Уравнения. Задание № 20 ОГЭ по математике.

Еременко Ольга Николаевна,
учитель математики МАОУ СОШ №2
МО Усть-Лабинский район

Все виды уравнений из открытого банка заданий ФИПИ

ТИП I. Разложение на множители:

$x^3+5x^2-9x-45=0$

$x^3+3x^2=4x+12$

$x^4=(4x-5)^2$

$(x-2)(x^2+8x+16)=7(x+4)$

ТИП II. Замена переменных

$$\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}-4=0$$

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{4}{x-1}-12=0$$

$(x+4)^4-6(x+4)^2-7=0$

ТИП III. Специальные свойства

$x^2+2x+\sqrt{2+x}=\sqrt{2+x}+3$

$(x^2-49)^2+(x^2+4x-21)^2=0$

ТИП IV. Дробно-рациональные уравнения

$$\frac{7}{x+1}-\frac{x+4}{2-2x}=\frac{3x^2-38}{x^2-1}$$

Критерии оценивания задания № 20

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно выполнены преобразования, получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	**2**

Уравнения, решаемые методом разложения на множители:

НЕОБХОДИМО:

1. Применить правила разложения на множители в строгой последовательности:
   1) Вынесение за скобки общего множителя;
   2) применение формул сокращённого умножения;
   3) способ группировки.
2. Применить правило: произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю, а другие при этом не теряют смысла.
3. Решить простейшие уравнения.
4. Записать ответ.

Уравнения, решаемые методом разложения на множители

1) Решить уравнение $x^3+5x^2 - 9x - 45 = 0$

Решение:

$(x^3+5x^2) - (9x + 45) = 0$

$x^2(x+5) - 9(x+5) = 0$

$(x+5)(x^2 - 9) = 0$

$(x+5)(x - 3)(x+3) = 0$

$x+5 = 0$; $x - 3 = 0$; $x+3 = 0$

$x = -5$ $x = 3$ $x = -3$

Ответ: -5; -3; 3.

Уравнения, решаемые методом разложения на множители:

2) Решить уравнение $x^3+3x^2=4x+12$

Решение:

$(x^3+3x^2) - (4x + 12) = 0$

$x^2 (x+3) - 4(x+3) = 0$

$(x+3)(x^2 - 4) = 0$

$(x+3)(x - 2)(x+2) = 0$

$x+3 = 0$; $x - 2 = 0$; $x+2 = 0$

$x = -3$ $x = 2$ $x = -2$

Ответ: -3; -2; 2.

Уравнения, решаемые методом разложения на множители

3) Решить уравнение $x^4=(4x-5)^2$

Решение:

$x^4 = (4x - 5)^2$

$x^4 - (4x - 5)^2 = 0$

$(x^2)^2 - (4x - 5)^2 = 0$

$(x^2 - (4x - 5))(x^2 + (4x - 5)) = 0$

$x^2 - (4x - 5) = 0;$	$x^2 + (4x - 5) = 0$
$x^2 - 4x + 5 = 0$	$x^2 + 4x - 5 = 0$
$D = b^2 - 4ac$	так как $a+b+c=0$, то
$D = 16 - 4\cdot1\cdot5 = -4$	$x=1$ или $x=-5$
$D<0$, то корней нет	

Ответ: -5; 1.

Уравнения, решаемые методом разложения на множители

4) Решите уравнение $(x-2)(x^2+8x+16)=7(x+4)$

Решение:

$(x-2)(x^2+8x+16) = 7(x+4)$

$(x-2)(x+4)^2 = 7(x+4)$

$(x-2)(x+4)^2 - 7(x+4) = 0$

$(x+4)((x-2)(x+4) - 7) = 0$

$x+4 = 0;$ $\quad$ $(x-2)(x+4) - 7 = 0$

$x = -4$ $\quad$ $x^2 + 2x - 15 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 4 + 4\cdot 15 = 64$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$x = -5;$ $\quad$ $x = 3$

Ответ: -5; - 4; 3.

Уравнения, решаемые методом замены переменных:

- <u>**Метод замены переменной подразумевает, чтобы старой переменной** х **не оставалось**</u> – в уравнении должна остаться только одна переменная – у.
- <u>Выполняя замену переменных, необходимо помнить два простых правила:</u>

1. Замену переменных нужно делать сразу и при первой же возможности.
2. Уравнение относительно новой переменной необходимо решать до конца, и лишь затем возвращаться к старой переменной.

Уравнения, решаемые методом замены переменных

Решите уравнение $\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - 4 = 0$

Решение:

$\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - 4 = 0$ $(\frac{1}{x})^2 - 3(\frac{1}{x}) - 4 = 0$ Замена: $y = \frac{1}{x}$ $y^2 - 3y - 4 = 0$ D= $b^2 - 4ac$ D= 9+4·4=25	$y = \frac{3+\sqrt{25}}{2}$ y=4 $y = \frac{3-\sqrt{25}}{2}$ y= -1 Вернемся к замене: $\frac{1}{x} = 4$ или $\frac{1}{x} = -1$ $x = \frac{1}{4}$ $x = -1$ Ответ: -1; $\frac{1}{4}$.

2 способ: $\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - 4 = 0$

Решение:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{4x^2}{x^2} = 0$$

$$\frac{-4x^2 - 3x + 1}{x^2} = 0$$

$$-4x^2 - 3x + 1 = 0 \text{ и } x^2 \neq 0$$

так как a+c=b, то x = -1 или x = $\frac{1}{4}$

Оба корня удовлетворяют условию $x^2 \neq 0$

Ответ: -1; $\frac{1}{4}$

Уравнения, решаемые методом замены переменных

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{4}{x-1}-12=0$$

Решение:

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{4}{x-1}-12=0$$

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^2+4\left(\frac{1}{x-1}\right)-12=0$$

Замена: $y=\frac{1}{x-1}$

$y^2+4y-12=0$

$D=16+4\cdot 12=64$

$y=\frac{-4+8}{2}$ $y=2$

$y=\frac{-4-8}{2}$ $y=-6$

Вернемся к замене:

$\frac{1}{x-1}=2$	$\frac{1}{x-1}=-6$
$2x-2=1$	$-6x+6=1$
$x=1{,}5$	$x=\frac{5}{6}$

Ответ: $\frac{5}{6}$; 1,5.

Уравнения, решаемые методом замены переменных

Решите уравнение $(x+4)^4 - 6(x+4)^2 - 7 = 0$

Решение.

$(x+4)^4 - 6(x+4)^2 - 7 = 0$

$((x+4)^2)^2 - 6(x+4)^2 - 7 = 0$

Замена: $y = (x+4)^2$

$y^2 - 6y - 7 = 0$

Так как $a + c = b$, то есть $1 - 7 = -6$, то

$y = -1$ или $y = 7$

Вернемся к замене:

$(x+4)^2 = -1$ $(x+4)^2 = 7$

корней нет $(x+4)^2 - (\sqrt{7})^2 = 0$

$(x+4-\sqrt{7})(x+4+\sqrt{7}) = 0$

$x = \sqrt{7} - 4$ $x = -\sqrt{7} - 4$

Ответ: $-\sqrt{7} - 4$; $\sqrt{7} - 4$.

Дробно-рациональные уравнения

ВАЖНО:

Наличие дроби в уравнении не свидетельствует о том, что это дробное уравнение. Необходимо присутствие переменной в знаменателе дроби.

Алгоритм решения дробно-рационального уравнения:

1) найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
2) умножить обе части уравнения на общий знаменатель;
3) решить полученное целое уравнение;
4) исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Дробно-рациональные уравнения

Решите уравнение $\frac{7}{x+1} - \frac{x+4}{2-2x} = \frac{3x^2-38}{x^2-1}$

Решение:

$$\frac{7}{x+1} - \frac{x+4}{2-2x} = \frac{3x^2-38}{x^2-1}$$

$$\frac{7}{x+1} + \frac{x+4}{2(x-1)} = \frac{3x^2-38}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{14(x-1) + (x+4)(x+1) - 2(3x^2-38)}{2(x+1)(x-1)} = 0$$

$-5x^2+19x+66=0$ и $(x+1)(x-1) \neq 0$

$D=361+1320=1681$ $x \neq 1$ и $x \neq -1$

$x = \frac{-19+41}{-10}$; $x = \frac{-19-41}{-10}$

$x=2,2$ $x=6$

Оба корня удовлетворяют условиям: $x \neq 1$ и $x \neq -1$.

Ответ: 2,2; 6.

Уравнения, решаемые с применением специальных свойств

Решите уравнение $x^2 + 2x + \sqrt{2+x} = \sqrt{2+x} + 3$

Решение:

$$x^2 + 2x + \sqrt{2+x} = \sqrt{2+x} + 3$$
$$x^2 + 2x + \sqrt{2+x} - \sqrt{2+x} - 3 = 0$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \text{и} \quad 2 + x \geq 0$$
$$x^2 + 3x - x - 3 = 0 \qquad x \geq -2$$
$$(x^2 - x) + (3x - 3) = 0$$
$$x(x-1) + 3(x-1) = 0$$
$$(x-1)(x+3) = 0$$
$$x - 1 = 0 \ \text{или} \ x + 3 = 0$$
$$x = 1 \qquad x = -3$$

$x = -3$ не удовлетворяет условию $x \geq -2$

Ответ: 1.

Уравнения, решаемые с применением специальных свойств

Решить уравнение $(x^2 - 49)^2+(x^2+4x - 21)^2=0$

Решение:

$(x^2 - 49)^2 + (x^2+4x - 21)^2 = 0$

Сумма квадратов двух слагаемых равна нулю, если каждое слагаемое равно нулю.

$x^2 - 49 = 0$ и $x^2+4x - 21=0$

$(x - 7)(x+7) = 0$

$x - 7=0$ или $x+7=0$

$x=7$ $x= -7$

$x^2+7x - 3x - 21=0$

$x(x+7) - 3(x+7)=0$

$(x+7)(x - 3)=0$

$x+7=0$ или $x - 3=0$

$x= -7$ $x=3$

Выберем общее решение двух уравнений: $x= -7$

Ответ: -7.

Благодарю за внимание!
Успехов на экзамене!