log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + 1$$

$$\log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + \log_5 5$$

$$\log_5(7 - x) = \log_5 5(3 - x)$$

$$\begin{cases} 7 - x > 0 \\ 7 - x = 15 - 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 7 \\ 4x = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 7 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ответ: 2

Задание 17. Решите уравнение $\log_8 2^{8x-4} = 4$.

$$2^{8x-4} = 8^4$$

$$2^{8x-4} = (2^3)^4$$

$$8x - 4 = 12$$

$$8x = 16$$

$$x = 2$$

Ответ: 2.

Задание 18. Решите уравнение $\log_x 32 = 5$.

При условии, что $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ получим:

$$x^5 = 32$$

$$x^5 = 2^5$$

$$x = 2$$

Ответ: 2.

