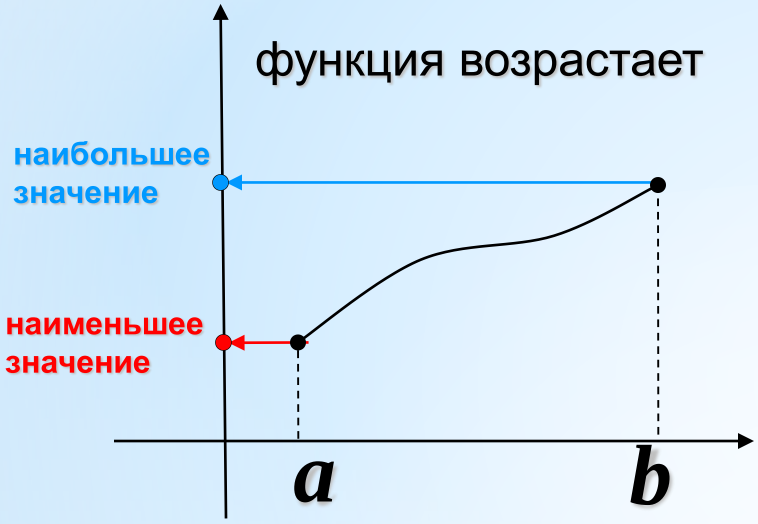
Наибольшее, наименьшее значение функции. Задание № 12 ЕГЭ по математике профильного уровня

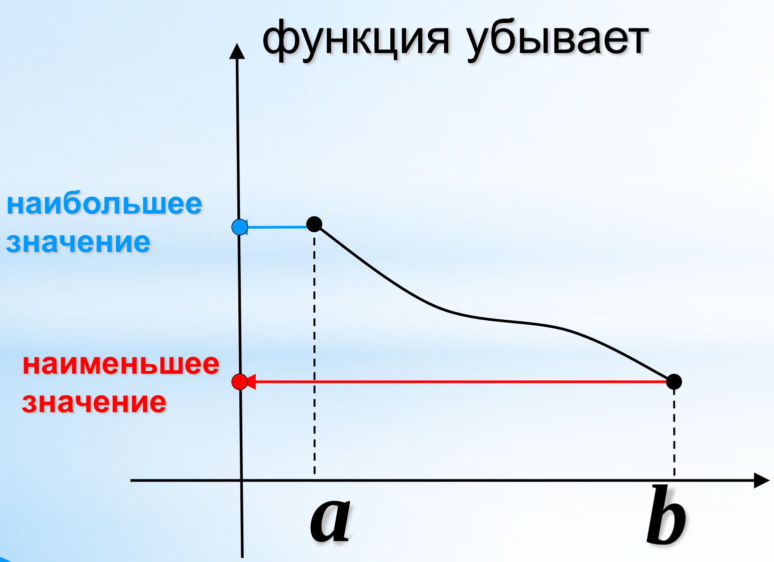
Учитель математики
МБОУ СОШ № 5
Богомацегора Анжелика Валерьевна, Каневской район

Теорема Вейерштрасса:

Непрерывная на отрезке [a; b] функция *f* принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения, т. е. на [a; b] существуют точки, в которых *f* принимает наибольшее и наименьшее на [a; b] значения.

Монотонные функции



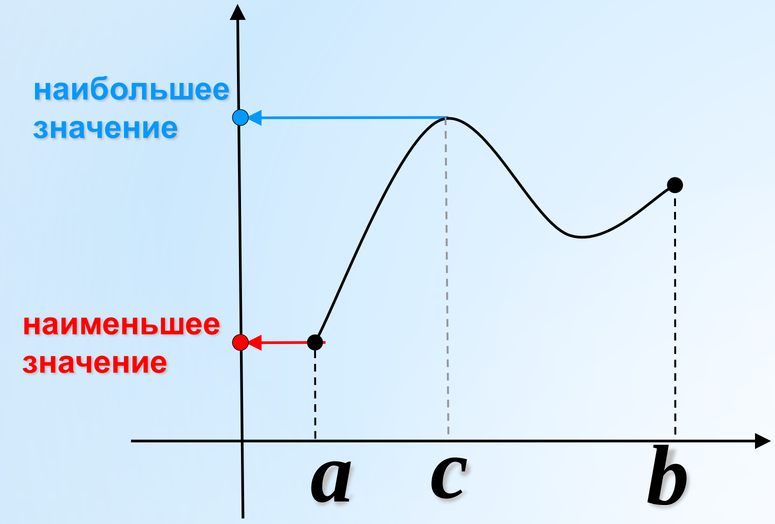


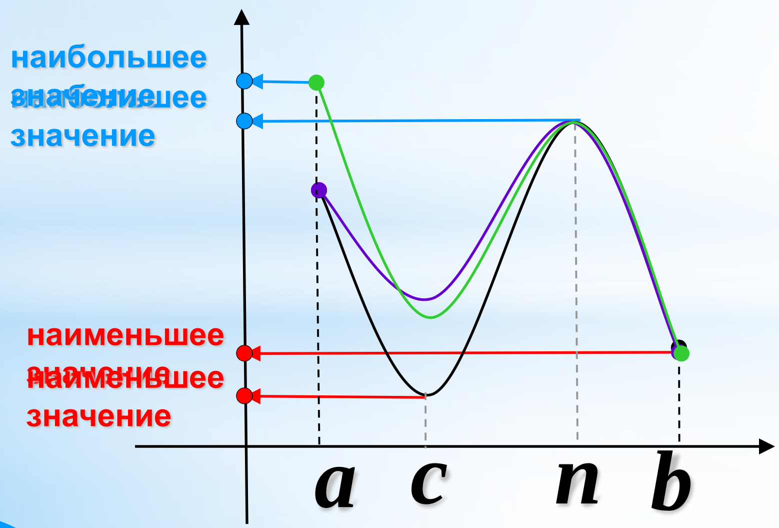
Предположим, что функция f не имеет на отрезке [a; b] критических точек.

Тогда она возрастает (рис. 1) или убывает (рис. 2) на этом отрезке.

Значит,

наибольшее и наименьшее значения монотонной на отрезке [a; b] функции f— это значения в концах a и b.





Пусть функция f имеет на отрезке [a; b] конечное число критических точек.

Наибольшее и наименьшее значения функция f может принимать в критических точках функции или в концевых точках a и b.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Правила нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке

Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a; b] и имеет несколько критических точек на этом отрезке.
Для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке [a; b] нужно:

1. Найти значения функции на концах отрезка, т.е. числа f(a) и f(в);
2. Найти ее значения в тех критических точках, которые принадлежат интервалу (a; b);
3. Из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

1.

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0; 4]$

Значения функции в концах отрезка.

1) $y(0) = 0$

$y(4) = 4^3 - 27 \cdot 4 = -44$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

2) $y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3)$

3 -3

$x = 3 \in [0; 4]$

$x = -3 \notin [0; 4]$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$

Выбрать наименьшее из полученных значений.

Ответ: - 54

2. Найдите наибольшее значение функции $y=\frac{x^3}{3}-9x-7$ на отрезке [-3; 3]

Значения функции в концах отрезка.

$$y(-3)=\frac{(-3)^3}{3}-9(-3)-7=-9+27-7=11$$

$$y(3)=\frac{3^3}{3}-9\cdot 3-7=9-27-7=-25$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y'=\frac{3x^2}{3}-9=x^2-9=(x-3)(x+3)$$

x = 3 ∈ [-3; 3]

x = –3∈ [-3; 3]

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

y(-3) = 11

y(3) = -25

Выбрать наибольшее из полученных значений.

Ответ: 11

3. Найдите наибольшее значение функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$ на отрезке [1; 9]

Значения функции в концах отрезка.

$$y(1) = 1^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$y(9) = 9^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 9 + 1 = (3^2)^{\frac{3}{2}} - 27 + 1 =$$

$$= 27 - 27 + 1 = 1$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - 3 = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 0 \quad \Big/ \cdot 2$$

$$3\sqrt{x} - 6 = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4 \in [1; 9]$$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(4) = 4^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 4 + 1 = (2^2)^{\frac{3}{2}} - 12 + 1 =$$

$$= 8 - 12 + 1 = -3$$

Выбрать наибольшее из полученных значений.

Ответ: 1

4. Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 3x + 1$ на отрезке [1; 9]

$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$

$y = x \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3x + 1$

$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$

Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде

Значения функции в концах отрезка.

$$y(1) = 1^{\frac{3}{2}} - 3\cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$y(9) = 9^{\frac{3}{2}} - 3\cdot 9 + 1 = (3^2)^{\frac{3}{2}} - 27 + 1 =$$

$$= 27 - 27 + 1 = 1$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3 = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 0 \quad \cdot 2$$

$$3\sqrt{x} - 6 = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4 \in [1;\ 9]$$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(4) = 4^{\frac{3}{2}} - 3\cdot 4 + 1 = (2^2)^{\frac{3}{2}} - 12 + 1 =$$

$$= 8 - 12 + 1 = -3$$

Выбрать наименьшее из полученных значений.

Ответ: -3

5. Найдите наименьшее значение функции $y=\dfrac{x^2+25}{x}$ на отрезке [-10; 1]

$$y=x+25\cdot\frac{1}{x}$$

D(y): $x \neq 0$

Значения функции в концах отрезка.

$$y(-10)=-10+25\cdot\frac{1}{-10}=-10-2,5=-12,5$$

$$y(1)=1+25=26$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y'=1+25\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=1-\frac{25}{x^2}=\frac{x^2-25}{x^2}=$$

$$=\frac{(x-5)(x+5)}{x^2}$$

x = 5 $\notin$ [-10; 1]

x = –5 $\in$ [-10; 1]

x = 0 $\notin$ D(y)

Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде

$$y=\frac{x^2}{x}+\frac{25}{x}$$

$$y=x+25\cdot\frac{1}{x}$$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(-5)=-5+25\cdot\frac{1}{-5}=-5-5=-10$$

Выбрать наименьшее из полученных значений.

Ответ: - 12,5

5. Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{x^2+25}{x}$ на отрезке [-10; 1]

D(y): $x \neq 0$

Можно решить задание, применив формулу:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Значения функции в концах отрезка.

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

1. $y' = \dfrac{2x\cdot x - 1\cdot(x^2+25)}{x^2} = \dfrac{x^2-25}{x^2}$

2. $\dfrac{x^2-25}{x^2} = 0$ **, при** $x^2 \neq 0, x \neq 0$

$x^2 - 25 = 0$ $x_{1=5;}$ $x_{2=-5}$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

3. $У(-5) = \dfrac{50}{-5} = -10$

$У(-10) = \dfrac{125}{-10} = -12,5$

$У(1) = \dfrac{26}{1} = 26$

Выбрать наименьшее из полученных значений.

Ответ: - 12,5

6. Найдите наибольшее значение функции $y = x + \dfrac{36}{x}$ на отрезке [1; 9]

D(y): $x \neq 0$

$$y = x + 36 \cdot \frac{1}{x}$$

Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде

Значения функции в концах отрезка.

$$y(1) = 1 + 36 \cdot \frac{1}{1} = 37$$

$$y(9) = 9 + 36 \cdot \frac{1}{9} = 9 + 4 = 13$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = 1 + 36 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{36}{x^2} = \frac{x^2 - 36}{x^2} =$$

$$= \frac{(x-6)(x+6)}{x^2}$$

$x = 6 \in$ [1; 9]

$x = -6 \notin$ [1; 9]

$x = 0 \notin$ D(y)

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(6) = 6 + 36 \cdot \frac{1}{6} = 6 + 6 = 12$$

Выбрать наибольшее из полученных значений.

Ответ: 37

7. Найдите наибольшее значение функции $y=(8-x)e^{x-7}$ на отрезке [3; 10]

1). Первое число меньше 1, т.к. знаменатель $e^4 > 5$.
2). Второе число – отрицательное.
3). Значит, наибольшее число 1.

$$8-3)e^{-4} = \frac{5}{e^4}$$

$$y(10) = (8-10)e^{3} = -2e^{3}$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = (8-x)'e^{x-7} + (8-x)(e^{x-7})' =$$

$$= -e^{x-7} + (8-x)e^{x-7} = e^{x-7}(-1+8-x) =$$

$$= e^{x-7}(7-x)$$

7

x = 7 ∈ [3; 10]

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

1

$$y(7) = (8-7)e^{7-7} = 1e^{0} = 1$$

Выбрать наибольшее из полученных значений.

Ответ: 1

8. Найдите наименьшее значение функции $y=\left(x^2-8x+8\right)e^{2-x}$ на отрезке [1; 7]

Значения функции в концах отрезка.

$$y(1)=(1-8+8)e^1=e$$

$$(uv)'=u'v+uv'$$

$$y(7)=(49-56+8)e^{-5}=\frac{1}{e^5}$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y'=(x^2-8x+8)'e^{2-x}+(x^2-8x+8)(e^{2-x})'=$$

$$=(2x-8)e^{2-x}+(x^2-8x+8)e^{2-x}(-1)=$$

$$=e^{2-x}(2x-8-x^2+8x-8)=e^{2-x}(-x^2+10x-16)=$$

$$=-e^{2-x}(x^2-10x+16)=-e^{2-x}(x-\overset{8}{8})(x-\overset{2}{2})$$

x = 2 ∈ [1; 7]

x = 8 ∉ [1; 7]

Наименьшее число – 4, т.к. первые два положительные.

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(2)=(4-16+8)\overset{1}{e^0}=-4$$

Выбрать наименьшее из полученных значений.

Ответ: -4

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

9. Найдите наибольшее значение функции
y = ln(x+5)^5 – 5x на отрезке [-4,5; 0]

1. Найти $f'(x)$

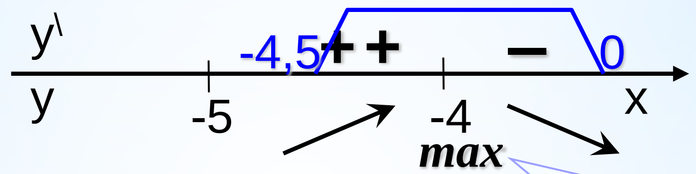
y = 5ln(x+5) – 5x

$$y' = 5\cdot\frac{1}{x+5} - 5 = \frac{5}{x+5} - 5 = \frac{-5x-20}{x+5} =$$

Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде

$$= \frac{-5(x+4)}{x+5} \qquad x = -4 \in [-4,5;\ 0]$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.



Можно рассуждать иначе

Наибольшее значение функция будет принимать в точке максимума. Можно сэкономить на вычислениях значений функции в концах отрезка.

3. Вычислить значения функции в критических точках
~~и на концах отрезка.~~

0

$$y(-4) = \ln 1^5 - 5\cdot(-4) =$$
$$= 0 + 20 = 20$$

~~4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее или наибольшее.~~

Ответ: 20

10. Найдите наибольшее значение функции

$y = \ln(11x) - 11x + 9$ на отрезке $\left[\frac{1}{22}; \frac{5}{22}\right]$

Ответ: 8

11. Найдите наименьшее значение функции

$y = 2x^2 - 5x + \ln x - 3$ на отрезке $\left[\frac{5}{6}; \frac{7}{6}\right]$

Ответ: - 6

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

12. Найдите наибольшее значение функции

y = 7cosx +16x – 2 на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};\,0\right]$

1. Найти f $^{/}$(x)

$$y' = -7\sin x + 16$$

Функция на всей области определения возрастает. Нетрудно догадаться, что y $^{/}$ > 0.
Тогда наибольшее значение функция будет иметь в правом конце отрезка, т.е. в точке x=0.

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$-7\sin x + 16 = 0$$

$$\sin x = \frac{16}{7}$$

$$\varnothing \quad т.к. \quad \sin x \in [-1;1]$$

0

$$y\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 7\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 16\cdot\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - 2 = -24\pi - 2$$

$$y(0) = 7\cos 0 + 16\cdot 0 - 2 = 7 - 2 = 5$$

Если вы не догадались, то вычислите значения функции в каждом конце отрезка и выберите наибольшее.

Ответ: 5

$(\sin x)' = \cos x$

13. Найдите наибольшее значение функции

$y = 10\sin x - \frac{36}{\pi}x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$

1. Найти $f'(x)$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$y' = 10\cos x - \frac{36}{\pi}$$

$$10\cos x = \frac{36}{\pi}$$

$$\cos x = \frac{36}{10\pi}$$

$$\varnothing \quad т.к. \quad \cos x \in [-1;1]$$

Критических точек нет. Тогда наибольшее значение функция будет принимать в одном из концов отрезка.

Можно было и раньше догадаться, что наибольшее значение будет именно в левом конце отрезка! Как?

$$y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 10\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{36}{\pi}\cdot\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + 7 = -10\cdot\frac{1}{2} + 30 + 7 = 32$$

Синус – нечетная функция

Формула приведения

$$y(0) = 10\sin 0 - 0 + 7 = 7$$

$$0$$

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\frac{5\pi}{6} = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

Ответ: 32

14. Найдите наименьшее значение функции

$y = 5\cos x - 6x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};\, 0\right]$

$(\cos x)' = -\sin x$

1. Найти $f'(x)$

$$y' = -5\sin x - 6$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$-5\sin x - 6 = 0$$

$$\sin x = -\frac{6}{5}$$

$$\varnothing \quad т.к. \quad \sin x \in [-1;1]$$

Функция на всей области определения убывает. Нетрудно догадаться, что $y' < 0$.
Тогда наименьшее значение функция будет иметь в правом конце отрезка, т.е. в точке x=0.

0

$$y\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 5\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - 6\cdot\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 4 = 9\pi + 4$$

1

$$y(0) = 5\cos 0 - 0 + 4 = 9$$

Если вы не догадались, то вычислите значения функции в каждом конце отрезка и выберите наименьшее.

Ответ: 9

15. Найдите наибольшее значение функции

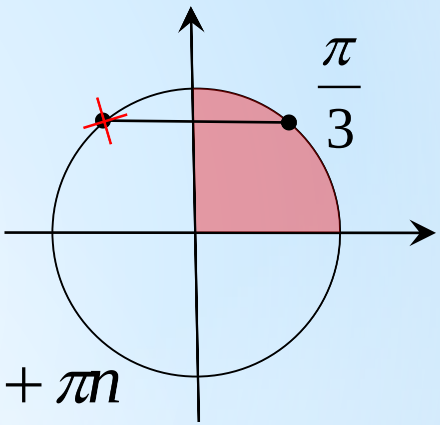
$y = 12\cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

1. Найти $f'(x)$ $\quad y' = -12\sin x + 6\sqrt{3}$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$-12\sin x + 6\sqrt{3} = 0$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$$



$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12\cos\frac{\pi}{3} + 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 12$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12\cos\frac{\pi}{2} + 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 6 + \sqrt{3}\pi$$

Но нам не нужны ВСЕ стационарные точки. Необходимо сделать выбор тех значений, которые попадут в заданный отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$y(0) = 12\cos 0 + 6\sqrt{3}\cdot 0 - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 18 - 2\sqrt{3}\pi$$

Ответ: 12

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

16. Найдите наименьшее значение функции

y = 4tgx – 4x – π+ 5 на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

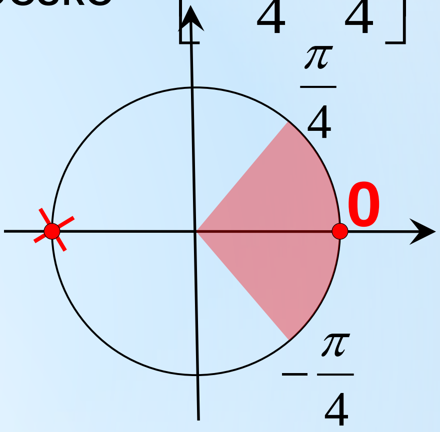
1. Найти $f'(x)$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$y' = 4 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 4$$

$$\frac{4}{\cos^2 x} - 4 = 0$$

$$\cos^2 x = 1$$



Нам не нужны ВСЕ стационарные точки. Необходимо сделать выбор тех значений, которые попадут в заданный отрезок

3. Вычислим значения функции в критических точках $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ и на концах отрезка.

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -4 + \pi - \pi + 5 = 1$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 - \pi - \pi + 5 = 9 - 2\pi$$

$$y(0) = -0 - 0 - \pi + 5 = 5 - \pi$$

4. Из вычисленных значений сделаем выбор наименьшего.

Ответ: 1

$$\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

17. Найдите наибольшее значение функции

$y = 3tgx - 3x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\ 0\right]$

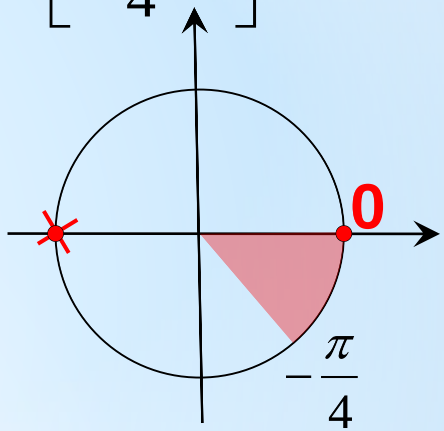
1. Найти $f'(x)$

$$y' = 3\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - 3$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$\frac{3}{\cos^2 x} - 3 = 0$$

$$\cos^2 x = 1$$



Нам не нужны ВСЕ значения х.
Необходимо сделать выбор тех значений, которые попадут в заданный отрезок $\left[-\frac{\pi}{4};\ 0\right]$

3. Вычислим значения функции в критических точках и на концах отрезка.

4. Из вычисленных значений сделаем выбор наибольшего.

-1

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 3\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 5 = -3 + \frac{3\pi}{4} + 5 = 2 + \frac{3\pi}{4}$$

0

$$y(0) = 3tg0 - 0 + 5 = 5$$

Ответ: 5

Спасибо за внимание!