

Преобразование выражений.

Задание №7 ЕГЭ по

математике профильного

уровня

Учитель математики МБОУ СОШ №15
им. В.П. Михалько
Роговая Марина Александровна

Виды выражений:

- рациональные
- иррациональные
- степенные
- логарифмические
- тригонометрические

1. Рациональные выражения (числовые и буквенные).

Для преобразования числовых и буквенных рациональных выражений необходимо знать:
правила действий с
обыкновенными и десятичными
дробями

Свойства действий:

- Переместительное

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

- сочетательное

$$(a + b) + c = a + (b + c); \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

- распределительное свойство умножения

$$(a + b) \cdot c = ac + bc$$

$$(a - b) \cdot c = ac - bc$$

1) Найдите значение выражения: $\left(2\frac{4}{7} - 2,5\right) : \frac{1}{70}$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

$$\left(2\frac{4}{7} - 2,5\right) : \frac{1}{70} =$$

$$= \frac{18}{7} \cdot 70 - \frac{5}{2} \cdot 70 =$$

$$= 18 \cdot 10 - 5 \cdot 35 = 180 - 175 = 5$$

Ответ: 5.

2) Найдите значение выражения: $\frac{1,23 \cdot 45,7}{12,3 \cdot 0,457}$

Основное свойство дроби: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$

$$\frac{1,23 \cdot 45,7}{12,3 \cdot 0,457} =$$

$$= \frac{1,23 \cdot 45,7 \cdot 10000}{12,3 \cdot 0,457 \cdot 10000} =$$

$$\frac{123 \cdot 457 \cdot 10}{123 \cdot 457} = 10$$

Ответ: 10.

Формулы сокращённого умножения

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3) Найдите значение выражения:
 $(7x - 13) \cdot (7x + 13) - 49x^2 + 6x + 22$
при $x = 80$

$$49x^2 - 169 - 49x^2 + 6x + 22 = \\ = 6x - 147$$

$$6 \cdot 80 - 147 = 480 - 147 = 333$$

Ответ: 333.

4) Найдите значение выражения: $\frac{(11a)^2 - 11a}{11a^2 - a}$

Вынесение общего множителя за скобки

$$\frac{(11a)^2 - 11a}{11a^2 - a} =$$

$$= \frac{11a(11a - 1)}{a(11a - 1)} = 11$$

Ответ: 11.

5) Найдите значение выражения:

$$((4x - 3y)^2 - (4x + 3y)^2) : (4xy)$$

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 16x^2 - 24xy - 9y^2 =$$

$$= -48xy$$

$$\frac{-48xy}{4xy} = -12$$

Ответ: -12.

6) Найдите значение выражения:

$$(432^2 - 568^2) : 1000$$

$$(432^2 - 568^2) : 1000 =$$

$$\frac{(432 - 568) \cdot (432 + 568)}{1000} = -136$$

Ответ: -136.

7) Найдите значение выражения:

$$\frac{a}{b}, \text{ если } \frac{2a+5b}{5a+2b} = 1$$

Основное свойство пропорции:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

$$2a + 5b = 5a + 2b$$

$$3b = 3a$$

$$a = b$$

$$\frac{a}{b} = 1$$

Ответ: 1.

8)) Найдите значение выражения:
 $q(b - 2) - q(b + 2)$, если $q(b) = 3b$

$$q(b - 2) = 3(b - 2) = 3b - 6$$

$$q(b + 2) = 3(b + 2) = 3b + 6$$

$$3b - 6 - (3b + 6) =$$

$$= 3b - 6 - 3b - 6 = -12$$

Ответ: -12.

Иррациональные выражения

Свойства квадратного корня:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, a \geq 0, b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, a \geq 0, b > 0$$

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

9) Найдите значение выражения:

$$(\sqrt{13} - \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{13} + \sqrt{7})$$

$$(\sqrt{13} - \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{13} + \sqrt{7}) =$$

$$= (\sqrt{13})^2 - (\sqrt{7})^2 =$$

$$= 13 - 7 = 6$$

Ответ: 6.

10) Найдите значение выражения:

$$(\sqrt{15} - \sqrt{60}) \cdot \sqrt{15}$$

$$\sqrt{15} \cdot \sqrt{15} - \sqrt{60} \cdot \sqrt{15} =$$

$$= (\sqrt{15})^2 - \sqrt{4 \cdot 15 \cdot 15} =$$

$$= 15 - 2 \cdot 15 = -15$$

Ответ: -15.

11) Найдите значение выражения:

$$\left(\sqrt{3\frac{6}{7}} - \sqrt{1\frac{5}{7}} \right) : \sqrt{\frac{3}{28}}$$

$$\sqrt{\frac{27}{7} \cdot \frac{28}{3}} - \sqrt{\frac{12}{7} \cdot \frac{28}{3}} =$$

$$= \sqrt{9 \cdot 4} - \sqrt{4 \cdot 4} = \\ = 6 - 4 = 2$$

Ответ: 2.

12) Найдите значение выражения

$$\frac{7\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} + \frac{5\sqrt{x}}{x} + 3x - 4 \text{ при } x = 3$$

$$(\sqrt{x})^2 = x$$

$$\frac{7\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} - 5\sqrt{x} + 5\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} + 3x - 4 =$$

$$= 7 + 3x - 4 = 3 + 3x$$

$$3 + 3 \cdot 3 = 12$$

Ответ: 12.

Действия со степенями

Свойства степени: $a^0 = 1$ $a^1 = a,$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, a \neq 0 \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, a \neq 0, b \neq 0$$

13) Найдите значение выражения:

$$(7x^3)^2 : (7x^6)$$

$$(7x^3)^2 : (7x^6) = \frac{49x^6}{7x^6} = 7$$

Ответ: 7.

14) Найдите значение выражения:

$$\frac{a^{3,33}}{a^{2,11} * a^{2,22}} \text{ при } a = \frac{2}{7}$$

$$\frac{a^{3,33}}{a^{4,33}} = a^{3,33 - 4,33} = a^{-1}, \left(\frac{2}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Ответ: 3,5.

15) Найдите значение выражения:

$$3^{\sqrt{5}+10} \cdot 3^{-5-\sqrt{5}}$$

$$3^{\cancel{\sqrt{5}}+10-5-\cancel{\sqrt{5}}} =$$

$$= 3^5 = 243$$

Ответ: 243.

16) Найдите значение выражения: $\sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[6]{49}$

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a^m} &= a^{\frac{m}{n}}, & \sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[6]{49} &= \\ &= 7^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{2}{6}} &= 7^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} &= 7\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\sqrt[nk]{a^{mk}} &= \sqrt[n]{a^m}, \sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[6]{7^2} = \\ &= \sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{7^3} = 7\end{aligned}$$

Ответ: 7.

17) Найдите значение выражения:

$$\frac{a^2 b^{-6}}{(4a)^3 b^{-2}} \cdot \frac{16}{a^{-1} b^{-4}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 b^{-6}}{(4a)^3 b^{-2}} \cdot \frac{16}{a^{-1} b^{-4}} = \\ & = \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot a \cdot b^4 \cdot 16}{64 \cdot a^3 \cdot b^6} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} = 0,25$$

Ответ: 0,25.

18) Найдите значение выражения:

$$0,8^{\frac{1}{7}} \cdot 5^{\frac{2}{7}} \cdot 20^{\frac{6}{7}}$$

$$0,8^{\frac{1}{7}} \cdot 5^{\frac{2}{7}} \cdot 20^{\frac{6}{7}} =$$

$$0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = \frac{2^2}{5}; \quad 20 = 4 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$$

$$= \frac{(2^2)^{\frac{1}{7}}}{5^{\frac{1}{7}}} \cdot 5^{\frac{2}{7}} \cdot (2^2)^{\frac{6}{7}} \cdot 5^{\frac{6}{7}} =$$

$$= 2^{\frac{2}{7} + \frac{12}{7}} \cdot 5^{\frac{2}{7} + \frac{6}{7} - \frac{1}{7}} =$$

$$2^2 \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 20$$

Ответ: 20.

Логарифмические выражения

Определение логарифма

$$a^{\log_a b} = b, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$$

Свойства логарифмов:

$$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$$

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$$

$$\log_{a^k} b^n = \frac{n}{k} \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

19) Найдите значение выражения:

$$(\log_2 16) \cdot (\log_6 36)$$

$$(\log_2 16) \cdot (\log_6 36) = 4 \cdot 2 = 8$$

Ответ: 8.

20) Найдите значение выражения: $7 \cdot 5^{\log_5 4}$

$$7 \cdot 5^{\log_5 4} = 7 \cdot 4 = 28$$

Ответ: 28.

21) Найдите значение выражения:

$$\log_5 60 - \log_5 12$$

$$\begin{aligned}\log_5 60 - \log_5 12 &= \log_5 \frac{60}{12} = \\ &= \log_5 5 = 1\end{aligned}$$

Ответ: 1

22) Найдите значение выражения:

$$\log_5 0,2 + \log_{0,5} 4$$

$$\begin{aligned}\log_5 0,2 + \log_{0,5} 4 &= = \log_5 \frac{1}{5} + \log_{\frac{1}{2}} 4 = \\ &= -1 - 2 = -3\end{aligned}$$

Ответ: - 3.

23) Найдите значение выражения:

$$\log_4 \log_5 25$$

$$\log_4 \log_5 25 = \log_4 2 = \frac{1}{2} = 0,5$$

Ответ: 0,5.

24) Найдите значение выражения:

$$\log_4 8$$

$$\log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 =$$

$$= \frac{3}{2} \log_2 2 == 1,5$$

Ответ: 1,5.

25) Найдите значение выражения:

$$\frac{\log_7 13}{\log_{49} 13}$$

$$\frac{\log_7 13}{\log_{49} 13} = \frac{\log_7 13}{\log_{7^2} 13} = \frac{\log_7 13}{\frac{1}{2} \log_7 13} = 2$$

Ответ: 2.

26) Найдите значение выражения:

$$\log_5 9 \cdot \log_3 25$$

$$\begin{aligned}\log_5 9 \cdot \log_3 25 &= \log_5 3^2 \cdot \log_3 5^2 = \\ &= 2 \log_5 3 \cdot 2 \log_3 5 = 4\end{aligned}$$

Ответ: 4.

27) Найдите значение выражения:

$$\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}}$$

$$\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}} =$$

$$= 9^{\log_5 50 - \log_5 2} =$$

$$= 9^{\log_5 \frac{50}{2}} =$$

$$= 9^{\log_5 25} = 9^{\log_5 5^2} =$$

$$= 9^{2 \log_5 5} = 81$$

Ответ: 81.

28) Найдите $\log_a \frac{a}{b^3}$, если $\log_a b = 5$

Упростим выражение

$$\begin{aligned}\log_a \frac{a}{b^3} &= \log_a a - \log_a b^3 = \\ &= 1 - 3 \log_a b\end{aligned}$$

$$1 - 3 \cdot 5 = 1 - 15 = -14$$

Ответ: - 14.

Тригонометрические выражения

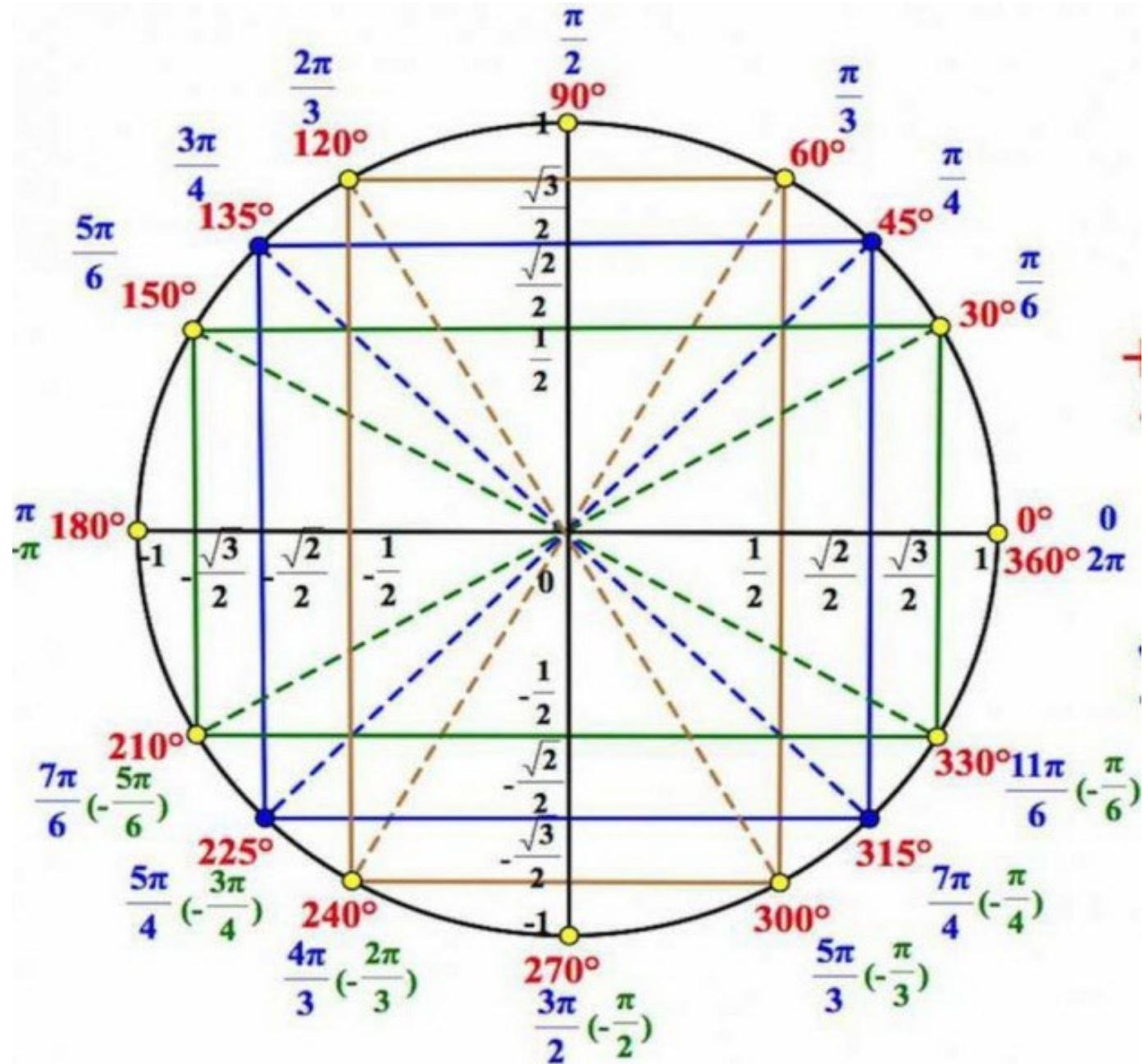
- Тригонометрическая окружность
- Формулы тригонометрии

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2\alpha$$



29) Найти $24 \cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,2$

$$\begin{aligned}24 \cos 2\alpha &= 24 (1 - 2 \sin^2 \alpha) = \\&= 24 \cdot (1 - 2 \cdot (-0,2)^2) = \\&= 24 \cdot (1 - 2 \cdot 0,04) = 24 \cdot (1 - 0,08) = \\&= 24 \cdot 0,92 = 22,08\end{aligned}$$

Ответ: 22,08.

30) Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2} =$$

$$= -\sqrt{1 - \frac{1}{10}} = -\sqrt{\frac{9}{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= -\frac{3}{\sqrt{10}} : \frac{\sqrt{10}}{10} = \\ &= -\frac{3 \cdot 10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = -3\end{aligned}$$

Ответ: - 3.

31) Найдите значение выражения: $\frac{5 \cos 29^\circ}{\sin 61^\circ}$

$$\begin{aligned}\frac{5 \cos 29^\circ}{\sin(90^\circ - 29^\circ)} &= \\ &= \frac{5 \cos 29^\circ}{\cos 29^\circ} = 5\end{aligned}$$

Ответ: 5.

32) Найдите значение выражения

$$\frac{12 \sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ}{\sin 22^\circ}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\frac{6 \cdot 2 \sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ}{\sin 22^\circ} =$$

$$= \frac{6 \sin(2 \cdot 11^\circ)}{\sin 22^\circ} = 6$$

Ответ: 6.

Успехов на экзаменах!