Эффективные методы и приёмы подготовки обучающихся профильных классов инженерно- математической направленности к успешной сдаче ЕГЭ по математике

Савченко Евгений Васильевич, учитель математики МАОУ лицей №64 им. В. Миронова, МО г. Краснодар

Экономические задачи ЕГЭ

Основные виды задач:

1) *Кредиты с равными (аннуитетными) платежами (* аннуитет – *начисление равных платежей на весь срок погашения кредита. При этом в первой*

половине срока задолженность по кредиту практически не гасится – выплачиваются в большей части проценты.. Эта особенность делает платежи относительно небольшими, но увеличивает общую сумму начисляемых процентов)

2) *Кредиты с дифференцированными платежами*

(характерны тем, что задолженность по кредиту погашается равномерно начиная с самых первых выплат, а проценты начисляются на фактический остаток. Таким образом, каждый последующий платеж меньше предыдущего)

3) *Вклады, сложные проценты*

4) *Оптимальный выбор*

С чего начать подготовку к решению экономической задачи?

- чтение условия задачи;
- выбор переменных;
- составление уравнений и неравенств (математической модели)
- решение полученного уравнения, неравенства или системы

Вася взял у Пети в долг 100 рублей под 20% годовых. Сколько рублей Вася должен отдать Пете через год?

$$100 + 100 \cdot 0{,}2 = 100(1 + 0{,}2) = 100 \cdot 1{,}2 = 120$$ рублей

Основные обозначения:

S – сумма кредита

r- процентная вставка(%)

$$k = 1 + \frac{r}{100}$$

x- ежегодная выплата

n- срок кредита

Задача 1.

Ольга хочет взять в кредит 100 000 рублей под 10% годовых. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. На какое минимальное количество лет Ольга может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24 тысяч рублей?

Решение:

Год	Начисление % на долг (руб.)	Платеж (руб.)	Долг (руб.)
			100 000
1.	$1{,}1 \cdot 100000 = 110000$	24 000	$110000 - 24000 = 86000$
2.	$1{,}1 \cdot 86000 = 94600$	24 000	$94600 - 24000 = 70600$
3.	$1{,}1 \cdot 70600 = 77660$	24 000	$77660 - 24000 = 53660$
4.	$1{,}1 \cdot 53660 = 59026$	24 000	$59026 - 24000 = 35026$
5.	$1{,}1 \cdot 35026 = 38528{,}6$	24 000	$38528{,}6 - 24000 = 14528{,}6$
6.	$1{,}1 \cdot 14528{,}6 = 15981{,}46$	15981,46	0

Значит, Ольга может погасить кредит за 6 лет.

Ответ: 6 лет.

Задача 2.

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 147 000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен двумя равными платежами, то есть за два года.

Решение

Пусть *x рублей – выплата*. Составим таблицу:

Год	Январь Начисление % на долг (руб.)	Февраль-Июнь Платеж (руб.)	Июль Долг (руб.)
2020			147 000
2021	$1{,}1\cdot 147000=161700$	x	$161700-x$
2022	$1{,}1\cdot(161700-x)$	x	$1{,}1\cdot(161700-x)-x$

Так как кредит будет погашен за 2 года, то долг в 2022 году будет равен нулю.
Составим и решим уравнение:

$$1{,}1\cdot(161700-x)-x=0$$

$$177870-1{,}1x-x=0$$

$$-2{,}1x=-177870$$

$$x=84700$$

Значит, платеж равен 84700 рублей, тогда за 2 года банку будет выплачено $84700\cdot 2=169400$ рублей.

Ответ: 169400 рублей.

Задача 3.

В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 31% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 69 690 821 рубль.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что он был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

Решение

Пусть S – сумма кредита, $x = 69\ 690\ 821$ - выплата.

Год	**Январь** **Начисление % на долг (руб.)**	**Февраль-Июнь** **Платеж (руб.)**	**Июль** **Долг (руб.)**
			S
1.	$1{,}31S$	x	$1{,}31S - x$
2.	$1{,}31 \cdot (1{,}31S - x)$	x	$1{,}31 \cdot (1{,}31S - x) - x$
3.	$1{,}31 \cdot (1{,}31 \cdot (1{,}31S - x) - x)$	x	$1{,}31 \cdot (1{,}31 \cdot (1{,}31S - x) - x) - x$

Так как кредит будет погашен за 3 года, то долг в 3 году будет равен нулю.

$$1{,}31 \cdot (1{,}31 \cdot (1{,}31S - x) - x) - x = 0$$

$$1{,}31 \cdot (1{,}31^2 S - 1{,}31x - x) - x = 0$$

$$1{,}31^3 S - 1{,}31^2 x - 1{,}31x - x = 0$$

$$1{,}31^3 S = 1{,}31^2 x + 1{,}31x + x$$

$$S = \frac{x(1{,}31^2 + 1{,}31 + 1)}{1{,}31^3}$$

$$S = \frac{69690821 \cdot (1{,}7161 + 1{,}31 + 1)}{1{,}31^3}$$

$$S = 31000000 \cdot 4{,}0261$$

$$S = 124809100$$

Ответ: сумма кредита 124 809 100 рублей.

Задача 4.

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023	Июль 2024
Долг (в млн рублей)	S	$0,8S$	$0,6S$	$0,4S$	0

Решение

Пусть S – сумма кредита.

Год	**Январь** **Начисление % на долг (руб.)**	**Февраль-Июнь** **Платеж (руб.)**	**Июль** **Долг (руб.)**
2020			S
2021	1,25S	1,25S-0,8S=0,45S	0,8S
2022	1,25·0,8S=S	S-0,6S=0,4S	0,6S
2023	1,25·0,6S=0,75S	0,75S-0,4S=0,35	0,4S
2024	1,25·0,4S=0,5S	0,5S-0=0,5S	0

Найдем сумму выплат: 0,45S+0,4S+0,35+0,5S=1,7S. По условию задачи сумма выплат меньше 50 млн рублей:

$$1{,}7S < 50$$

$$S < \frac{50}{1{,}7}$$

$$S < 29\frac{7}{17}.$$

Ответ: 29млн.

Задача 5.

15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на *r*% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите *r*.

Решение

Пусть S – сумма кредита, $k = 1 + \frac{r}{100}$, $S \div 19 = \frac{S}{19}$ - величина, на которую уменьшается долг каждый месяц.

Месяц	1-е число Начисление % на долг (руб.)	2-14 е число Платеж (руб.)	15 –е число Долг (руб.)
			S
1	kS	$kS - \frac{18}{19}S$	$\frac{18}{19}S$
2	$\frac{18}{19}Sk$	$\frac{18}{19}Sk - \frac{17}{19}S$	$\frac{17}{19}S$
3	$\frac{17}{19}Sk$	$\frac{17}{19}Sk - \frac{16}{19}S$	$\frac{16}{19}S$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
17	$\vdots$	$\vdots$	$\frac{2}{19}S$
18	$\frac{2}{19}Sk$	$\frac{2}{19}Sk - \frac{1}{19}S$	$\frac{1}{19}S$
19	$\frac{1}{19}Sk$	$\frac{1}{19}Sk$	0

По условию задачи общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Составим математическую модель:

$$kS-\frac{18}{19}S+\frac{18}{19}Sk-\frac{17}{19}S+\frac{17}{19}Sk-\frac{16}{19}S+\dots+\frac{2}{19}Sk-\frac{1}{19}S+\frac{1}{19}Sk=1{,}3S$$

Выполнив преобразования, получим

$$20kS=20{,}6S$$

$$k=1{,}03$$

$$1+\frac{r}{100}=\frac{103}{100}$$

$$r=3$$

Ответ: 3%

Задача 6.

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 3,6 млн рублей?

Решение

Пусть n – количество лет. $9 \div n = \frac{9}{n}$ - величина, на которую уменьшается долг.

Год	Январь Начисление % на долг (млн.)	Февраль-Июнь Платеж (млн.)	Июль Долг (млн.)
			9
1	$1,2 \cdot 9 = 10,8$	$10,8 - \left(9 - \frac{9}{n}\right)$	$9 - \frac{9}{n}$
2	$1,2 \cdot \left(9 - \frac{9}{n}\right)$	$1,2 \cdot \left(9 - \frac{9}{n}\right) - \left(9 - \frac{18}{n}\right)$	$9 - \frac{9}{n} - \frac{9}{n} = 9 - \frac{18}{n}$
3	$1,2 \cdot \left(9 - \frac{18}{n}\right)$	$1,2 \cdot \left(9 - \frac{18}{n}\right) - \left(9 - \frac{27}{n}\right)$	$9 - \frac{27}{n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$\vdots$	$\vdots$	$\frac{9}{n}$
n	$1,2 \cdot \frac{9}{n}$	$1,2 \cdot \frac{9}{n}$	0

Так как кредит с дифференцируемыми платежами, то наибольший платеж будет первый.

Составим математическую модель.

$$10{,}8-\left(9-\frac{9}{n}\right)=3{,}6$$

$$10{,}8-9+\frac{9}{n}=3{,}6\,/\cdot n$$

$$10{,}8n-9n+9=3{,}6n$$

$$-1{,}8n=-9$$

$$n=5$$

Следовательно, кредит взят на 5 лет.

Выплата 2 года: $1{,}2\cdot\left(9-\frac{9}{5}\right)-\left(9-\frac{18}{5}\right)=1{,}2\cdot 7{,}2-5{,}4=3{,}24$

Выплата 3 года: $1{,}2\cdot\left(9-\frac{18}{5}\right)-\left(9-\frac{27}{5}\right)=1{,}2\cdot 5{,}4-3{,}6=2{,}88$

Выплата 4 года: $1{,}2\cdot\left(9-\frac{27}{5}\right)-\left(9-\frac{36}{5}\right)=1{,}2\cdot 3{,}6-1{,}8=2{,}52$

Выплата 5 года: $1{,}2\cdot\frac{9}{5}=2{,}16$

Сумма выплат:3,6+ 3,24+2,88+2,52+2,16=14,4

Ответ:14,4

Задача 7.

По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает на 11% в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

Решение

Пусть S – сумма вклада, $k = 1 + \frac{r}{100}$.

Вклад «А»

Год	Начало года	Конец года
1	S	$1{,}1S$
2	$1{,}1S$	$1{,}1 \cdot 1{,}1S = 1{,}1^2 S$
3	$1{,}1^2 S$	$1{,}1 \cdot 1{,}1^2 S = 1{,}1^3 S$

Вклад «Б»

Год	Начало года	Конец года
1	S	$1{,}11S$
2	$1{,}11S$	$1{,}11 \cdot 1{,}11S = 1{,}11^2 S$
3	$1{,}1^2 S$	$1{,}11^2 Sk$

По условию задачи вклад «Б» за три года останется выгоднее вклада «А». Составим математическую модель.

$$1{,}11^2 Sk > 1{,}1^3 S$$

$$k > \frac{1{,}1^3}{1{,}11^2}$$

$$1 + \frac{r}{100} > \frac{13310}{12321}$$

$$r > 100 \cdot \frac{13310 - 12321}{12321}$$

$$r > 8{,}02...$$

$$r = 9$$

Ответ: 9

Задача8.

Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0{,}5x^2 + x + 7$ млн руб. в год. При цене p тыс. руб. за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн руб.) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн руб.?

Решение

Введем функцию $f(x) = px - q$ - годовая прибыль.

Преобразуем $f(x) = px - (0{,}5x^2 + x + 7) = px - 0{,}5x^2 - x - 7$

$f(x) = -0{,}5x^2 + px - x - 7 = -0{,}5x^2 + (p-1)x - 7$

Квадратичная функция, график парабола, ветви направлены вниз, наибольшее значение функции достигается в вершине параболы. Найдем координаты вершины параболы:

$$x_{вершины} = \frac{-(p-1)}{-2 \cdot 0{,}5} = p - 1$$

$$f(p-1) = -0{,}5(p-1)^2 + (p-1)^2 - 7 = 0{,}5(p-1)^2 - 7$$

По условию задачи через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн руб., получим:

$$0{,}5(p-1)^2 - 7 \geq 25$$

$$0{,}5(p-1)^2 \geq 32 / \cdot 2$$

$$(p-1)^2 \geq 64$$

$$(p-9)(p+7) \geq 0$$

Следовательно, наименьшее значение $p = 9$.

Ответ: 9