Задачи с прикладным содержанием (задание 9)

Учитель математики
МБОУ СОШ №5
Крыловского района
Голинченко Ольга Николаевна

Задание 9

Задание 9 проверяет умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражение, уравнение, неравенство по условию задачи, исследовать построение модели с использованием аппарата алгебры, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов.

Линейные уравнения и выражения

1

Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 500$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 700000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(g) = g(p - v) - f$. Определите месячный объем производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна 300000 руб.

Решение: Задача сводится к нахождению решения уравнения $\pi(g) = 300\,000$ руб. при заданных значениях цены за единицу $p = 500$ руб., переменных затрат на производство одной единицы продукции $v = 300$ руб. и постоянных расходов предприятия $f = 700\,000$ руб. в месяц:

$$\pi(g) = 300\,000 \Leftrightarrow g(p - v) - f = 300\,000 \Leftrightarrow$$

$$g(500 - 300) - 700\,000 = 300\,000 \Leftrightarrow g = 5000$$

Ответ: 5000

2 Квадратные уравнения и выражения

Зависимость объёма спроса *q* (единиц в месяц) на продукцию предприятия — монополиста от цены *p* (тыс. руб.) задаётся формулой $g = 100 - 10p$. Выручка предприятия за месяц *r* (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = g * p$. Определите наибольшую цену *p*, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Решение: Задача сводится к решению неравенства $r(p) \geq 240$:

$$r(p) = g \cdot p = (100 - 10p)p$$
$$= 100p - 10p^2.$$
$$r(p) \geq 240 \Leftrightarrow 10p^2 - 100p + 240 \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$p^2 - 10p + 24 \leq 0$$
$$4 \leq p \leq 6$$

Ответ: 6

3

В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}\,kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t – время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, H_0 – начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{50}$ – отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g – ускорение свободного падения (считайте g = 10 м/с^2). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды?

Решение: Формулой, описывающей уменьшение высоты столба воды с течением времени, является

$$H(t) = 20 - \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 20} \cdot \frac{1}{50} \cdot t + \frac{10}{2} \cdot (\frac{1}{50})^2 \cdot t^2 = 0{,}002t^2 - 0{,}4t + 20$$

Четверть первоначального объёма воды в баке останется, когда высота столба воды будет 5 м. Определим требуемое на вытекание трёх четвертей воды время — найдём меньший корень уравнения $H(t) = 5$:

$$0{,}002t^2 - 0{,}4t + 20 = 5 \Leftrightarrow t^2 - 200t + 7500 = 0$$

$$t_1 = 50; \quad t_2 = 150$$

Таким образом, через 50 секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды.

Ответ: 50

4

Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t – время в минутах, $T_0 = 1400$ К, $a = -10$ К/мин^2 , $b = 200$К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1760 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

Ответ: 2

Решение:

Найдём, в какой момент времени после начала работы температура станет равной 1760 К. Задача сводится к решению неравенства $T(t) \leq 1760$ при заданных значениях параметров *a* и *b*:

$1400 + 200t - 10t^2 \leq 1760 \Leftrightarrow t^2 - 20t + 36 \geq 0,\ t \leq 2; t \geq 18$.

Через 2 минуты после включения прибор нагреется до 1760 К, и при дальнейшем нагревании может испортиться. Таким образом, прибор нужно выключить через 2 минуты.

5

Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 57$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 12$ км/ч². Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где t — время в часах. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 30 км от города. Ответ дайте в минутах.

Решение:

Мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если $S \leq 30$ км. Задача сводится к нахождению наибольшего решения неравенства $S \leq 30$ при заданных значениях параметров v_0 и a:

$$S \leq 30 \Leftrightarrow 6t^2 + 57t \leq 30 \Leftrightarrow 6t^2 + 57t - 30 \leq 0$$

$$2t^2 + 19t - 10 \leq 0 \Leftrightarrow \quad -10 \leq t \leq 0{,}5.$$

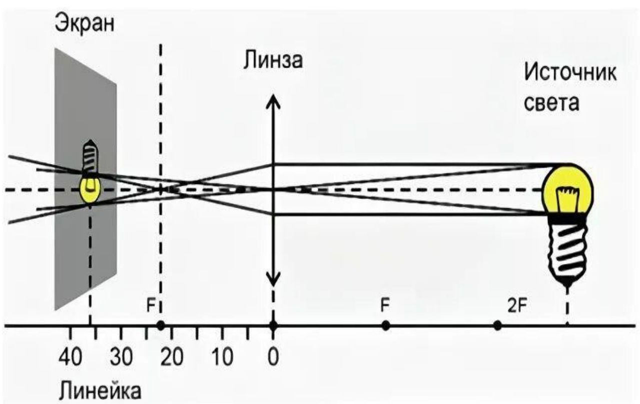
Учитывая, что время — неотрицательная величина, получаем 0,5 ч, то есть 30 мин.

Ответ: 30

Рациональные уравнения и неравенства

6

Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 30$ см . Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.



Решение:

Поскольку имеем: $f = 30$: $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{30} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1}=\frac{1}{30}-\frac{1}{d_2}$. Наименьшему возможному d_1 значению соответствует наибольшее значение левой части полученного равенства, и, соответственно, наибольшее возможное значение правой части равенства. Разность $\frac{1}{30}-\frac{1}{d_2}$ в правой части равенства достигает наибольшего значения при наименьшем значении вычитаемого $\frac{1}{d_2}$, которое достигается при наибольшем возможном значении знаменателя d_2. Поэтому $d_2 = 180$, откуда

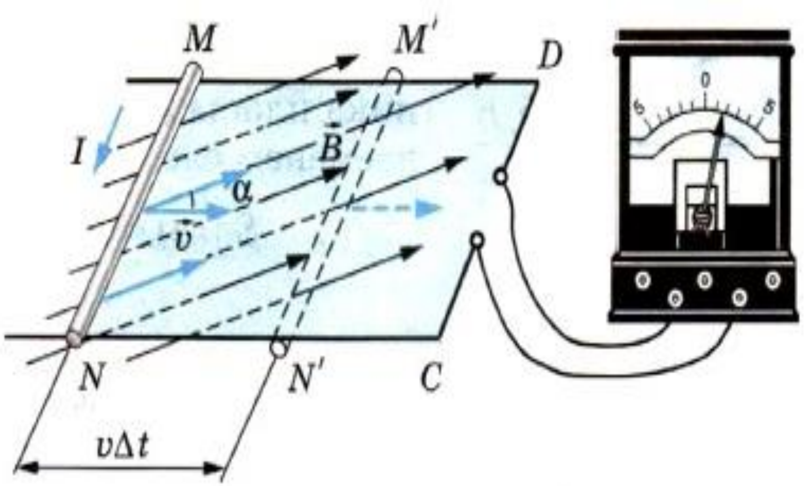
$$\frac{1}{d_1}=\frac{1}{30}-\frac{1}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1}=\frac{5}{180} \quad \frac{1}{d_1}=\frac{1}{36} \Leftrightarrow d_1 = 36 \text{ см.}$$

По условию лампочка должна находиться на расстоянии от 30 до 50 см от линзы. Найденное значение удовлетворяет условию.

Ответ: 36

7

По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$, где ε – ЭДС источника (в вольтах), $r = 1$ Ом — его внутреннее сопротивление, R – сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 20% от силы тока короткого замыкания $I_{кз} = \frac{\varepsilon}{r}$? (Ответ выразите в омах.)



Решение:

Задача сводится к решению неравенства $I \le 0{,}2 I_{кз}$, при известном значении внутреннего сопротивления $r = 1$ Ом:

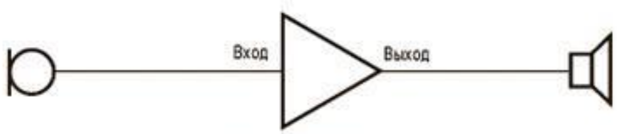
$I \le 0{,}2 I_{кз} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{R+1} \le 0{,}2\frac{\varepsilon}{1} \Leftrightarrow R + 1 \ge 5$

$\Leftrightarrow R \ge 4$ Ом.

Ответ: 4

8

При сближении источника и приёмника звуковых сигналов движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 150$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0\frac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c – скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 10$ м/с и $v = 15$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 160 Гц?



Условное обозначение на блок-схеме

Решение:

Задача сводится к решению неравенства $f \geq 160$ Гц при известных значениях $u = 10$ м/с и $v = 15$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно:

$$f \geq 160 \Leftrightarrow 150 \cdot \frac{c+10}{c-15} \geq 160 \Leftrightarrow$$

$$\frac{15(c+10) - 16(c-15)}{c-15} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{390-c}{c-15} \geq 0$$

$$15 < c \leq 390\,.$$

Значит, максимальная скорость равна 390 м/с.

Ответ: 390

9 Иррациональные уравнения и неравенства

Наблюдатель находится на высоте *h*, выраженной в метрах. Расстояние от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное в километрах, вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$ где $R = 6400$ км — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 4 километров? Ответ выразите в метрах.

Решение:

Задача сводится к решению уравнения $l = 4$ при заданном значении *R*:

$$\sqrt{\frac{6400\,h}{500}} = 4$$

$$\sqrt{\frac{64h}{5}} = 4 \Leftrightarrow \frac{64h}{5} = 16$$

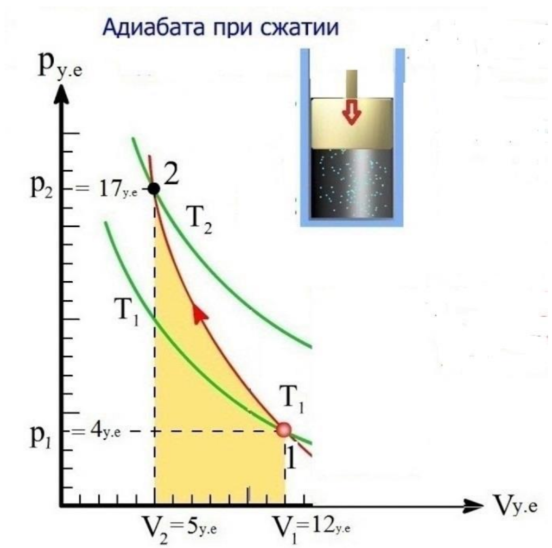
$h = \frac{5}{4}$ =1,25 м.

Ответ: 1,25

Показательные уравнения и неравенства

10

Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $PV^{1,4}$=const , где *p* (атм.) – давление газа, *V* – объём газа в литрах. Изначально объём газа равен 1,6 л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками поршень насоса выдерживает давление не более 128 атмосфер. Определите, до какого минимального объёма можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.



Решение:

Пусть P_1 и V_1 - начальные, а и P_2 и V_2 конечные значения объема и давления газа, соответственно. Тогда задача сводится к решению неравенства

$$V_2 \geq \left(\frac{P_1\, V_1^{1,4}}{P_2}\right)^{\frac{1}{1,4}}$$

где $P_1 = 1$ атм., $V_1 = 1{,}6$ л., $P_2 = 128$ атм. Следовательно,

$$V_2 \geq \left(\frac{1{,}6^{\frac{7}{5}}}{128}\right)^{\frac{5}{7}} = \left(2^{-7}\right)^{\frac{5}{7}} \cdot 1{,}6 = \frac{1{,}6}{32} = 0{,}05$$

Ответ: 0,05

Тригонометрические уравнения и неравенства

11

Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу, со скоростью $v = 3$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \frac{m}{m+M} v \cos\alpha$ (м/с), где $m = 80$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 400$ кг — масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,25 м/с?

Решение:

Задача сводится к решению неравенства $u \geq 0{,}25$ на интервале $(0^0;\ 90^0)$ при заданных значениях массы скейтбордиста $m = 80$ кг и массы платформы $M = 400$ кг:

$$u \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{m}{m+M} v \cos\alpha \geq \frac{1}{4}$$

$$\frac{80}{80+400} \cdot 3 \cdot \cos\alpha \geq 0{,}25$$

$$\frac{1}{2}\cos\alpha \geq \frac{1}{4}$$

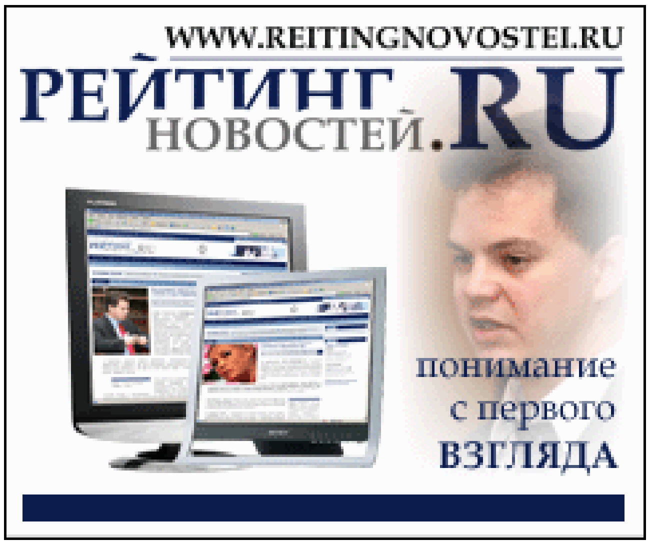
с учетом того, что угол $0^0 \leq \alpha \leq 90^0$ получаем, что $0^0 \leq \alpha \leq 60^0$

Ответ: 60

12

Разные задачи

Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных изданий на основе показателей информативности *In*, оперативности *Op* и объективности *Tr* публикаций. Каждый показатель — целое число от −2 до 2. Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится втрое, а объективность — вдвое дороже, чем оперативность. Таким образом, формула приняла вид $R = \frac{3I_n + O_p + 2T_r}{A}$. Найдите, каким должно быть число *A*, чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 30.



Ответ: 0,4

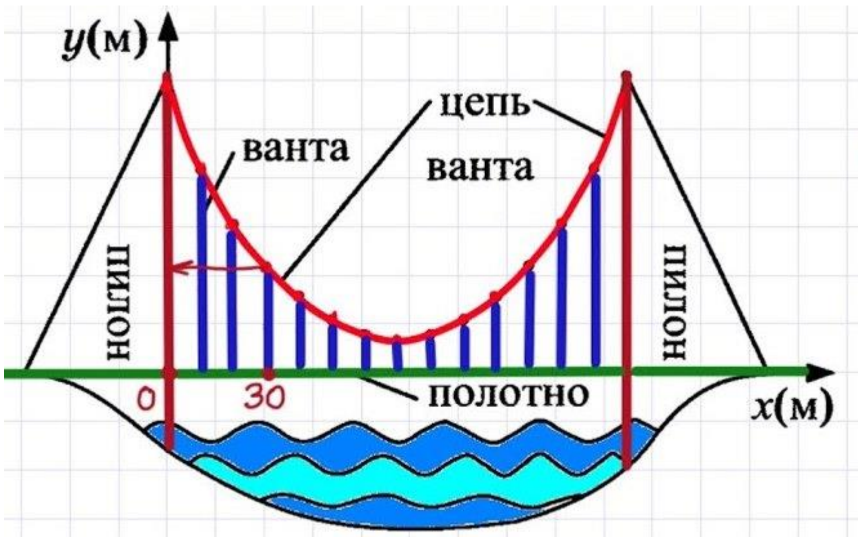
Решение:

Поскольку показатели максимальны, они все равны 2. Подставим значения в формулу и учтем, что рейтинг равен 30:

$$30 = \frac{6+2+4}{A} \Leftrightarrow 30A = 12 \Leftrightarrow A = 0{,}4$$

13

На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами.
Введём систему координат: ось *Oy* направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось *Ox* направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке.
В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0{,}005x^2 - 0{,}74x + 25$, где *x* и *y* измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 30 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



Решение:

Найдем длину ванты, находящейся на расстоянии 30 м от левого пилона (см. рис.), в силу симметрии она равна длине ванты, находящейся на расстоянии 30 м от правого пилона. Задача сводится к вычислению значения $y(30)$, найдём его:
$y(30) = 0{,}005 \cdot 30^2 - 0{,}74 \cdot 30 + 25 = 4{,}5 - 22{,}2 + 25 = 7{,}3$

Ответ: 7,3

Домашнее задание

Линейное уравнение

После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,8 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,4 с? Ответ дайте в метрах.

Квадратное уравнение

В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 4$ − начальный уровень воды, $a = \frac{1}{100}$ м/мин^2, и $b = -\frac{2}{5}$ м/мин постоянные, t − время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

Тригонометрическое уравнение

Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на нее проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера, стремящейся повернуть рамку, (в Н·м) определяется формулой $M = NIBl^2 \sin\alpha$, где $I = 2$ А − сила тока в рамке, $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл — значение индукции магнитного поля, $l = 0,5$ м — размер рамки, $N = 1000$ − число витков провода в рамке, α − острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент M был не меньше 0,75 Н·м?

Домашнее задание

Иррациональное уравнение

Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землей, до видимой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 км. К пляжу ведет лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На какое наименьшее количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 6,4 километров?

Логарифмическое уравнение

Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 3 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 8 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 4$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}4$ – постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 33,6 с. Ответ дайте в киловольтах.

Степенное уравнение

На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \alpha \rho g r^3$, где $\alpha = 4{,}2$ – постоянная, r – радиус аппарата в метрах, $\rho = 1000$ кг/м^3 – плотность воды, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ Н/кг). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем 336 000 Н? Ответ выразите в метрах.

Ответы для перепроверки

1) Ответ: 2,4

2) Ответ: 20

3) Ответ: 30

4) Ответ: 7

5) Ответ: 2

6) Ответ: 2

Спасибо за внимание!

Успехов на ЕГЭ!