Логарифмические неравенства. Задание № 15 ЕГЭ по математике профильного уровня

Ковтун О.Г.

учитель математики МАОУ СОШ № 3 им. Пушкина Брюховецкого района

План занятия

1 Обзор задания № 15 за последние пять лет

2 Решение логарифмических неравенств, используя свойства логарифмов

3 Решение логарифмических неравенств методом замены переменной

4 Решение логарифмических неравенств методом рационализации

Содержание критерия	**Балл**
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением/включением граничных точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «$<$» вместо «$\leqslant$» или наоборот. **Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то выставляется оценка «0 баллов».**

2019-2020 год

15 Решите неравенство $\log_5\left((3-x)\left(x^2+2\right)\right) \geq \log_5\left(x^2-7x+12\right)+\log_5(5-x)$.

15 Решите неравенство $x^2\log_{25}(x-3) \geq \log_5\left(x^2-6x+9\right)$

2020-2021 год

15 Решите неравенство $\log_4^2\left(16+14x-x^2\right)+5\cdot\log_{0,25}\left(16+14x-x^2\right)+6>0$.

15 Решите неравенство $\dfrac{1}{\log_3 x+4}+\dfrac{2}{\log_3(3x)}\cdot\left(\dfrac{2}{\log_3 x+4}-1\right) \leq 0$.

2021-2022 год

14 Решите неравенство $\dfrac{\log_4(64x)-2}{\log_4^2 x-\log_4 x^3}\ge -1.$

2022-2023 год

14 Решите неравенство $\dfrac{\log_2 x^2-\log_3 x^2}{\log_6^2\left(2x^2-10x+12{,}5\right)+1}\ge 0.$

14 Решите неравенство $\log_3^2(x-4)-\log_3^2(x-6)\le 0.$

$$\left(\log^2_{0,25}(x+3)-\log_4\left(x^2+6x+9\right)+1\right)\cdot\log_4(x+2)\leqslant 0.$$

$$\log_8\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\geqslant\log_2\left(x^2-1\right)-5$$

2023-2024 год

$$\frac{\log_5(5x-27)}{\log_5(x-5)} \geqslant 1$$

$$2\log_{(x^2-6x+10)^2}(5x^2+3) \leqslant \log_{x^2-6x+10}(4x^2+7x+3)$$

$$\log_3\left(\frac{1}{x}-1\right)+\log_3\left(\frac{1}{x}+1\right) \geqslant \log_3(8x-1)$$

$$\frac{\log_2\left(2x^2-17x+35\right)-1}{\log_2(x+6)} \leqslant 0.$$

$$\frac{\log_2\left(2x^2-13x+20\right)-1}{\log_7(x+7)} \leqslant 0.$$

Решение логарифмических неравенств, используя свойства логарифмов

Решите неравенство

$$\log_5\left((3-x)\left(x^2+2\right)\right) \geqslant \log_5\left(x^2-7x+12\right)+\log_5(5-x)$$

Условия:

$$\begin{cases}(3-x)\left(x^2+2\right)>0\\ x^2-7x+12>0\\ 5-x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3-x>0\\ (x-4)(x-3)>0\\ 5-x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-3<0\\ (x-4)(x-3)>0\\ x-5<0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x-3<0\\ x-4<0\\ x-5<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<3\\ x<4\\ x<5\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;3)$$

Основные свойства логарифмов:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^p = p\log_a x$$

$$\log_{a^p} x = \frac{1}{p}\log_a x$$

Теперь вернемся к исходному неравенству:

$$\log_5\left((3-x)\left(x^2+2\right)\right) \geqslant \log_5\left(x^2-7x+12\right)+\log_5(5-x)$$

$$\log_5\left((3-x)\left(x^2+2\right)\right) \geqslant \log_5\left(\left(x^2-7x+12\right)(5-x)\right)$$

$$(3-x)\left(x^2+2\right) \geqslant \left(x^2-7x+12\right)(5-x)$$

$$(3-x)\left(x^2+2\right) \geqslant (x-4)(x-3)(5-x)$$

$$(3-x)\left(x^2+2\right)+(3-x)(x-4)(5-x) \geqslant 0$$

$$(3-x)\left(x^2+2+(x-4)(5-x)\right) \geqslant 0$$

$$(3-x)\left(x^2+2+5x-20-x^2+4x\right) \geqslant 0$$

$$(3-x)(9x-18) \geqslant 0$$

$$(3-x)(x-2) \geqslant 0$$

учитывая условие $x-3<0$

можем поделить обе части неравенства на $3-x>0$

После деления знак неравенства сохранится и получим:

$$x-2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [2;+\infty)$$

Учтем условия:

$$\begin{cases} x \in [2;+\infty) \\ x \in (-\infty;3) \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in [2;3)$$

Ответ: $[2;3)$

Метод введения новой переменной

Решить неравенство $$\frac{\log_3 x}{\log_3\left(\frac{x}{27}\right)} \geqslant \frac{4}{\log_3 x} + \frac{8}{\log_3^2 x - \log_3 x^3}.$$

Ограничения: $x > 0.$

Сделаем замену $y = \log_3 x.$

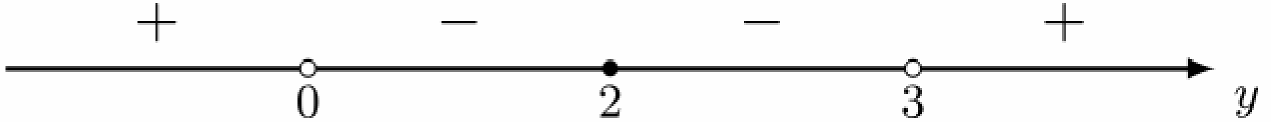
Тогда неравенство равносильно

$$\frac{y}{y-3} \geqslant \frac{4}{y} + \frac{8}{y^2 - 3y}$$

$$\frac{y^2 - 4(y-3) - 8}{y(y-3)} \geqslant 0$$

$$\frac{(y-2)^2}{y(y-3)} \geqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



$$\left[\begin{array}{l} y < 0 \\ y = 2 \\ y > 3 \end{array}\right.$$

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l}\log_3 x < 0\\ \log_3 x = 2\\ \log_3 x > 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0 < x < 1\\ x = 9\\ x > 27\end{array}\right.$$

Окончательно получим $x \in (0; 1) \cup \{9\} \cup (27; +\infty)$

Ответ: $(0; 1) \cup \{9\} \cup (27; +\infty)$

Метод рационализации

Метод позволяет в ряде случаев упростить неравенство, содержащее сложное выражение, сведя его к рациональному неравенству и решить его методом интервалов.

Решить неравенство $\dfrac{\log_2\left(2x^2-13x+20\right)-1}{\log_3(x+7)} \leqslant 0.$

Найдем условия :

$$\begin{cases} 2x^2-13x+20>0, \\ x+7>0, \\ \log_3(x+7)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(2x-5)>0, \\ x>-7, \\ x+7\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<2{,}5 \end{array}\right. \\ x>-7 \\ x\neq -6 \end{cases}$$

$$x\in(-7;-6)\cup(-6;2{,}5)\cup(4;+\infty)$$

Переходим к решению неравенства. Перенесем единицу в левую часть неравенства и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{\log_2\left(2x^2-13x+20\right)-1}{\log_3(x+7)} \leqslant 0$$

$$\frac{\log_2\left(2x^2-13x+20\right)-\log_2 2}{\log_3(x+7)} \leqslant 0$$

Воспользуемся методом рационализации для логарифмической функции:

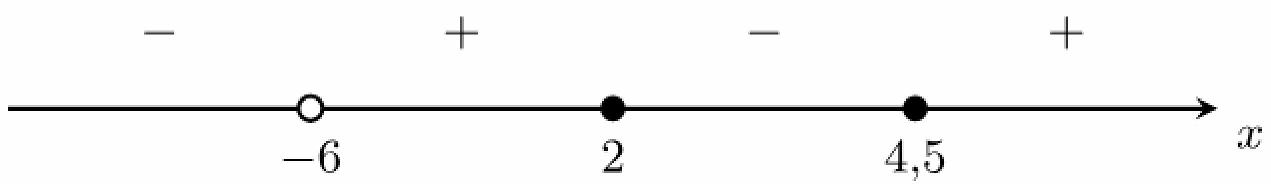
$$\frac{(2-1)\left(\left(2x^2-13x+20\right)-2\right)}{(3-1)(x+7-1)} \leqslant 0$$

$$\log_{p(x)} f(x) - \log_{p(x)} g(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (p(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ p(x) > 0, \\ p(x) \neq 1. \end{cases}$$

$$\frac{2x^2-13x+18}{2(x+6)} \leqslant 0$$

$$\frac{(2x-9)(x-2)}{x+6} \leqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



С учетом условий $x \in (-7; -6) \cup (-6; 2{,}5) \cup (4; +\infty)$

получаем $x \in (-7; -6) \cup [2; 2{,}5) \cup (4; 4{,}5]$.

Спасибо за внимание!