



Подготовка к ОГЭ по математике



Линии, углы в произвольном треугольнике . Задания № 15, № 19 ОГЭ по математике

Кармазина М.В.
учитель математики МБОУ СОШ № 1 ,
Красноармейский район

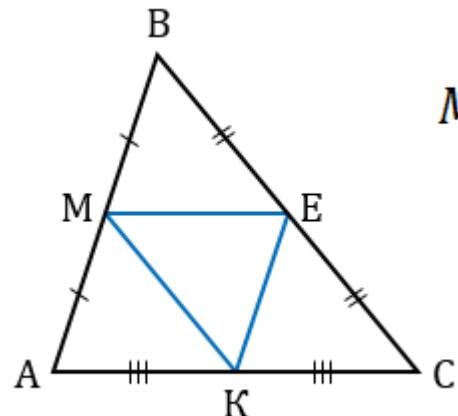




Некоторые свойства линий в треугольнике

➤ Средняя линия треугольника - отрезок, который соединяет середины двух его сторон.

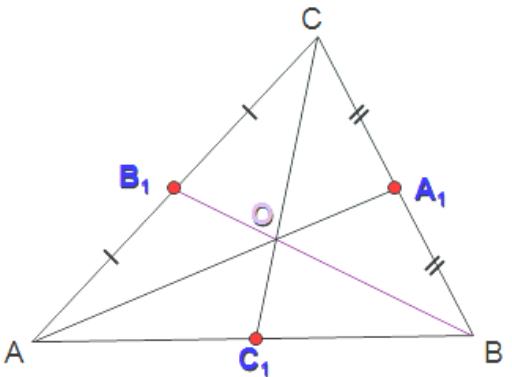
Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.



$$ME = \frac{1}{2} AC$$

➤ Свойство медиан треугольника.
Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{CO}{OC_1} = \frac{BO}{OB_1} = \frac{2}{1}$$



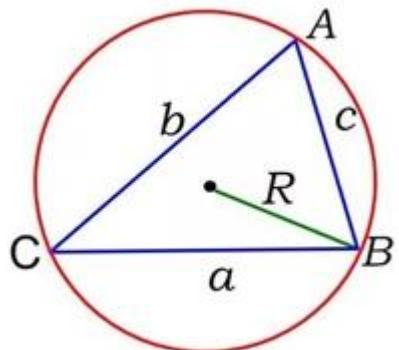


Некоторые свойства линий в треугольнике

ТЕОРЕМА СИНУСОВ:

- Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов.

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = 2R$$



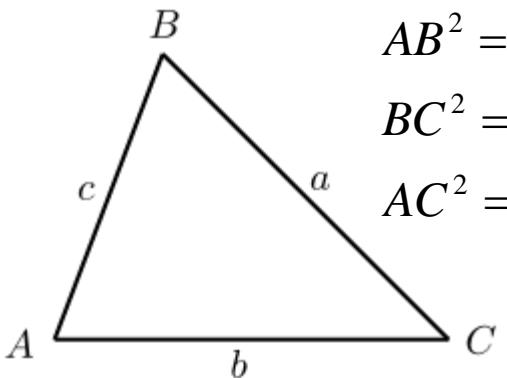
ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ:

- Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos C$$

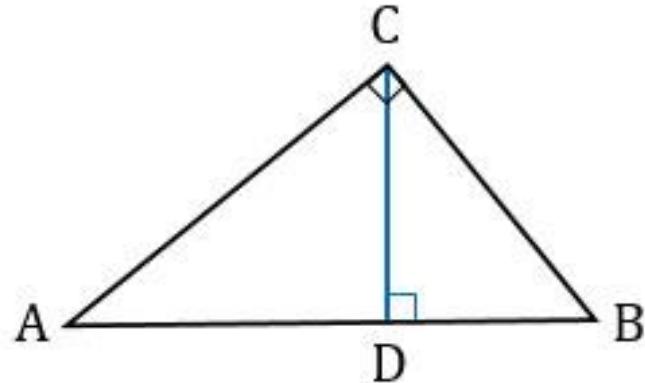
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$$





Некоторые свойства линий в треугольнике



1. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой.

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB}$$

2. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключенного между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла. $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$ $CB = \sqrt{AB \cdot DB}$

3. Высота, проведенная к гипотенузе, равна произведению катетов, деленному на гипотенузу.

$$CD = \frac{AC \cdot BC}{AB}$$

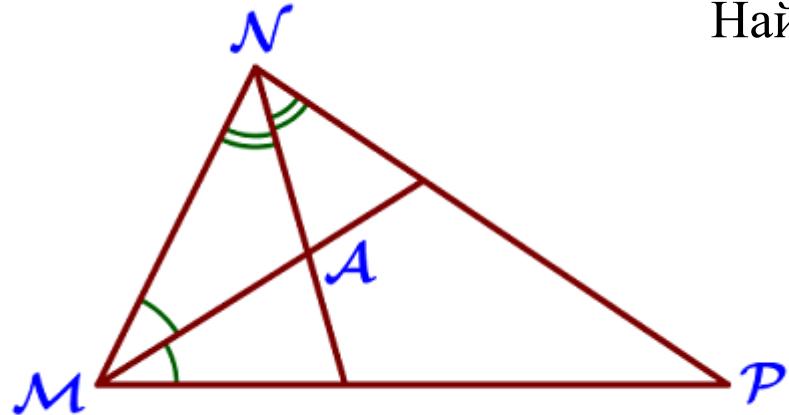


Сумма углов треугольника равна 180°



Задача № 1.

Биссектрисы углов N и M треугольника MNP пересекаются в точке A . Найдите $\angle NAM$, если $\angle N = 84^\circ$, а $\angle M = 42^\circ$



Решение. По определению биссектрисы

$$\angle MNA = \frac{84}{2} = 42^\circ \quad \angle NMA = \frac{42}{2} = 21^\circ.$$

В треугольнике NAM :

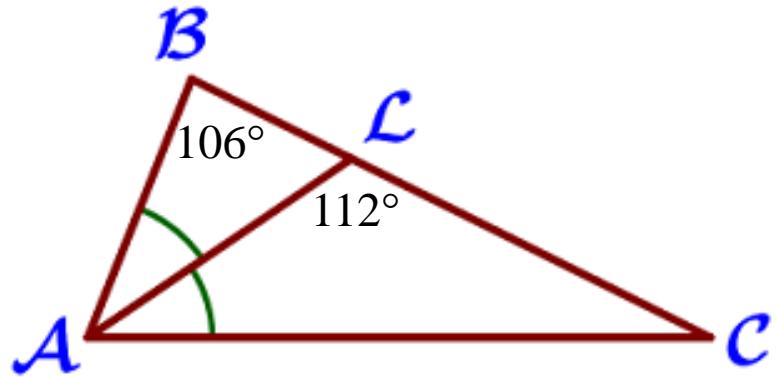
$$\angle NAM = 180^\circ - 42^\circ - 21^\circ = 117^\circ.$$

Ответ: 117°



Задача № 2.

В треугольнике ABC проведена биссектриса AL , угол ALC равен 112° , угол ABC равен 106° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах.



Решение: Угол ALC является внешним углом треугольника ABL . Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним. Следовательно , $\angle ALC = \angle ABC + \angle BAL$,

откуда $\angle BAL = \angle ALC - \angle ABC = 112^\circ - 106^\circ = 6^\circ$,
Тогда $\angle BAC = 2\angle BAL = 2 \cdot 6^\circ = 12^\circ$.

Сумма углов в треугольнике ABC равна 180° , откуда

$$\begin{aligned}\angle ACB &= 180^\circ - (\angle BAC + \angle ABC) = \\ &= 180^\circ - (12^\circ + 106^\circ) = 62^\circ.\end{aligned}$$

Ответ: 62°

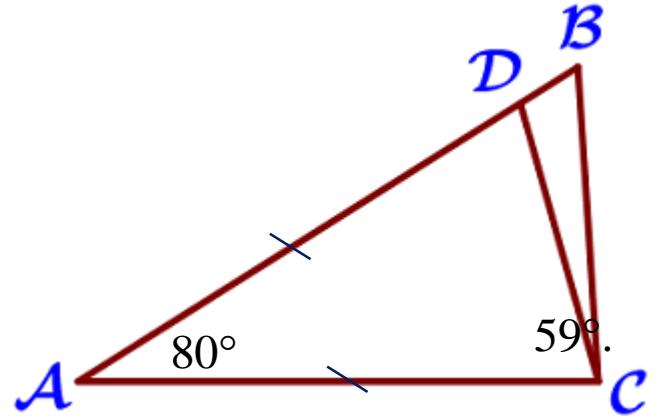


Задача № 3.

Точка D на стороне AB треугольника ABC выбрана так, что $AD = AC$.

Известно, что $\angle CAB = 80^\circ$ и $\angle ACB = 59^\circ$. Найдите угол DCB .

Ответ дайте в градусах.



Решение: Треугольник ACD — равнобедренный, поэтому

$$\angle ADC = \angle ACD = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ.$$

Найдем угол DCB :

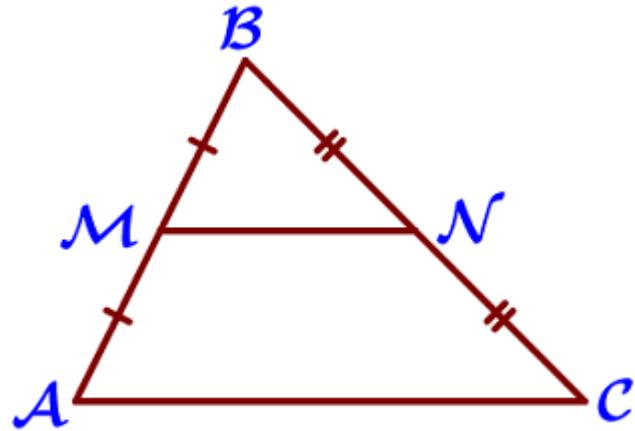
$$\angle DCB = \angle ACB - \angle ACD = 59^\circ - 50^\circ = 9^\circ.$$

Ответ: 9.



Задача № 4.

Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC , сторона AB равна 66, сторона BC равна 37, сторона AC равна 74. Найдите MN .



Решение. Поскольку MN соединяет середины двух сторон треугольника ABC , MN является средней линией, она параллельна AC и равна ее половине:

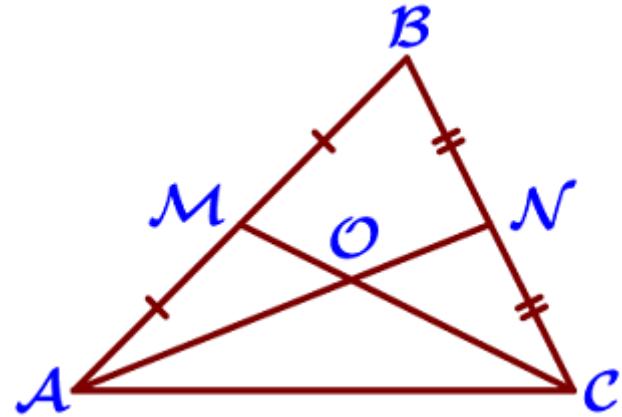
$$MN = AC : 2 = 74 : 2 = 37$$

Ответ: 37.



Задача № 5.

Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O , $AN = 12$, $CM = 18$. Найдите AO .



Решение. Отрезки AN и CM — медианы.
Медианы в треугольнике при пересечении
делятся в отношении 2:1, считая от вершины:

$$\frac{AO}{ON} = \frac{2}{1}, \quad \frac{AO}{AN} = \frac{2}{3},$$

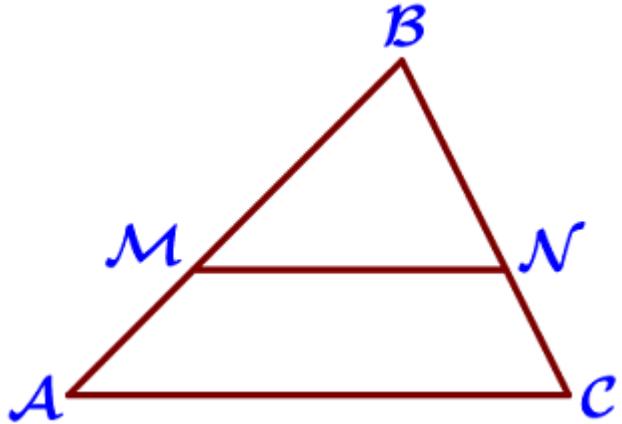
следовательно, поэтому $AO = \frac{2}{3} \cdot AN = 8$.

Ответ: 8.



Задача № 6.

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, $AB = 9$, $AC = 18$, $MN = 8$. Найдите AM .



Решение. Треугольники ABC и MBN подобны по двум углам: $\angle B$ — общий, $\angle BMN = \angle BAC$ — соответственные при секущей AB , MN и AC параллельны. Из подобия треугольников следует:

$$\frac{BM}{AB} = \frac{MN}{AC},$$

Поэтому

$$BM = \frac{MN}{AC} \cdot AB = \frac{8}{18} \cdot 9 = 4,$$

тогда $AM = AB - BM = 9 - 4 = 5$.

Ответ: 5.

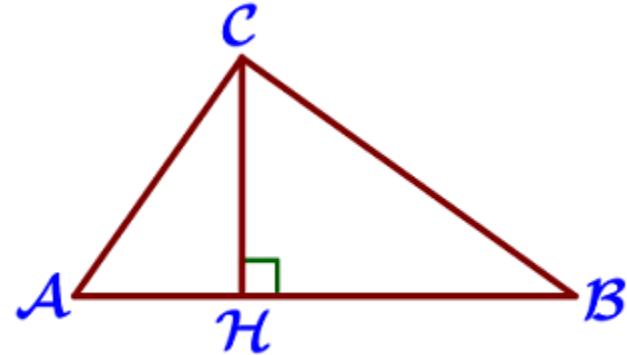


$$h = \frac{a \cdot b}{c}$$



Задача № 7.

Катеты прямоугольного треугольника равны 35 и 120.
Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.



Решение: 1) Найдем гипотенузу АВ по теореме Пифагора:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{35^2 + 120^2} = 125$$

2) Треугольник АВС подобен треугольнику АCH
по острому углу ($\angle A$ - общий).

Из подобия следует пропорциональность соответствующих сторон:

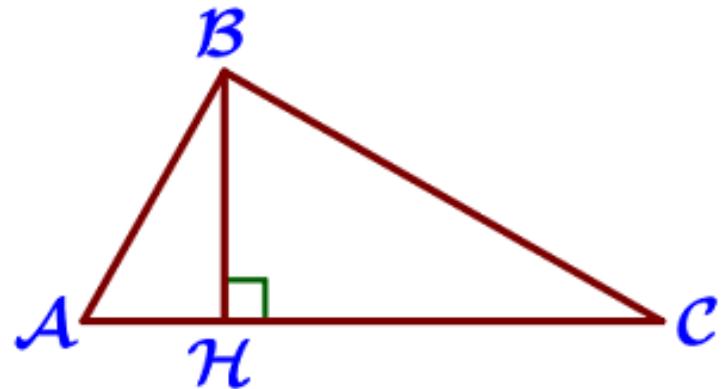
$$\frac{BC}{CH} = \frac{AB}{AC} \quad , \text{ значит} \quad CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{35 \cdot 120}{125} = 33,6$$

Ответ: 33,6.



Задача № 8.

Точка H является основанием высоты, проведенной из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC . Найдите AB , если $AH = 6$, $AC = 24$.



Решение: Треугольник ABC подобен треугольнику ABH по острому углу ($\angle A$ - общий). Из подобия следует пропорциональность соответствующих сторон:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB} \quad AB^2 = AH * AC$$

$$AB = \sqrt{AH * AC}$$

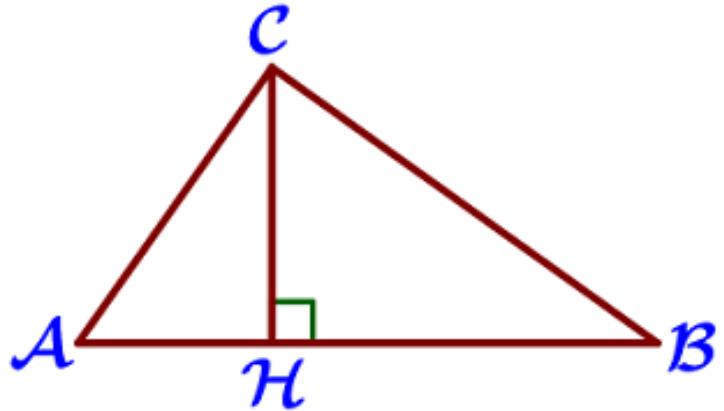
$$AB = \sqrt{24 * 6} = 12$$

Ответ: 12



Задача № 9.

На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опущена высота CH , $AH = 2$, $BH = 18$. Найдите CH .



Решение: треугольники AHC и CHB — подобные по острому углу.
Из подобия следует пропорциональность соответствующих сторон:

$$\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH}$$

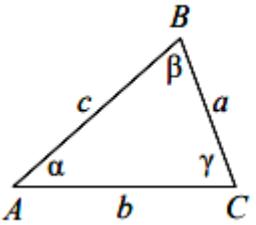
Из соотношения найдем CH :

$$CH = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{2 \cdot 18} = 6.$$

Ответ: 6.



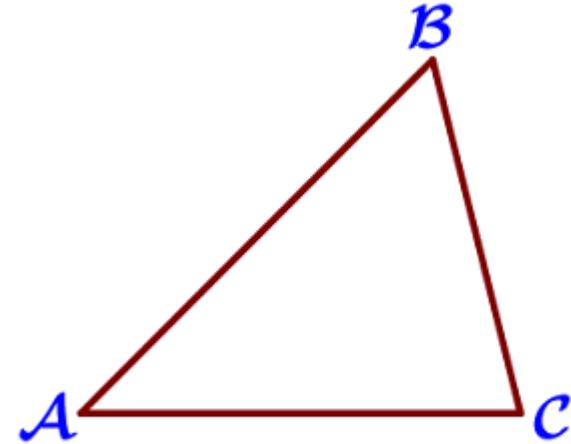
Теорема синусов



Для треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности.



Задача № 10.

В треугольнике ABC угол A равен 45° , угол B равен 30° , $BC = 6\sqrt{2}$. Найдите AC .

Решение: По теореме синусов: $2R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$.
поэтому $\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$,

$$AC = \frac{BC}{\sin A} \sin B = \frac{6\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 6.$$

Ответ: 6.



Задача № 11. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 65° и 85° . Найдите BC , если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 14.

Для треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности.

Решение. Сумма углов треугольника равна 180° , поэтому

$$\angle A = 180^\circ - 65^\circ - 85^\circ = 30^\circ.$$

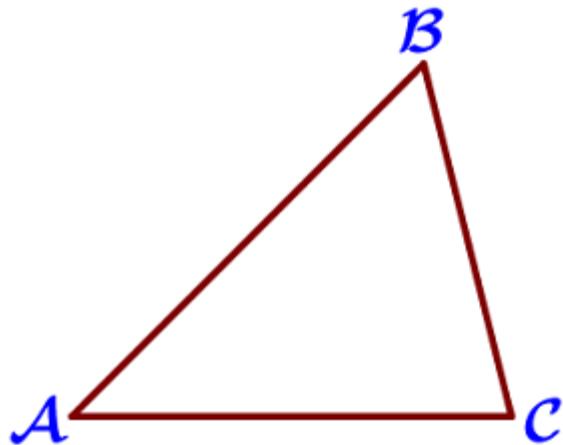
По теореме синусов:

$$2R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}.$$

Откуда получаем, что

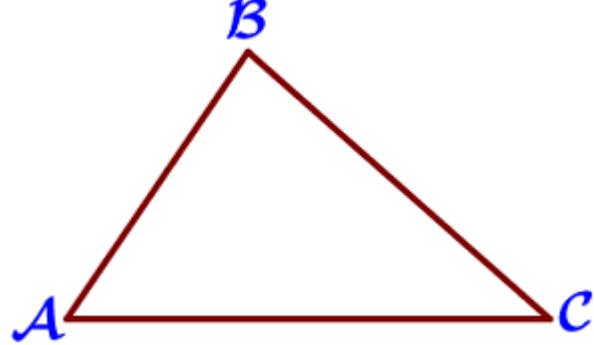
$$BC = 2R \cdot \sin A = 2 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2} = 14.$$

Ответ: 14





Теорема косинусов



Задача № 12.

В треугольнике ABC известно, что $AB = 8$, $BC = 10$, $AC = 12$.
Найдите $\cos \angle ABC$.

Решение: Выразим

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC,$$

из теоремы косинусов: получим

$$\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{8^2 + 10^2 - 12^2}{2 \cdot 8 \cdot 10} = 0,125.$$

Ответ: 0,125.



Задание № 19



Укажите номера верных утверждений.

- 1) Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
- 2) Вертикальные углы равны.
- 3) Любая биссектриса равнобедренного треугольника является его медианой.

Если утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания.



Задание № 19



Укажите номера верных утверждений.

- 1) Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
- 2) Вертикальные углы равны.
- 3) Любая биссектриса равнобедренного треугольника является его медианой.

Если утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания.

Ответ: 12



Задание № 19



Укажите номера верных утверждений.

- 1) Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то треугольники подобны.
- 2) Сумма смежных углов равна 180° .
- 3) Любая высота равнобедренного треугольника является его биссектрисой.

Если утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания.



Задание № 19



Укажите номера верных утверждений.

- 1) Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то треугольники подобны.
- 2) Сумма смежных углов равна 180° .
- 3) Любая высота равнобедренного треугольника является его биссектрисой.

Если утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания.

Ответ: 12



Задание № 19

Какие из следующих утверждений верны?

- 1) Любые два прямоугольных треугольника подобны.
- 2) Если катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны соответственно 6 и 10, то второй катет этого треугольника равен 8.
- 3) Стороны треугольника пропорциональны косинусам противолежащих углов.
- 4) Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Если утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания.



Задание № 19

Какие из следующих утверждений верны?

- 1) Любые два прямоугольных треугольника подобны.
- 2) Если катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны соответственно 6 и 10, то второй катет этого треугольника равен 8.
- 3) Стороны треугольника пропорциональны косинусам противолежащих углов.
- 4) Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Если утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания.

Ответ: 24



Спасибо за внимание!
Успехов на экзаменах!