# *Задачи с прикладным содержанием* *(задание 9)*

*Учитель математики МБОУ СОШ №3 г.Геленджика Насонова Татьяна Владимировна*
*Учитель математики МБОУ СОШ №5 Крыловского района Голинченко Ольга Николаевна*

# Задание 9

Задание 9 проверяет умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражение, уравнение, неравенство по условию задачи, исследовать построение модели с использованием аппарата алгебры, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов.

# Линейные уравнения и выражения

1

При температуре $0\,^{\circ}C$ рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^{\circ}) = l_0(1 + \alpha \cdot t^{\circ})$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}(^{\circ}C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, $t^{\circ}$ — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

| 9 | 2 | 5 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|

***Решение:*** *По условию задачи рельс удлинится на* ***3 мм=0,003м****, значит, выполняется равенство:*

$$10{,}003=10(1+1{,}2\cdot 10^{-5}t)$$

*Найдем t*

$$10{,}003=10+1{,}2\cdot 10^{-4}t$$

$$10{,}003-10=1{,}2\cdot 10^{-4}t$$

$$0{,}003=1{,}2\cdot 10^{-4}t$$

$$3\cdot 10^{-3}=1{,}2\cdot 10^{-4}t$$

$$t=\frac{3\cdot 10^{-3}}{1{,}2\cdot 10^{-4}}=\frac{3\cdot 10^{-3}\cdot 10^{4}}{1{,}2}=\frac{30}{1{,}2}=25$$

*Ответ*: 25.

2

После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время $t$ падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h=5t^2$, где $h$ – расстояние в метрах, $t$ – время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 1 | | | | | |

***Решение:*** *После дождя уровень воды в колодце повысится, расстояние до воды уменьшится и время падения уменьшится, станет равным* ***0,6-0,2=0,4 с****. Значит, уровень воды поднимется на* $\Delta h$ *метров.*

$$\Delta h=5\cdot 0{,}6^2-5\cdot 0{,}4^2=1$$

***Ответ: 1.***

# Квадратные уравнения и выражения

3

Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 20$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 5$ м/с$^2$. За $t$ – секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 30 метров. Ответ выразите в секундах.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 2 | | | | | |

***Решение:*** *Найдем, за какое время, прошедшее от момента начала торможения, автомобиль проедет 30 метров:*

$20t - 2{,}5t^2 = 30, \quad t^2 - 8t + 12 = 0,$ *тогда*

$t_1 = 2$

$t_2 = 6$

*Значит, через 2 секунды после начала торможения автомобиль проедет 30 метров.*

***Ответ:** 2.*

**4**

Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right)$, где $m$ — масса воды в килограммах, $v$ — скорость движения ведёрка в м/с, $L$ — длина верёвки в метрах, $g$ — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с$^2$). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 122,5 см? Ответ выразите в м/с.

9 | 3 | , | 5

***Решение:** Задача сводится к решению Неравенства при заданной длине верёвки* ***L=1,225 м***

$$P(v) \geq 0, \quad m\left(\frac{v^2}{L} - g\right) \geq 0, \quad т.к\ m > 0,\ то$$

$$\frac{v^2}{1{,}225} - 10 \geq 0,\ v^2 - 12{,}25 \geq 0,\ тогда\ v \geq 3{,}5 м/с$$

***Ответ:** 3,5.*

**5** Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,6 + 8t - 5t^2$, где $h$ – высота в метрах, $t$ – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трёх метров?

***Решение:*** *Определим моменты времени, когда мяч находился на высоте ровно три метра. Для этого решим уравнение:*

$$h(t) = 3 \rightarrow 1,6 + 8t - 5t^2 = 3$$

$$t_1 = 0,2, \qquad t_2 = 1,4$$

*По условию задачи мяч брошен снизу вверх, это означает, что в момент времени* ***t=0,2с*** *мяч находился на высоте 3 метра , двигаясь снизу вверх, а в момент времени* ***t=1,4с*** *мяч находился на этой высоте, двигаясь сверху вниз. Поэтому он находился на высоте не менее трёх метров* ***1,4 − 0,2 = 1,2*** *секунды.*

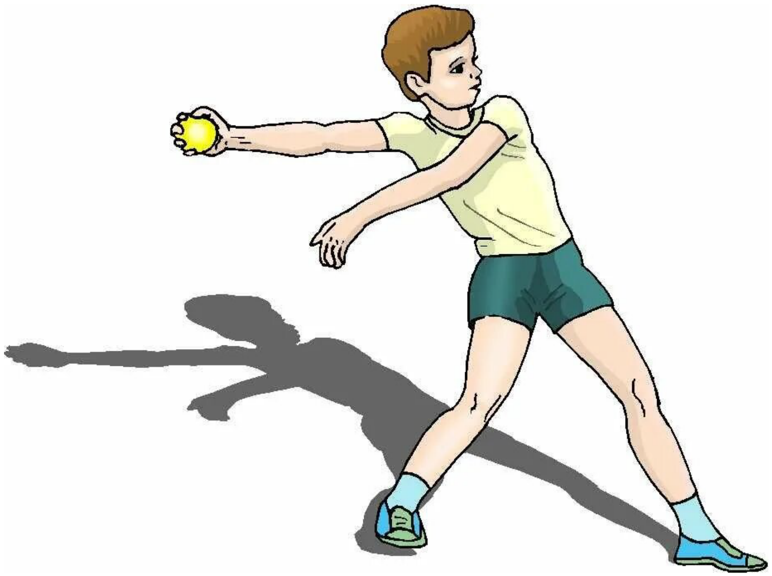
***Ответ: 1,2.***

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 1 | , | 2 | | | |

# Тригонометрические уравнения и выражения

**6**

Мяч бросили под углом $\alpha$ к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком значении угла $\alpha$ (в градусах) время полета составит 1,9 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 19$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$.



***Решение:*** *Задача сводится к решению неравенства на интервале при заданных значениях начальной скорости и ускорения свободного падения:*

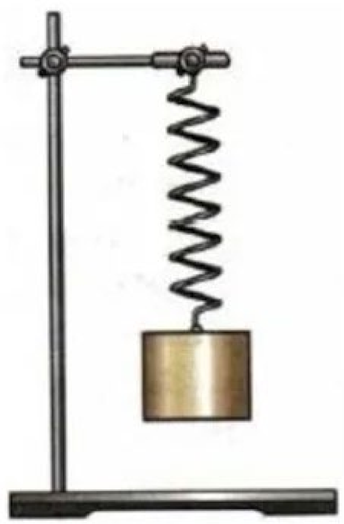
$$\frac{2 \cdot 19 \cdot \sin a}{10} \geq 1{,}9 \rightarrow \sin a \geq \frac{1}{2} \rightarrow 30^\circ \leq a < 90^\circ$$

***Ответ: 30.***

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 3 | 0 | | | | |

7

Груз массой 0,08 кг колеблется на пружине. Его скорость υ меняется по закону $v = v_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$, где $t$ — время с момента начала колебаний, $T$ = 12 с — период колебаний, $v_0 = 0,5$ м/с. Кинетическая энергия $E$ (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где $m$ — масса груза в килограммах, υ — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.



***Решение:*** *Найдем скорость груза через 1 секунду после начала колебаний:*

$$v = v_0 \sin \frac{2\pi t}{T} = 0,5 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 м/с$$

*Найдем кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний:*

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{0,08 \cdot 0,25^2}{2} = 0,0025$$

***Ответ: 0,0025***

| 9 | 0 | , | 0 | 0 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|

# 8 Иррациональные уравнения и выражения

При движении ракеты ее видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону $l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, где $l_0 = 5$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3\cdot10^5$ км/с — скорость света, а $v$ – скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы ее наблюдаемая длина стала не более 4 м? Ответ выразите в км/с.

***Решение:*** *Задача сводится к решению уравнения* $l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 4$ *при заданном значении длины покоящейся ракеты и известной величине скорости света:*

$$5\sqrt{1-\frac{v^2}{9\cdot10^{10}}} = 4 \to 1-\frac{v^2}{9\cdot10^{10}} = \frac{16}{25} \to \frac{v^2}{9\cdot10^{10}} = \frac{9}{25}$$

$$v^2 = \frac{81}{25}\cdot10^{10} \to v = 180000 км/с$$

*Если скорость будет превосходить найденную, то длина ракеты будет менее 4 метров, поэтому минимальная необходимая скорость равна 180 000 км/с.*

***Ответ: 180000***

| 9 | 1 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|

**9**

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a = 5000$ км/ч$^2$. Скорость вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где $l$ — пройденный автомобилем путь в км. Найдите, сколько километров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 100 км/ч.

***Решение:*** *Преобразуем данную в условии формулу:*

$$v = \sqrt{2la} \to v^2 = 2la \to l = \frac{v^2}{2a}$$

*Подставим значения и вычислим:*

$$l = \frac{100^2}{2 \cdot 5000} = \frac{10000}{2 \cdot 5000} = 1 км$$

***Ответ: 1***

| 9 | 1 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|

# 10 Логарифмические уравнения и выражения

Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\upsilon = 3$ моль воздуха объемом $V_1 = 8$ л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объема $V_2$. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\upsilon T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$ (Дж), где $\alpha = 5,75$ – постоянная, а $T = 300$ К – температура воздуха. Какой объем $V_2$ (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10 350 Дж?

***Решение:*** *Необходимо решить уравнение* $a\upsilon T \log_2 \frac{V_1}{V_2} = 10350$ *при заданных значениях постоянной температуры воздуха, количества вещества воздуха и объема воздуха:*

$$5,75 \cdot 3 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{8}{V_2} = 10350$$

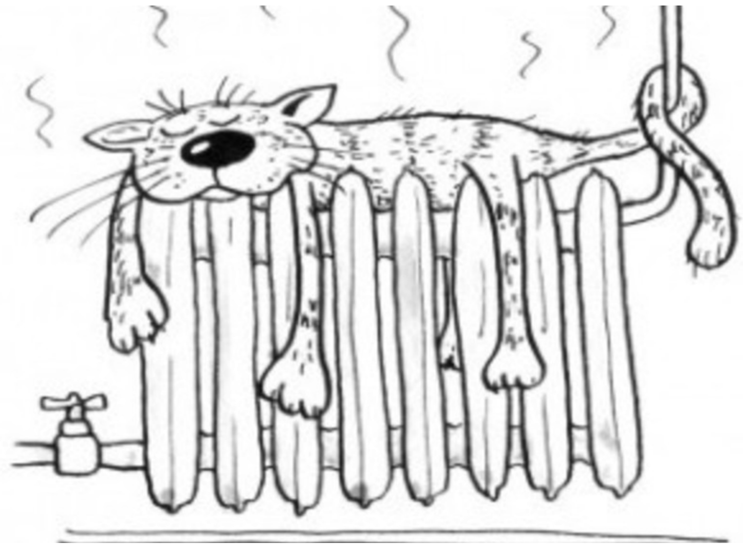
$$\log_2 \frac{8}{V_2} = 2 \to \frac{8}{V_2} = 4 \to V_2 = 2\text{л.}$$

***Ответ: 2***

| 9 | 2 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|

11

Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_п = 20\ ^\circ C$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу воды $m = 0,3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние $x$, вода охлаждается от начальной температуры $T_в = 60\ ^\circ C$ до температуры $T(^\circ C)$, причем $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_в - T_п}{T - T_п}$, где $c = 4200\ \frac{Дж}{кг \cdot ^\circ C}$ — теплоемкость воды, $\gamma = 21\ \frac{Вт}{м \cdot ^\circ C}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0,7$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 84 м.



***Решение:*** *Задача сводится к решению уравнения* $a\frac{cm}{\gamma}\log_2\frac{T_в - T_п}{T - T_п} = 84$ *при заданных значениях теплоёмкости воды, коэффициента теплообмена, постоянной температуры помещения и расхода воды:*

$$0,7 \cdot \frac{4200 \cdot 0,3}{21} \log_2 \frac{60-20}{T-20} = 84$$

$$\log_2 \frac{40}{T-20} = 2 \to \frac{40}{T-20} = 4 \to T = 30^\circ C.$$

***Ответ: 30***

| 9 | 3 | 0 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|

12

# Степенные уравнения и выражения

На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \rho g l^3$, где $l$ – длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000$ кг/м$^3$ – плотность воды, а $g$ – ускорение свободного падения (считайте $g = 9,8$ Н/кг). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем 78400 Н? Ответ выразите в метрах.

***Решение:*** *Задача сводится к решению неравенства* $F_A \le 78400$ *при заданных значениях плотности воды и ускорении свободного падения:*

$$F_A \le 78400 \rightarrow 1000 \cdot 9,8 \cdot l^3 \le 78400 \rightarrow l^3 \le 8$$

$$l \le 2м.$$

***Ответ: 2***

| 9 | 2 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|

13

Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$, где $P$ — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, $S$ — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а $T$ — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности не-которой звезды равна $\frac{1}{125} \cdot 10^{20}$ м$^2$, а мощность её излучения равна $2{,}85 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

***Решение:*** *Нужно выразить температуру звезды из формулы Стефана-Больцмана:*

$$T = \sqrt[4]{\frac{P}{\sigma S}}$$

*и найти её, подставив значения:*

$$\sqrt[4]{\frac{P}{\sigma S}} = \sqrt[4]{\frac{2{,}85 \cdot 10^{25} \cdot 125}{5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{20}}} = \sqrt[4]{625 \cdot 10^{12}} = 5000K.$$

***Ответ: 5000***

| 9 | 5 | 0 | 0 | 0 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|

# Домашнее задание

## Линейное уравнение

После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время $t$ падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где $h$ — расстояние в метрах, $t$ — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,8 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,4 с? Ответ дайте в метрах.

## Квадратное уравнение

В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 4$ − начальный уровень воды, $a = \frac{1}{100}$ м/мин$^2$, и $b = -\frac{2}{5}$ м/мин постоянные, $t$ − время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

## Тригонометрическое уравнение

Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на нее проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера, стремящейся повернуть рамку, (в Н·м) определяется формулой $M = NIBl^2 \sin\alpha$, где $I = 2$ А − сила тока в рамке, $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл — значение индукции магнитного поля, $l = 0,5$ м — размер рамки, $N = 1000$ − число витков провода в рамке, $\alpha$ − острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла $\alpha$ (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент $M$ был не меньше 0,75 Н·м?

# Домашнее задание

## Иррациональное уравнение

Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на высоте $h$ м над землей, до видимой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 км. К пляжу ведет лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На какое наименьшее количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 6,4 километров?

## Логарифмическое уравнение

Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 3 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 8 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 4$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения $U$ (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}4$ – постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 33,6 с. Ответ дайте в киловольтах.

## Степенное уравнение

На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_{\text{А}} = \alpha \rho g r^3$, где $\alpha = 4{,}2$ – постоянная, $r$ – радиус аппарата в метрах, $\rho = 1000$ кг/м$^3$ – плотность воды, а $g$ – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ Н/кг). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем 336 000 Н? Ответ выразите в метрах.

# Ответы для перепроверки

1) Ответ: 2,4

2) Ответ: 20

3) Ответ: 30

4) Ответ: 7

5) Ответ: 2

6) Ответ: 2

# Спасибо за внимание.

***Успехов на ЕГЭ!***