



ДОПОЛНИТЕЛЬЕ МАТЕРИАЛЫ

УРАВНЕНИЯ

ЗАДАНИЕ № 13

**ЕГЭ МАТЕМАТИКА
ПРОФИЛЬНОГО
УРОВНЯ**

Ильина З.Н.
учитель математики
МОБУ гимназия № 15
им. Н. Н. Белоусова.





Задание 8.

а) Решите уравнение $\cos 2x + 0,75 = \cos^2 x$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение

$$\cos 2x + 0,75 = \cos^2 x$$

$$2\cos^2 x - 1 + 0,75 = \cos^2 x$$

$$\cos^2 x = 0,25$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$

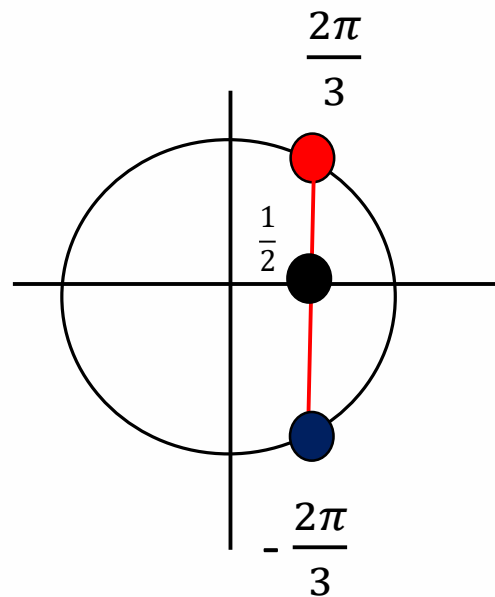
$$\cos 2x = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

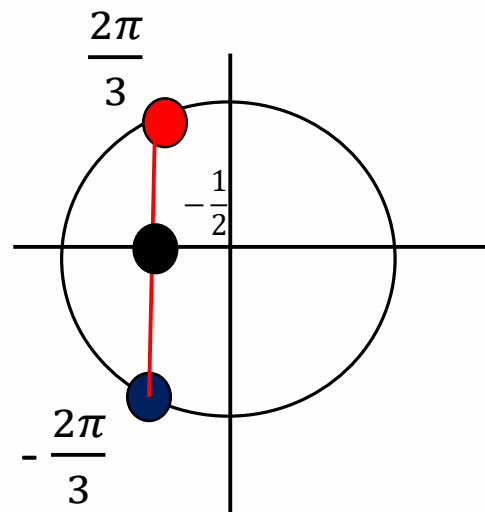




$$\cos x = \frac{1}{2}$$



$$\cos x = -\frac{1}{2}$$



$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

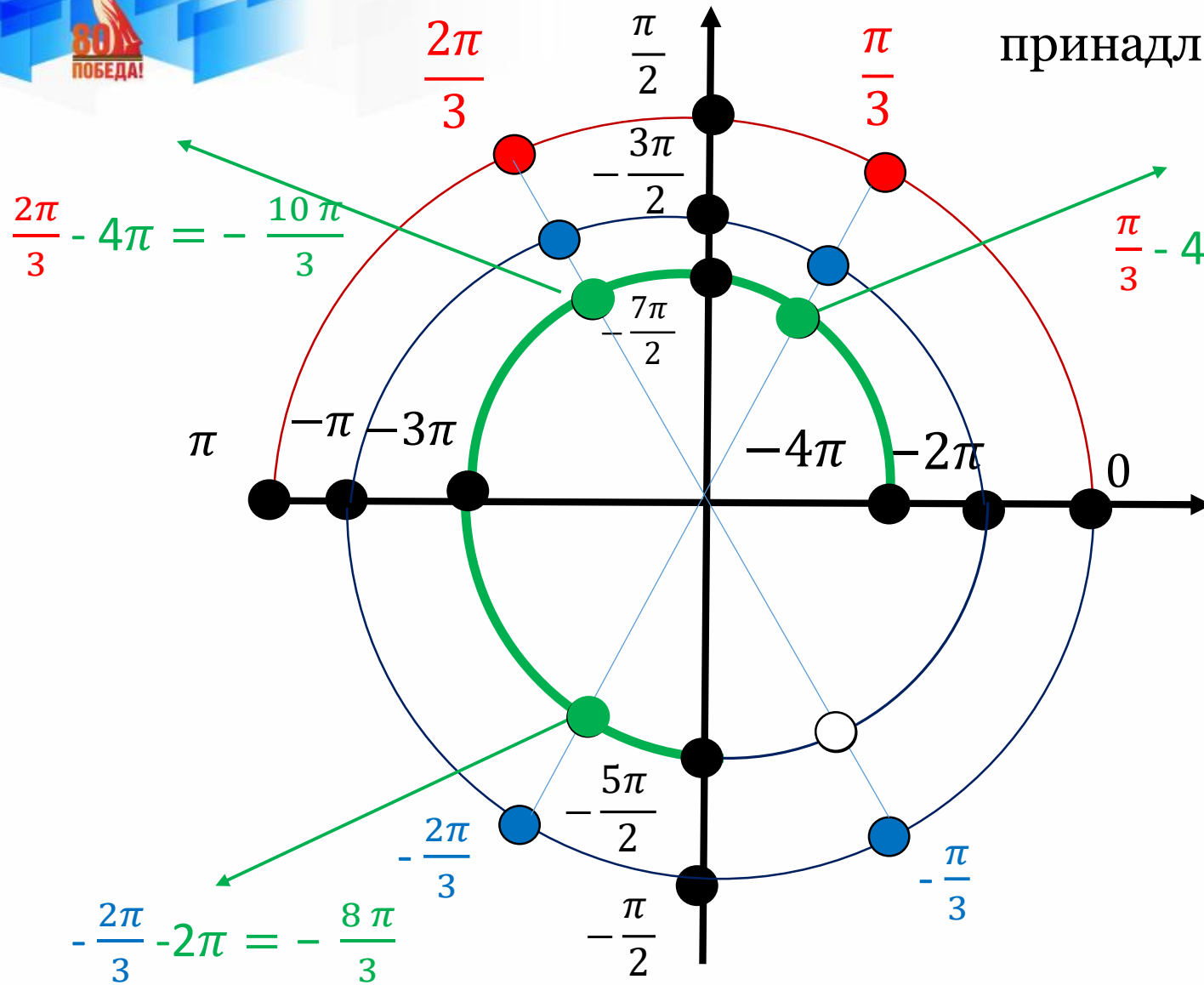
$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$





б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.



$$x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$\text{б) } -\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}; -\frac{8\pi}{3}$$





Задание 9

а) Решите уравнение $\frac{\sin x}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 4\sin^2 \frac{x}{2}$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-4\pi; -2,5\pi]$.

Решение

а) Решите уравнение $\frac{\sin x}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 4\sin^2 \frac{x}{2}$;

$$\sin x = 4\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\sin x = \left(2\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}\right) \cdot \left(2\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}\right)$$

$$\sin x = (\sin x) \cdot (\sin x)$$

$$\sin x = \sin^2 x$$

$$\sin x - \sin^2 x = 0$$

$$\sin x \cdot (1 - \sin x) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad 1 - \sin x = 0$$

угол $\frac{x}{2}$, а двойной угол $x = 2 \cdot \frac{x}{2}$

$$\sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

Условие:

$$\cos^2 \frac{x}{2} \neq 0$$

$$\cos \frac{x}{2} \neq 0$$

$$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



$$\sin x = 0$$

$$x = \pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Условие:

$$x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

С учетом условия

$$x = 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$1 - \sin x = 0$$

$$\sin x = 1$$

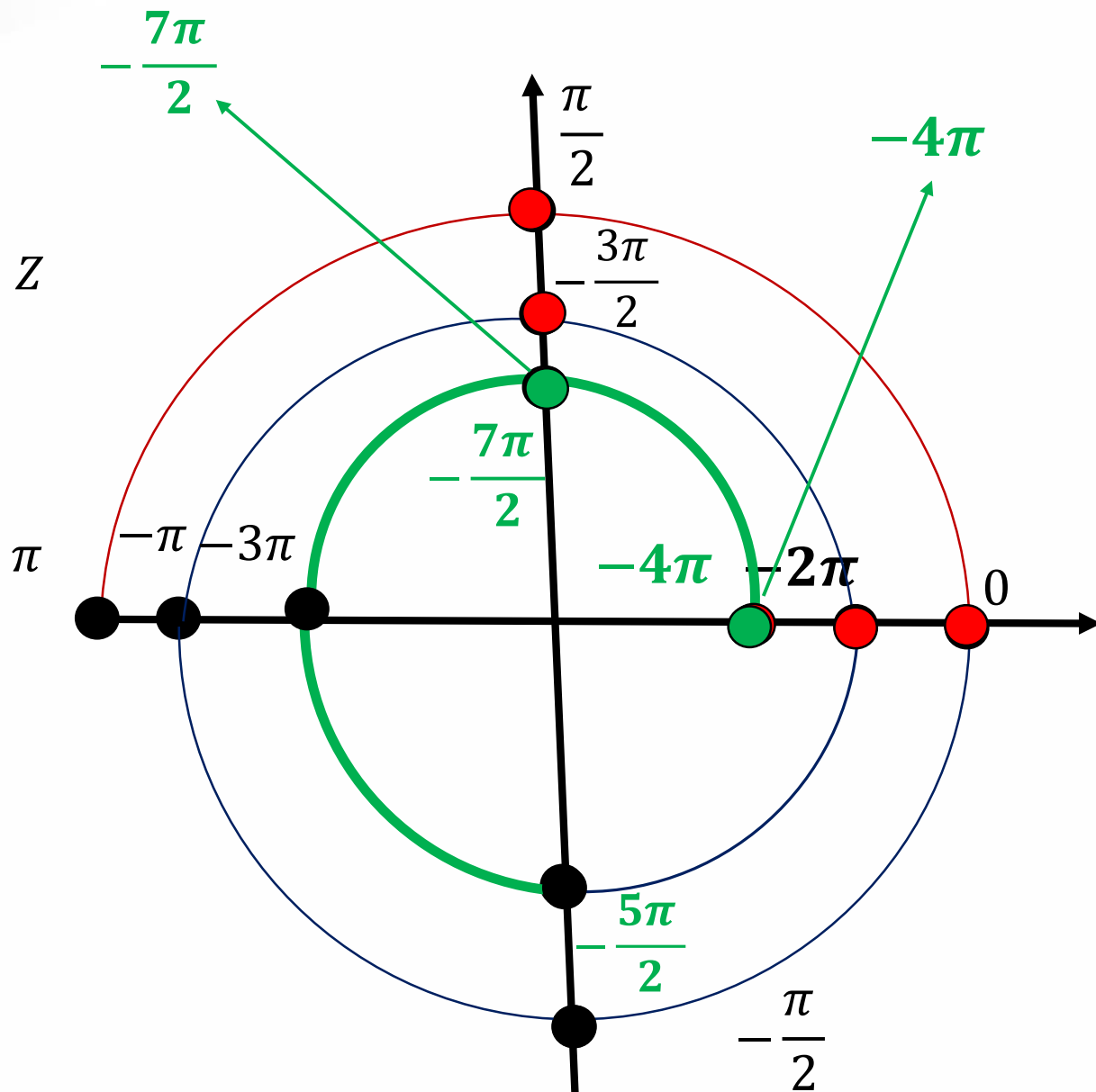
$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$



б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

$$x = 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$



Ответ: а) $2\pi l, l \in \mathbb{Z}$
 $\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$

б) $-4\pi; -\frac{7\pi}{2}$



Задание 10

а) Решите уравнение $16^{\cos x} + 16^{\cos(\pi-x)} = \frac{17}{4}$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение

$$\text{а) } 16^{\cos x} + 16^{\cos(\pi-x)} = \frac{17}{4}$$

$$16^{\cos x} + 16^{-\cos x} = \frac{17}{4}$$

$$16^{\cos x} + \frac{1}{16^{\cos x}} = \frac{17}{4}$$

Пусть $16^{\cos x} = t, t > 0$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

тогда

$$t + \frac{1}{t} = \frac{17}{4}$$

$$\frac{t^2 + 1}{t} = \frac{17}{4}$$

$$4t^2 + 4 = 17t$$

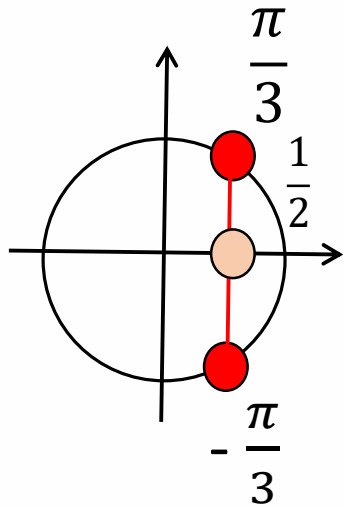
$$4t^2 - 17t + 4 = 0$$

$$t_1 = 4 \qquad t_2 = \frac{1}{4}$$





Обратная замена



$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$$

$$t_1 = 4$$

$$16^{\cos x} = 4$$

$$4^{2\cos x} = 4^1$$

$$2\cos x = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

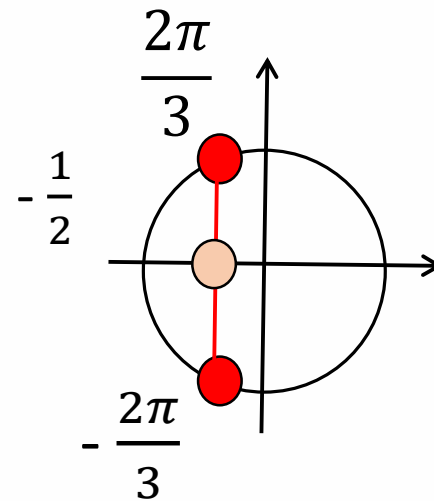
$$t_2 = \frac{1}{4}$$

$$16^{\cos x} = \frac{1}{4}$$

$$4^{2\cos x} = 4^{-1}$$

$$2\cos x = -1$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

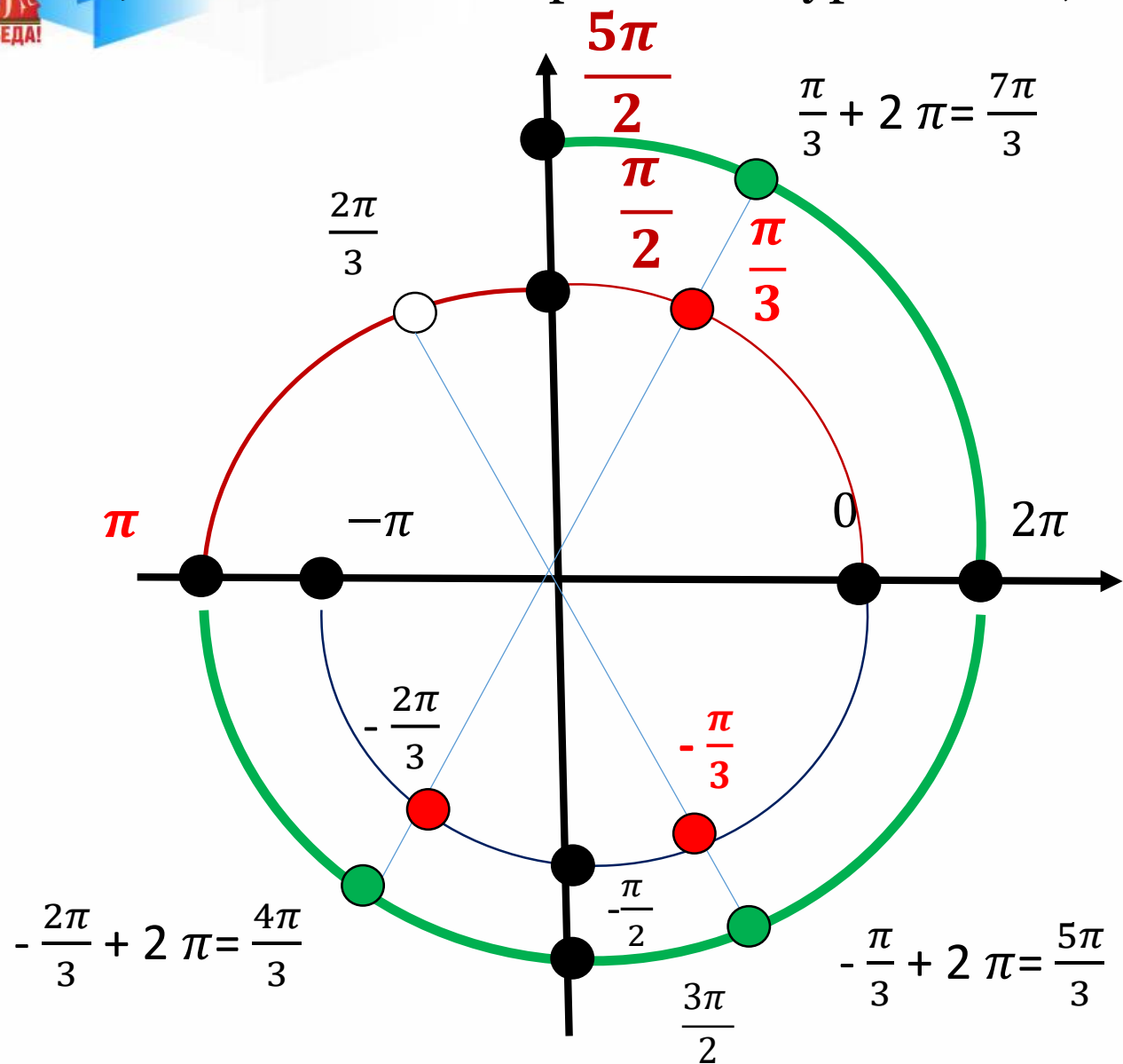


$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$





б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.



Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$

$\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}$





Задание 11

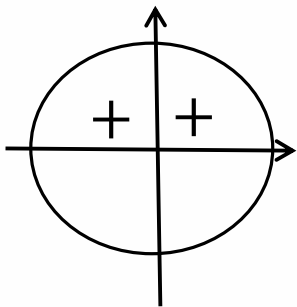
а) Решите уравнение $\frac{4^{\sin 2x} - 2^{2\sqrt{3}\sin x}}{\sqrt{7\sin x}} = 0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{13\pi}{2}; -5\pi\right]$.

Решение

I) Условие:
 $7\sin x > 0$

$$\sin x > 0$$



II) $4^{\sin 2x} - 2^{2\sqrt{3}\sin x} = 0$

$$4^{\sin 2x} = 2^{2\sqrt{3}\sin x}$$

$$2^{2\sin 2x} = 2^{2\sqrt{3}\sin x}$$

$$2\sin 2x = 2\sqrt{3}\sin x$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$$

$$2 \cdot 2\sin x \cdot \cos x - 2\sqrt{3}\sin x = 0$$

$$2\sin x \cdot (2\cos x - \sqrt{3}) = 0$$



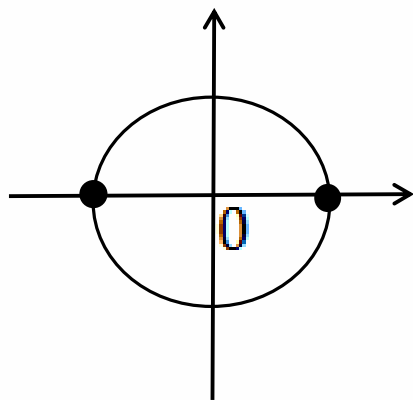
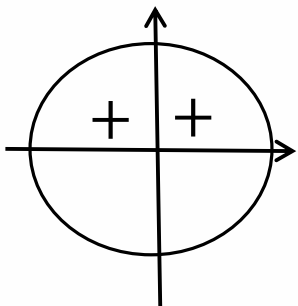


$$2 \sin x = 0$$

$$\sin x = 0$$

I) Условие:

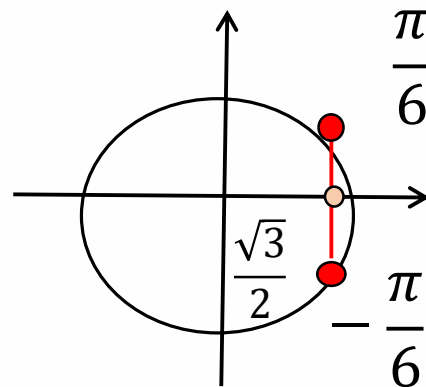
$$\sin x > 0$$



$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2 \cos x - \sqrt{3} = 0$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$$

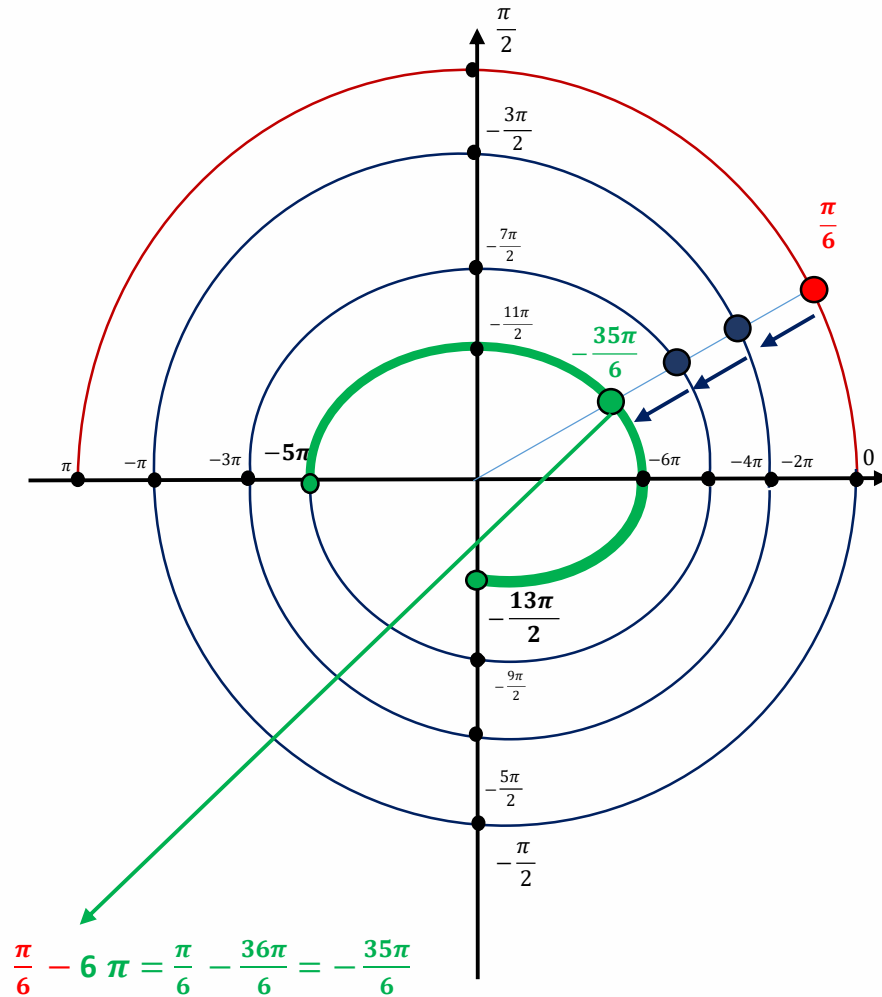
С учетом условия

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$$





6) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{13\pi}{2}; -5\pi\right]$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{35\pi}{6}$.





Задание 12

а) Решите уравнение $\frac{\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x)}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$;

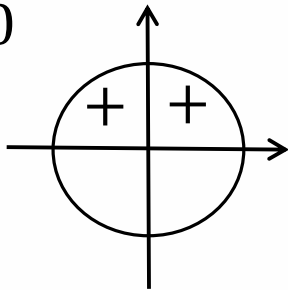
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение

а) Решите уравнение $\frac{\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x)}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$;

I) **Условие:**

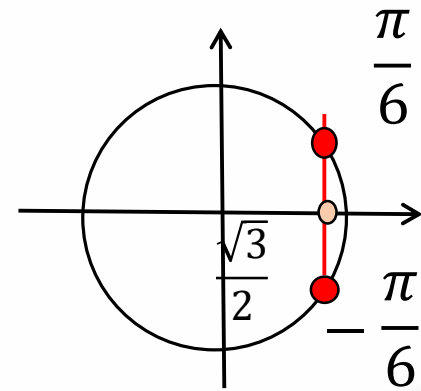
$$\sin x > 0$$



и $2\cos x - \sqrt{3} \neq 0$

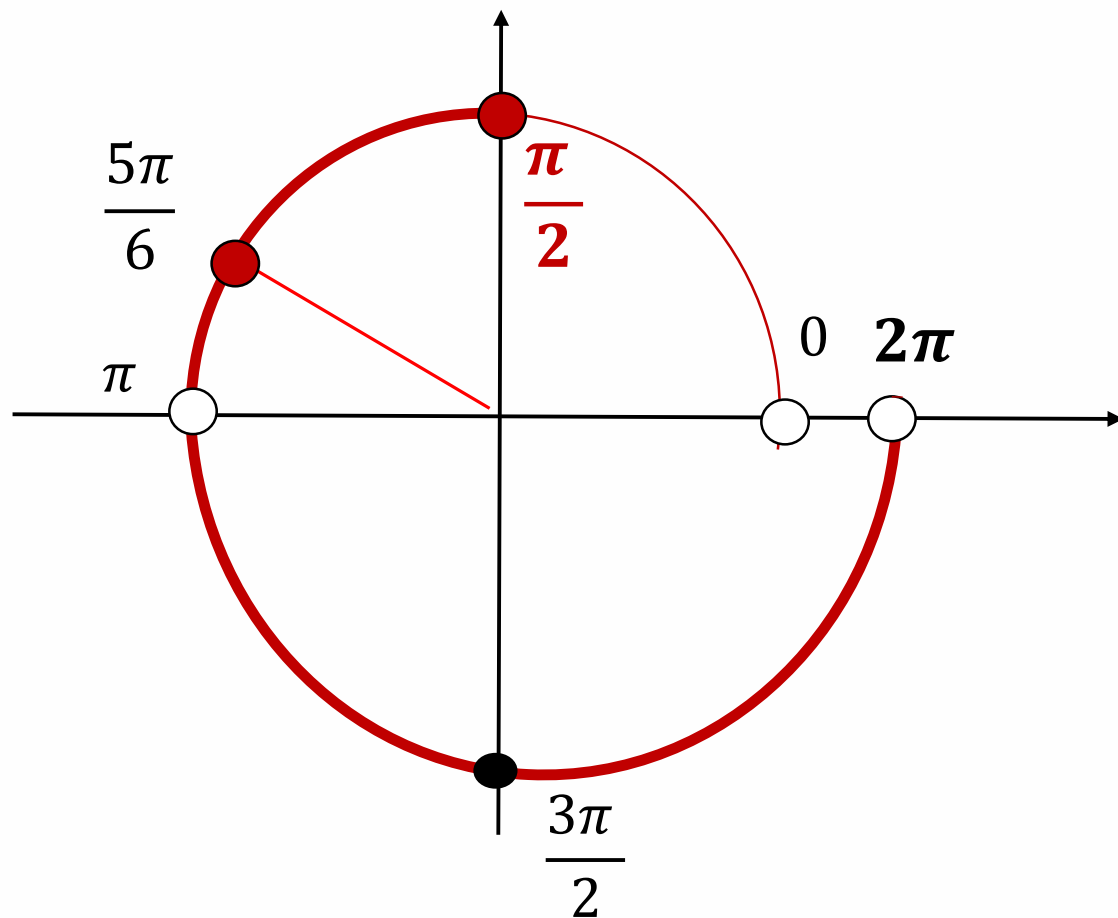
$$\cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x \neq \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$





б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.



Ответ:

а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k, n \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$.





Задание 13 (2-й способ задания 7)

а) Решите уравнение $2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + \sin x = \sqrt{3} \sin 2x + 1$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi \right]$.

Решение

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \left(x + \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right) = \sin x \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + \cos x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right).$$

а) $2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + \sin x = \sqrt{3} \sin 2x + 1$

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{6}.$$

$$2 \left(\sin x \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + \cos x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right) + \sin x = \sqrt{3} \sin 2x + 1$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{6}.$$

$$2 \left(\sin x \cdot \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \cdot \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{6} + \cos x \cdot \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \cdot \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right) + \sin x = \sqrt{3} \sin 2x + 1$$

$$2 \left(\sin x \cdot \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x \cdot \sin x \cdot \frac{1}{2} + \cos x \cdot \sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x \cdot \cos x \cdot \frac{1}{2} \right) + \sin x = \sqrt{3} \sin 2x + 1$$

$$2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin^2 x + \cos^2 x + \sin x = \sqrt{3} \sin 2x + 1$$

$$\sqrt{3} \sin 2x - \sin^2 x + \cos^2 x + \sin x = \sqrt{3} \sin 2x + 1$$





$$\cos 2x + \sin x - 1 = 0$$

$$1 - 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x - 2\sin^2 x = 0$$

$$\sin x \cdot (1 - 2\sin x) = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$1 - 2\sin x = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

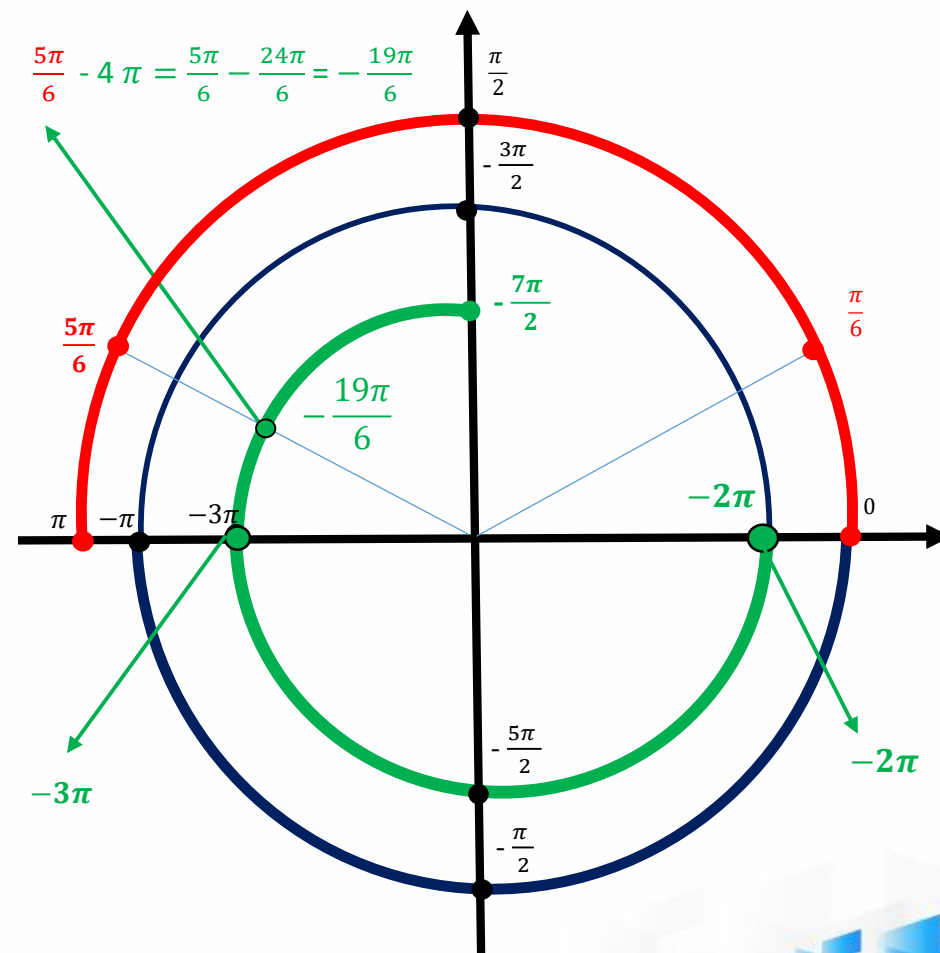
$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: а) $\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi m, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k, m \in \mathbb{Z}$

б) $-2\pi, -3\pi, -\frac{19\pi}{6}$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.





Задание 14.

а) Решите уравнение $\log_2(4x^4 + 28) = 2 + \log_{\sqrt{2}}\sqrt{5x^2 + 1}$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9}{5}; \frac{7}{5}\right]$

Решение

I.

УСЛОВИЕ:

$$4x^4 + 28 > 0$$

$$5x^2 + 1 > 0$$

x - любое

$$II. \log_2(4x^4 + 28) = 2 + \log_{\sqrt{2}}\sqrt{5x^2 + 1}$$

$$\log_2(4x^4 + 28) = 2 + \log_2(5x^2 + 1)$$

$$\log_2(4x^4 + 28) = \log_2 2^2 + \log_2(5x^2 + 1)$$

$$\log_2(4x^4 + 28) = \log_2 4 + \log_2(5x^2 + 1)$$

$$\log_2(4x^4 + 28) = \log_2(4 \cdot (5x^2 + 1))$$

$$4x^4 + 28 = 20x^2 + 4$$

$$4x^4 - 20x^2 + 28 - 4 = 0$$

$$\log_{\sqrt{2}}\sqrt{5x^2 + 1} = \log_2(5x^2 + 1)$$

$$2 = \log_2 2^2$$

$$2 = \log_2 4$$

$$\log_2 4 + \log_2(5x^2 + 1) = \log_2(4 \cdot (5x^2 + 1))$$

$$4x^4 - 20x^2 + 24 = 0$$

$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$$

Пусть $t = x^2, t \geq 0$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$





$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$t_1 = 2$$

$$t_2 = 3$$

Обратная замена

$$x^2 = 2$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9}{5}; \frac{7}{5}\right]$

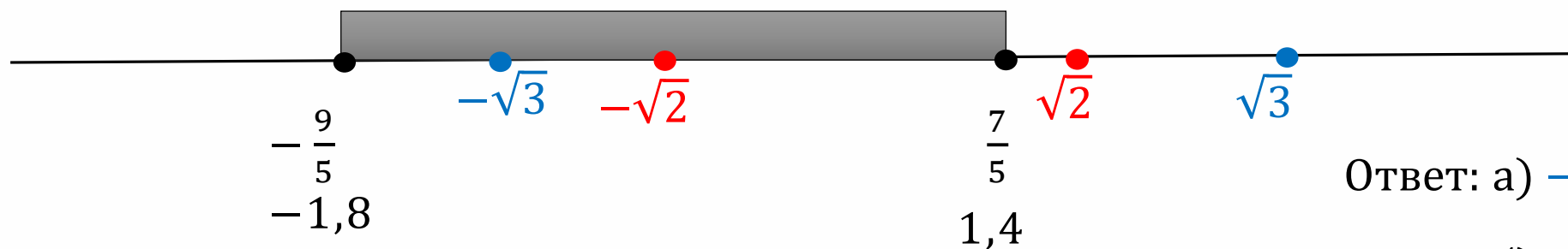
$$-\frac{9}{5} = -1,8$$

$$x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1,4$$

$$[-1,4 ; 1,8]$$

$$\frac{7}{5} = 1,4$$

$$x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1,7$$



Ответ: а) $-\sqrt{3}; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{3}$

б) $-\sqrt{3}; -\sqrt{2}$





Задание 15.

а) Решите уравнение

$$8^x - 3 \cdot 4^x - 2^x + 3 = 0;$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[1,5; 3]$.

Решение

$$\text{а) } 8^x - 3 \cdot 4^x - 2^x + 3 = 0$$

$$(2 \cdot 4)^x - 3 \cdot 4^x - 2^x + 3 = 0$$

$$2^x \cdot 4^x - 3 \cdot 4^x - 2^x + 3 = 0$$

$$2^x \cdot 4^x - 3 \cdot 4^x - 2^x + 3 = 0$$

$$4^x \cdot (2^x - 3) - 1 \cdot (2^x - 3) = 0$$

$$(2^x - 3) \cdot (4^x - 1) = 0$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(2 \cdot 4)^x = 2^x \cdot 4^x$$

$$2^x - 3 = 0$$

$$2^x = 3$$

$$2^x = 2^{\log_2 3}$$

$$x = \log_2 3$$

$$4^x - 1 = 0$$

$$4^x = 1$$

$$4^x = 4^0$$

$$x = 0$$





$$x = \log_2 3$$

$$x = 0$$

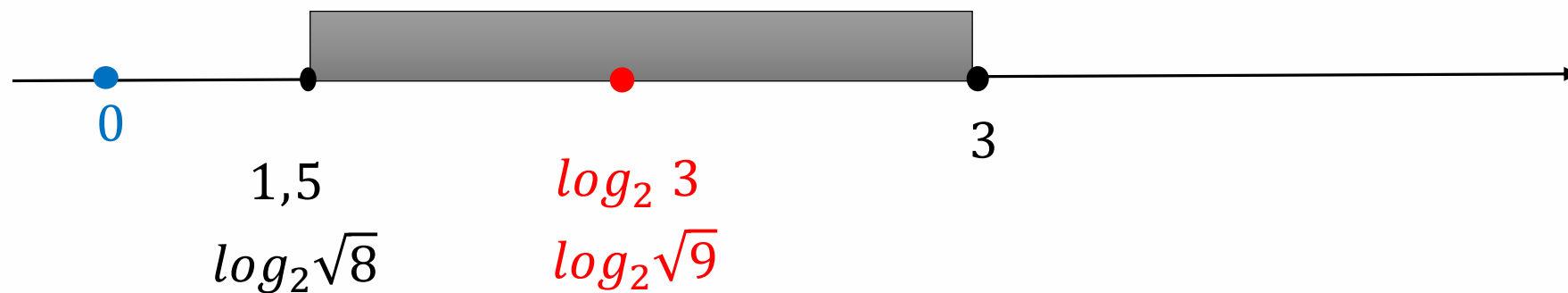
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[1,5; 3]$.

$$\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4$$

$$1 < \log_2 3 < 2$$

$$1,5 = \log_2 2^{1,5} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \log_2 \sqrt{8}$$

$$\log_2 3 = \log_2 \sqrt{9}$$



Ответ: а) 0; $\log_2 3$

б) $\log_2 3$





Задание 16.

а) Решите уравнение $9^{x+1} - 2 \cdot 3^{x+2} + 5 = 0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(\log_3 \frac{3}{2}; \sqrt{5})$.

Решение

$$9^{x+1} - 2 \cdot 3^{x+2} + 5 = 0$$

$$9 \cdot 9^x - 2 \cdot 9 \cdot 3^x + 5 = 0$$

$$9 \cdot 3^{2x} - 18 \cdot 3^x + 5 = 0$$

Пусть

$$t = 3^x, t \geq 0$$

$$9 \cdot t^2 - 18 \cdot t + 5 = 0$$

$$t_1 = \frac{5}{3}$$

$$t_2 = \frac{1}{3}$$

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$9^{x+1} = 9^x \cdot 9^1$$

$$3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2$$

Обратная замена

$$3^x = \frac{5}{3}$$

$$3^x = \frac{1}{3}$$

$$3^x = 3^{\log_2 \frac{5}{3}}$$

$$3^x = 3^{-1}$$

$$x = \log_2 \frac{5}{3}$$

$$x = -1$$





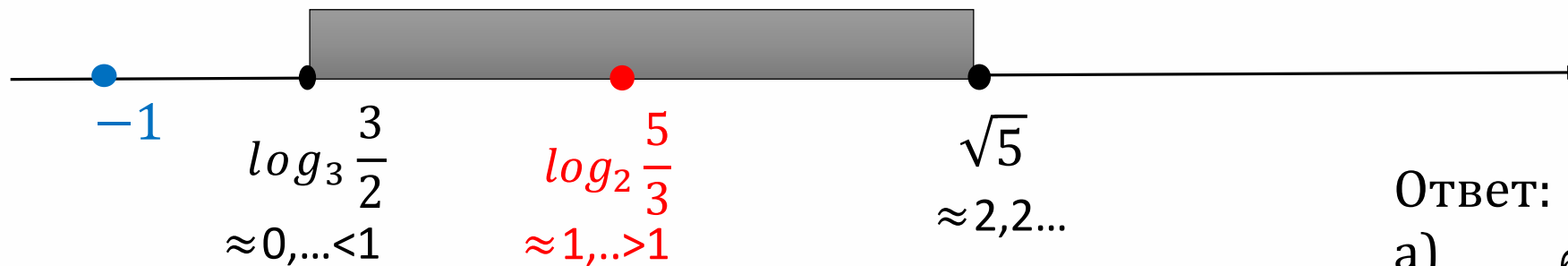
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(\log_3 \frac{3}{2}; \sqrt{5})$.

$$\log_3 \frac{3}{2} = \log_3 3 - \log_3 2 = 1 - \log_3 2 \approx 0, \dots < 1$$

$$\log_2 \frac{5}{3} = \log_2 5 - \log_2 2 = \log_2 5 - 1 \approx 1, \dots > 1$$

$$\sqrt{5} \approx 2,2 \dots$$

$$\log_3 \frac{3}{2} < \log_2 \frac{5}{3} < 2,2$$



Ответ: $-1; \log_2 \frac{5}{3};$
а) б) $\log_2 \frac{5}{3};$



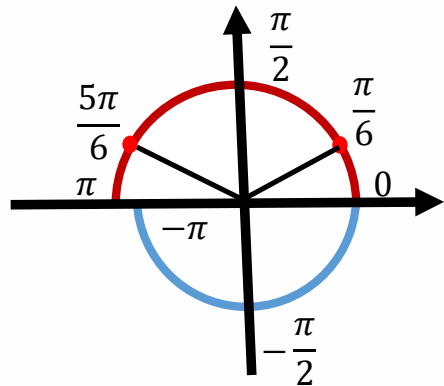


Выбор корней на промежутке

Первые корни обязательно отмечаем на промежутках:

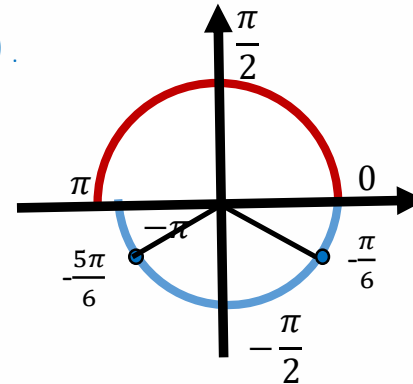
1. Положительные от 0 до π ;

2. Отрицательные от $-\pi$ до 0.



$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

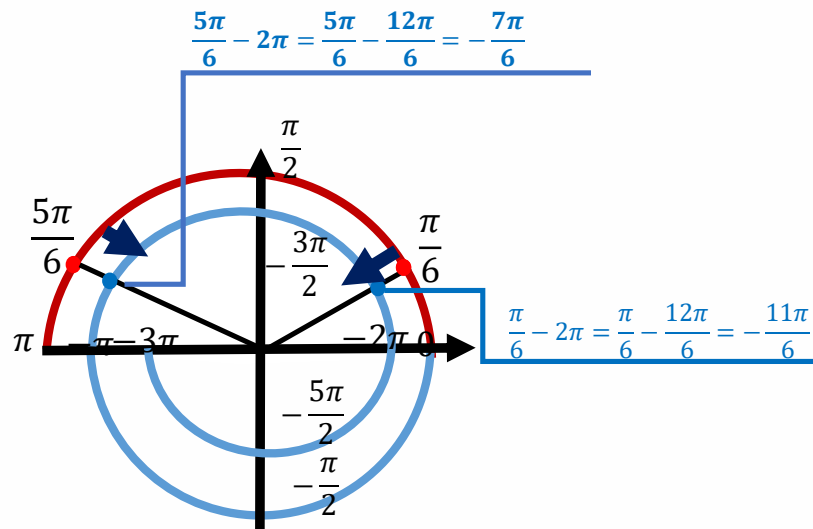
Если спираль заворачивается вовнутрь, то от угла первого уровня вычитаем 2π ; 4π ; 6π . В зависимости от того на сколько уровней уйдем вниз.



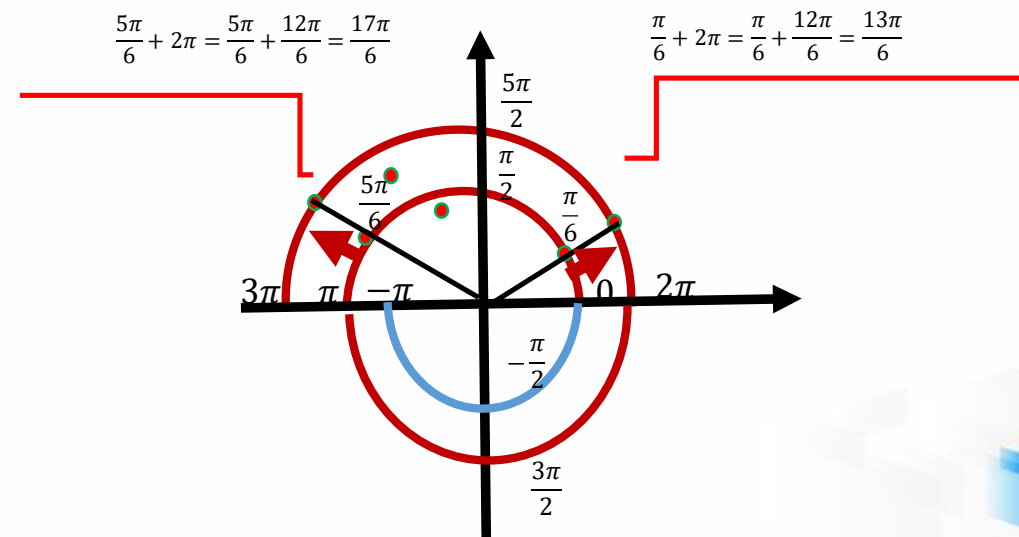
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Если спираль заворачивается наружу, то к углу первого уровня прибавляем 2π ; 4π ; 6π . В зависимости от того на сколько уровней поднимемся вверх.

Выбор корней на промежутке $[-3\pi; 0]$

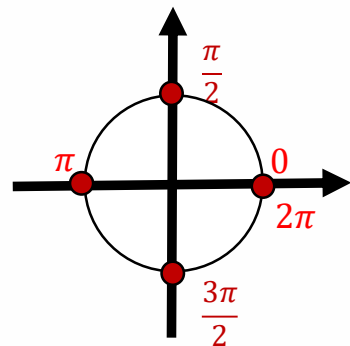
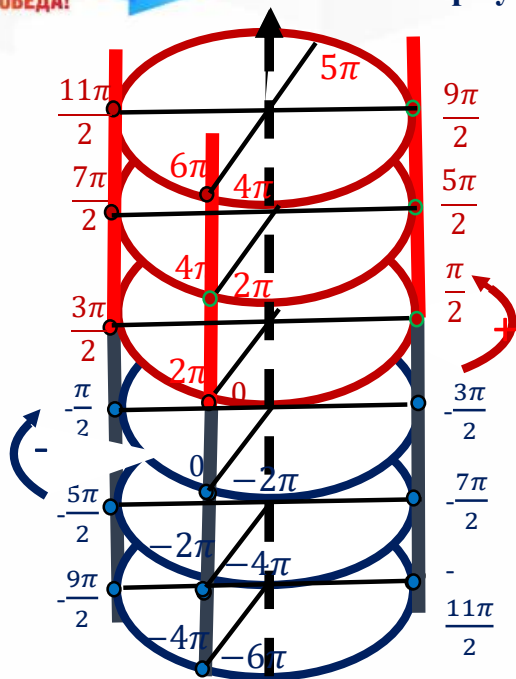


Выбор корней на промежутке $[\pi; 3\pi]$





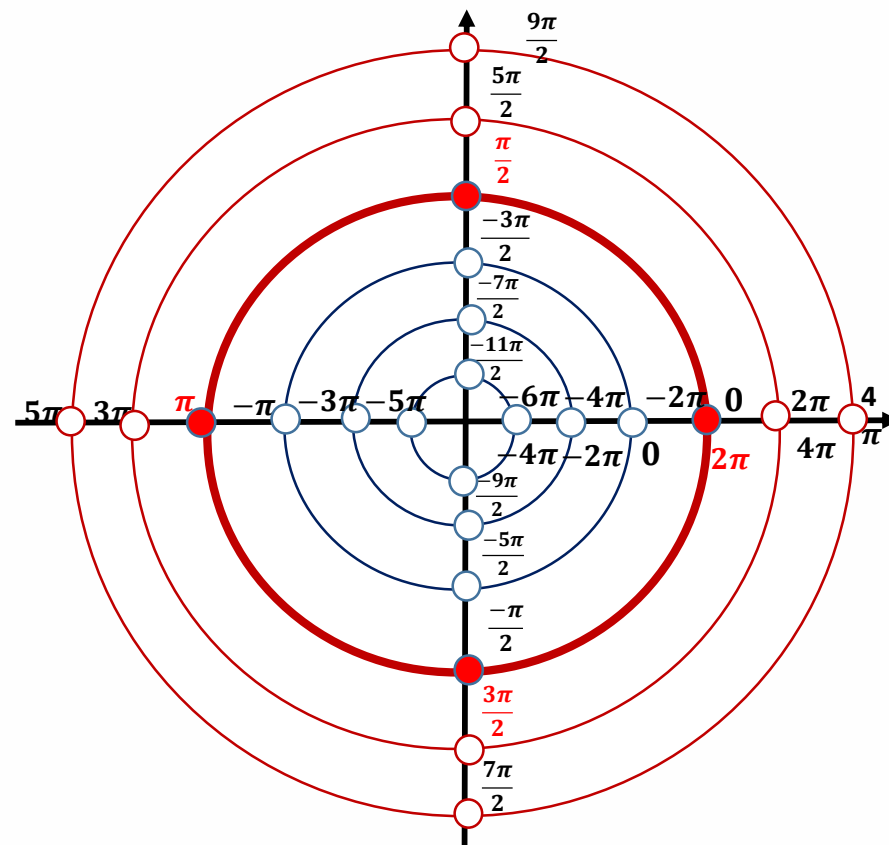
Формулы приведения



$$\sin(5\pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos\left(x - \frac{11\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{ctg} x$$



При выполнении преобразований
тригонометрических выражений удобно заменять углы

1. ...; -5π ; -4π ; -3π ; $-\pi$ на π ;
2. 4π ; 6π ; 8π ; ... на 2π ;
3. $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}$; $\frac{13\pi}{2}$; $\frac{17\pi}{2}$; ... на $\frac{\pi}{2}$;
4. $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{11\pi}{2}$; ... на $\frac{\pi}{2}$;
5. $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{2}$; $\frac{15\pi}{2}$; $\frac{19\pi}{2}$; ... на $\frac{3\pi}{2}$;
6. $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}$; $\frac{13\pi}{2}$; ... на $\frac{3\pi}{2}$;

