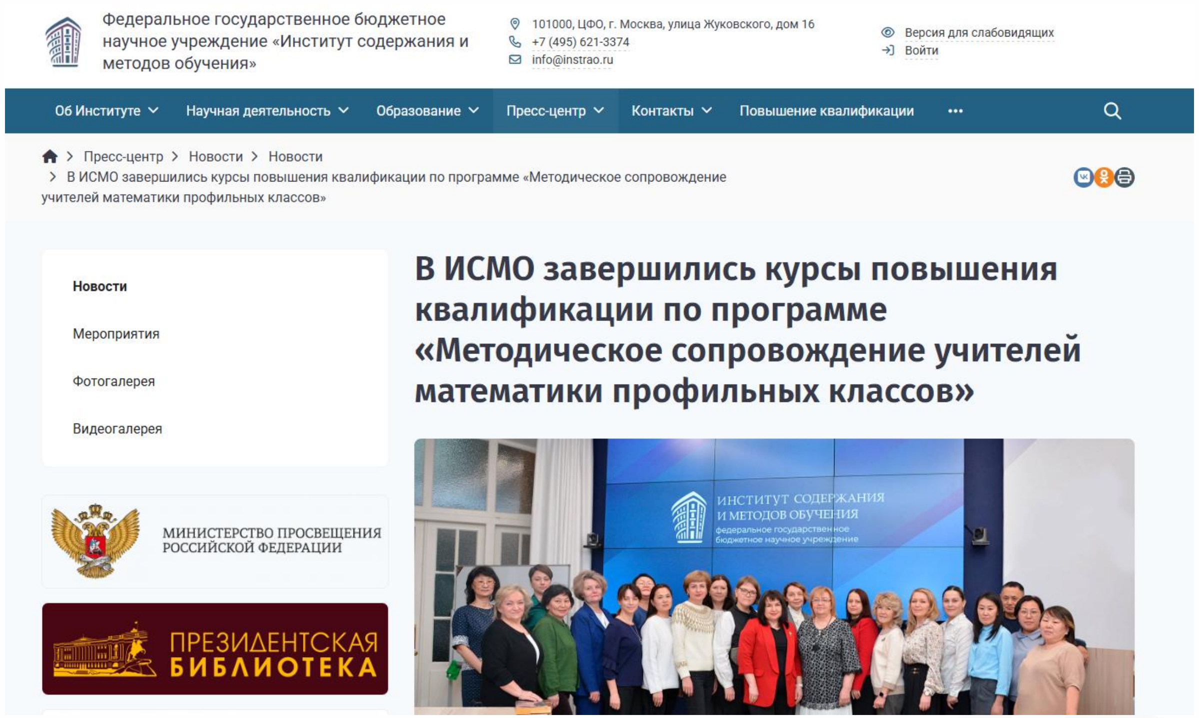
Обучение математике на углубленном уровне. Методы решения заданий № 13, № 15 ЕГЭ по математике профильного уровня

Задорожная Ольга Владимировна
Доцент кафедры математики, информатики и технологического образования
ГБОУ ИРО Краснодарского края

Профильное обучение –

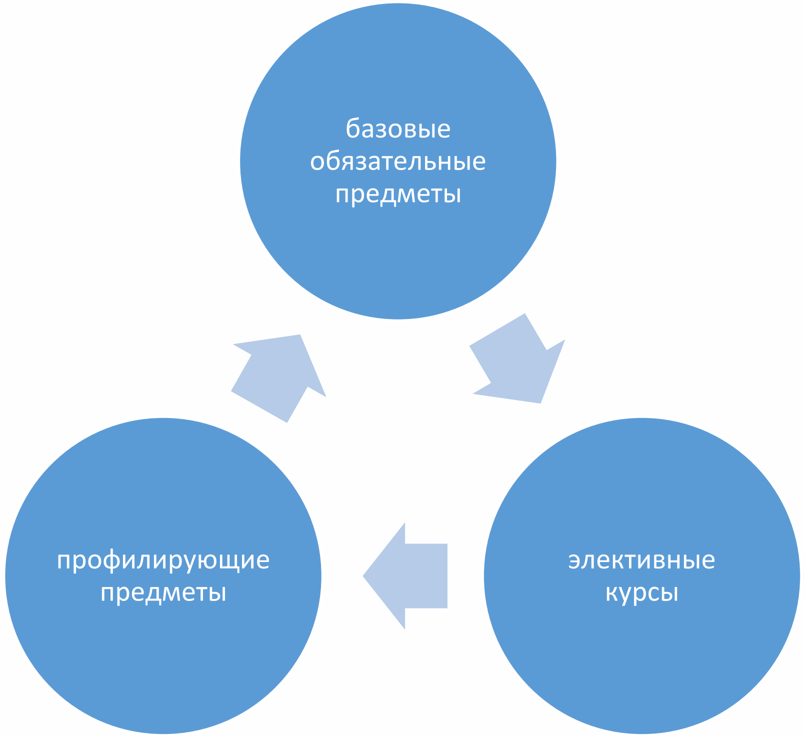
«средство дифференциации и индивидуализации обучения, позволяющее за счет изменений в структуре, содержании и организации образовательного процесса более полно учитывать интересы, склонности и способности учащихся, создавать условия для обучения старшеклассников в соответствии с их профессиональными интересами и намерениями в отношении продолжения образования»



Профильное обучение –

это система организации среднего образования, позволяющая учащимся старших классах выбирать учебные программы (профили) с акцентом на определенные предметы и области знаний. Предполагает углублённое изучение предметов, которые особенно интересуют учеников и соответствуют их будущим учебным или карьерным планам.

- **Индивидуальность**
- **Функциональность**
- **Эффективность**



Профили

Гуманитарный
- иностранные языки, история, литература, обществознание

Естественно-научный
- химия, биология, экология, физика, математика

Технологический
- физика, математика, информатика

Социально-экономический
- обществознание, география, иностранный язык, математика

Универсальный

Специальности

- Педагогика, психология, общественные отношения
- Экология, биология, медицина
- Математика, физика, инженерия, программирование, IT-сфера
- Экономика, юриспруденция, государственное управление, международные отношения

Преимущества профильных классов

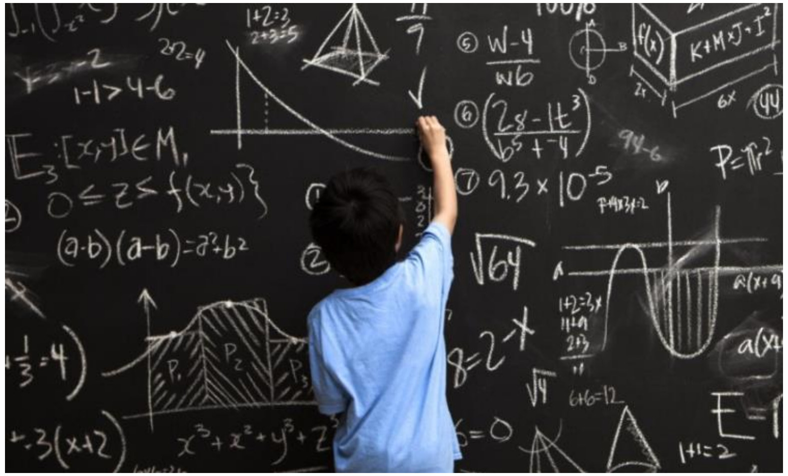
- углубленное изучение предметов;
- качественная подготовка к ЕГЭ;
- подготовка к олимпиадам;
- возможность поступления в вуз;
- знакомство с будущей профессией – профориентация;

Недостатки профильных классов

- большая учебная нагрузка;
- возможная ошибка с выбором направления;
- возможная смена коллектива или школы.

Выбор профильного класса

1. Интересы ребёнка
2. Результаты ОГЭ
3. Планы на будущее



ЕДИНОЕ СОДЕРЖАНИЕ МАТЕМАТИКИ НА УРОВНЕ СРЕДНЕГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
федеральное государственное бюджетное научное учреждение

ФЕДЕРАЛЬНАЯ РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
СРЕДНЕГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МАТЕМАТИКА

(углублённый уровень)

(для 10–11 классов образовательных организаций)

544 ч
2 года обучения

Москва – 2023

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

272 ч (4ч. в нед.)
2 года обучения

«Числа и вычисления»
«Алгебра» («Алгебраические выражения», «Уравнения и неравенства»)
«Начала математического анализа»

ГЕОМЕТРИЯ

204 ч (3ч. в нед.)
2 года обучения

«Прямые и плоскости в пространстве», «Многогранники», «Тела вращения», «Векторы и координаты в пространстве», «Движения в пространстве»

ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА

68 ч (1ч. в нед.)
2 года обучения

«Случайные события и вероятности», «Случайные величины и закон больших чисел»

ПРОБЛЕМЫ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

- СТАНДАРТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ;
- ДИФФЕРЕНЦИАЦИЯ СОДЕРЖАНИЯ ОБРАЗОВАНИЯ;
- **МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ** В СВЯЗИ С ПОСТОЯННЫМ ОБНОВЛЕНИЕМ СОДЕРЖАНИЯ ШКОЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ;
- НАРУШЕНИЕ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ;
- НЕСОВЕРШЕННАЯ СИСТЕМА КОНТРОЛЯ И ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ;
- КАДРОВОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА;
- РЕГИОНАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ И ДР.

ЗАДАЧИ ШКОЛЬНОГО ПРОФИЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

- ОБЕСПЕЧИТЬ КАЧЕСТВО ЗНАНИЙ ПО ПРОФИЛЬНЫМ ДИСЦИПЛИНАМ
- РАЗВИТЬ НАВЫКИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ
- РАЗВИТЬ ПОНИМАНИЕ ЗНАЧИМОСТИ ЗНАНИЙ В ДАЛЬНЕЙШЕМ ОБРАЗОВАНИИ И В БУДУЩЕЙ ПРОФЕССИИ
- ОБЕСПЕЧИТЬ КАЧЕСТВО ПОДГОТОВКИ ВЫПУСКНИКОВ К УСПЕШНОЙ СДАЧЕ ЕГЭ ПО ПРОФИЛЬНЫМ ДИСЦИПЛИНАМ

ОРИЕНТАЦИЯ НА БУДУЩУЮ ПРОФЕССИОНАЛЬНУЮ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

УГЛУБЛЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ

ВАРИАТИВНОСТЬ

ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ПРОФИЛЬНЫХ КЛАССАХ

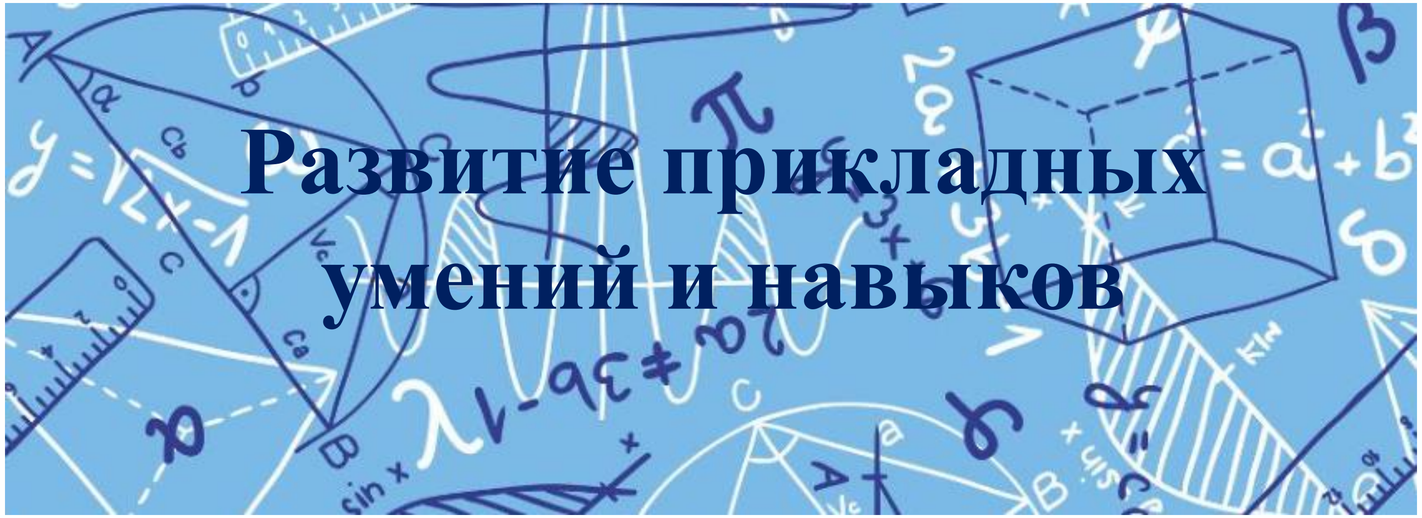
ЗАДАЧИ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ (ЗАЧЕМ? ЧТО? КАК?)

- Определение конкретных целей изучения математики по классам, темам, урокам.
- Отбор содержания учебного предмета в соответствии с целями и познавательными возможностями учащихся.
- Выбор необходимых средств обучения и разработка методики их применения в практике работы учителя математики.
- Разработка наиболее рациональных методов и организационных форм обучения, направленных на достижение поставленных целей.

ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Определение конкретных целей изучения математики по классам, содержательным линиям, темам

- **целенаправленное мотивированное развитие прикладных математических умений и навыков;**
- **овладение навыками решения тригонометрических уравнений повышенного уровня сложности;**
- **уверенное решение тригонометрических уравнений формата ЕГЭ профильного уровня.**



ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2. Отбор содержания учебного предмета в соответствии с целями и познавательными возможностями учащихся

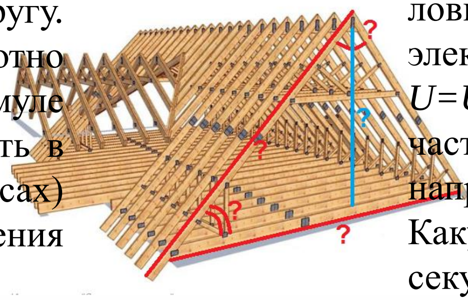
Учебный курс: «алгебра и начала математического анализа», классы: 10-11

- **уравнения. основные методы решения (10 класс)**
- **тригонометрические выражения и уравнения (10 класс)**
- **графики тригонометрических функций (11 класс)**

Прикладные задачи на применение тригонометрических знаний

Тип 9. Два тела массой m=10 кг каждое движутся с одинаковой скоростью v=8 м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q=mv^2\sin^2\alpha$, где m – масса в килограммах, v – скорость в м/с. Найдите, под каким наименьшим 2α углом (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось энергии не менее 480 джоулей.

Источник: Сборник И.В. Ященко 2025 г. Вариант 5



Тип 9. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U=U_0\cos(\omega t+\varphi)$ где t – время в секундах, амплитуда U_0=2В, частота $\omega=120^0/c$ фаза $\varphi=-45^0$. Датчик настроен так, что, если напряжение в нём не ниже чем 1 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

Источник: Сборник И.В. Ященко 2025 г. Вариант 19

ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

3. Выбор необходимых средств обучения и разработка методики их применения в практике работы

Главные элементы усвоения: тригонометрические уравнения

Средства обучения: учебник, сайт ФИПИ

Методические приемы:

- **устный счет на вычисление значений тригонометрических выражений**
- **математические диктанты на знание формул и табличных значений основных тригонометрических функций**
- **чтение графиков тригонометрических функций**
- **решение одного уравнения несколькими способами**
- **упражнения на тригонометрической окружности**
- **оценивание готового решения по критериям оценивания задания №13 ЕГЭ по математике профильного уровня**

Пример.

Решите уравнение: $\sin x = 1$.

Решение/рассуждения ученика:

$$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$$

Аргументы ученика:

$\pi \approx 3,14 \approx 3$, тогда $1 = \frac{\pi}{3}, \Rightarrow$

$\sin\frac{\pi}{3} = 1, \quad x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$

Федеральный институт педагогических измерений
ОТКРЫТЫЙ БАНК ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

Прикладные задачи формата ЕГЭ

Открытый банк заданий ЕГЭ | Математика. Профильный уровень

Два тела, массой $m = 6$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 9$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в Дж), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$, где m — масса (в кг), v — скорость (в м/с). Найдите, под каким углом 2α должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилась энергия, равная 243 Дж. Ответ дайте в градусах.

ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

4. Разработка наиболее рациональных методов и организационных форм обучения, направленных на достижение поставленных целей

- коллективное обсуждение конструкции тригонометрического уравнения и выбор способа его решения
- планирование и озвучивание последовательности действий решения тригонометрического уравнения с прогнозированием результата
- обоснование с помощью теоретических фактов, формул, свойств построенного плана решения тригонометрического уравнения
- коллективная демонстрация решений тригонометрических уравнений
- мини-тестирование с взаимопроверкой и сравнением с эталоном решения тригонометрического уравнения

ПРИМЕР РАЗРАБОТКИ НАИБОЛЕЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ МЕТОДОВ И ОРГАНИЗАЦИОННЫХ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ, НАПРАВЛЕННЫХ НА ДОСТИЖЕНИЕ ПОСТАВЛЕННЫХ ЦЕЛЕЙ

ИЗ ПРЕДЛОЖЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫБЕРИТЕ УРАВНЕНИЕ, СВОДИМОЕ К АЛГЕБРАИЧЕСКОМУ КВАДРАТНОМУ:	А) $6\,sin^2x+5\,sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-2=0;$ Б) $6\cos^2 x+2\sin 2x=3;$ В) $\cos^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x=\sin x.$
ВЫБЕРИТЕ ИЗ ПРЕДЛОЖЕННЫХ УСЛОВИЙ ТО, КОТОРОЕ ЯВЛЯЕТСЯ ОБЯЗАТЕЛЬНЫМ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ К АЛГЕБРАИЧЕСКОМУ КВАДРАТНОМУ ПО ПРЕДЛОЖЕННОЙ ЗАМЕНЕ ФУНКЦИИ НА ПЕРЕМЕННУЮ:	А) $cos^2x=t,\quad |t|\le 1;$ Б) $\cos x=t,\quad |t|\le 1;$ В) $cos\,x=t,\quad |t|\ge 1.$

Алгоритмизация решений тригонометрических уравнений

Алгоритм решения неалгебраических уравнений (тригонометрических, показательных, логарифмических, иррациональных

1. Исследование конструкции неалгебраического уравнения

2. Подбор правил, формул, равносильных преобразований, которые необходимо применить, работая с такой конструкцией

3. Отбор свойств функции, учет которых влияет на решение и ответ

4. Определение рационального метода решения уравнения, решение уравнения

5. Проверка найденных корней

Основные методы решения уравнений в учебном курсе «Алгебра и начала математического анализа» 10-11 класс (углубленный)

1. Равносильные преобразования
2. Разложение на множители
3. Замена переменной
4. Сведение к квадратному уравнению
5. Сведение к однородному уравнению
6. Использование свойств монотонности функции
7. Функционально-графический

Основные методы решения уравнений повышенного уровня (тригонометрические уравнения)

Метод равносильных преобразований

$$\frac{\sin^2 x - \sin x}{1 - \cos x} = 0$$

$$\frac{\sin^2 x - \sin x}{1 - \cos x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x(\sin x - 1)}{1 - \cos x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{array} \right. \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \\ x = \pi + 2\pi n, n \in Z \end{array} \right.$$

Основные методы решения уравнений повышенного уровня (тригонометрические уравнения)

Метод разложения на множители

$$\cos x ctgx + \sqrt{3} = ctgx + \sqrt{3}\cos x$$

$$\cos x ctgx + \sqrt{3} - ctgx - \sqrt{3}\cos x = 0$$

$$\cos x ctgx - \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3} - ctgx = 0$$

$$\cos x(ctgx - \sqrt{3}) - (ctgx - \sqrt{3}) = 0$$

$$(ctgx - \sqrt{3})(\cos x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} ctgx = \sqrt{3} \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \\ x = 2\pi n, n \in Z \end{array}\right. \\ x \neq \pi m, m \in Z \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$$

Основные методы решения уравнений повышенного уровня (тригонометрические уравнения)

Метод сведения к квадратному уравнению

$$5\sin 2x = \cos 4x - 3$$

$$5\sin 2x = 1 - 2\sin^2 2x - 3$$

$$2\sin^2 2x + 5\sin 2x + 2 = 0$$

$$\sin 2x = t,\ \ \sin 2x \in [-1;1] \Rightarrow t \in [-1;1]$$

$$2t^2 + 5t + 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{1}{2} \\ t = -2 \notin [-1;1] \end{array}\right.$$

$$\sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \\ 2x = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi k, k \in Z;\ x = \frac{7\pi}{12} + 2\pi k, k \in Z$$

Основные методы решения уравнений повышенного уровня (тригонометрические уравнения)

Метод сведения к однородному уравнению

$$5\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 11\cos^2 x = 4$$

$$5\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 11\cos^2 x = 4(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 7\cos^2 x = 0 \qquad \Big| : \cos^2 x$$

$$tg^2 x - 8tgx + 7 = 0$$

$$t = tgx$$

$$t^2 - 8t + 7 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 7 \\ t = 1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tgx = 7 \\ tgx = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = arctg7 + \pi k, k \in Z \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \end{array}\right.$$

Основные методы решения уравнений повышенного уровня (тригонометрические уравнения)

Метод понижения степени

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$$

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2}$$

$$\cos 6x + \cos 8x + \cos 2x + \cos 4x = 0$$

$$2\cos 7x\cos x + 2\cos 3x\cos x = 0$$

$$2\cos x(\cos 7x + \cos 3x) = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 0 \qquad\qquad \cos x = 0$$

$$2\cos 5x\cos 2x = 0 \qquad\qquad \underline{x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z}$$

$$\cos 5x = 0 \qquad\qquad \cos 2x = 0$$

$$\underline{x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, n \in Z} \qquad\qquad \underline{x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}m, m \in Z}$$

Основные методы решения уравнений повышенного уровня (тригонометрические уравнения)

Метод использования свойств функции

$$(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 - 5 = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin 2x + \sin\frac{\pi}{3}\cos 2x\right) =$$

$$= 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \le 2$$

$$(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 - 5 \le 4 - 5 = -1$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \ge -1$$

$$\begin{cases} (\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 - 5 = -1 \\ \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \\ \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \end{cases}$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \pi + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + \pi k, k \in Z$$

$$\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \left| x = \frac{7\pi}{12} + \pi k \right| = \sin^2\left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k + \frac{\pi}{3}\right) = \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) = 1$$

$$x = \frac{7\pi}{12} + \pi k, k \in Z$$

Смешанные уравнения

Решите уравнение. Найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2};5\pi\right]$

$$\log_{11}(\sqrt{2}\sin x)-\log_{121}(\cos x+2)=0$$

$$\log_{11}(\sqrt{2}\sin x)=\log_{11^2}(\cos x+2)$$

$$\log_{11}(\sqrt{2}\sin x)=\log_{11}\sqrt{\cos x+2}$$

$$\sqrt{2}\sin x=\sqrt{\cos x+2}$$

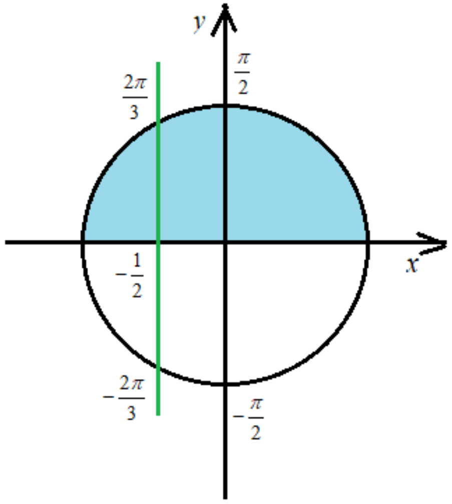
$$\begin{cases}\sqrt{2}\sin x>0\\ \cos x+2>0\end{cases}\Rightarrow \sin x>0$$

$$2\sin^2 x=\cos x+2$$

$$2(1-\cos^2 x)=\cos x+2$$

$$2\cos^2 x+\cos x=0$$

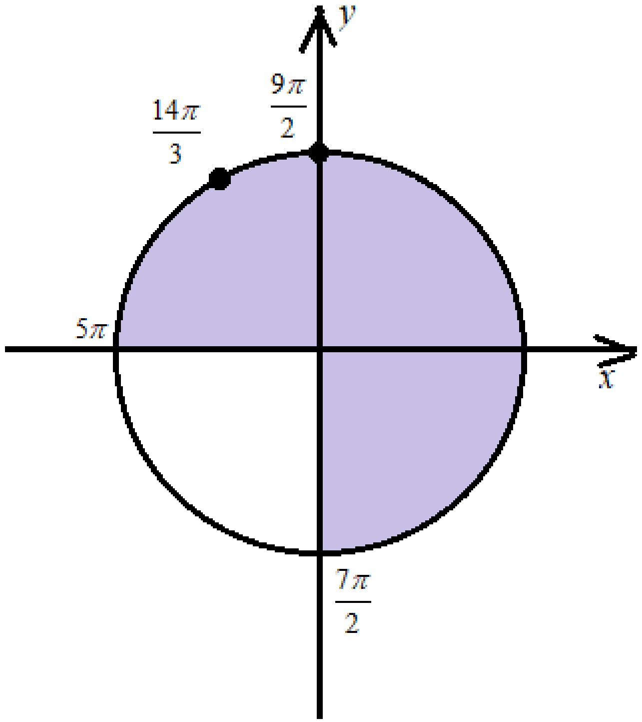
$$\cos x(2\cos x+1)=0$$



$\cos x=0$ $\qquad$ $\cos x=-\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$ $\qquad$ $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$ $\qquad$ $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$



$$x=\frac{9\pi}{2},\ x=\frac{14\pi}{3}$$

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ НЕАЛГЕБРАИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ ФОРМАТА ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ

Схема отбора учебного содержания учебного курса «алгебра и начала математического анализа»

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

11 КЛАСС

Иррациональные, показательные и логарифмические неравенства	24	Основные методы решения показательных и логарифмических неравенств. Основные методы решения иррациональных неравенств. Графические методы решения иррациональных, показательных и логарифмических уравнений и неравенств	Применять свойства показательной и логарифмической функций к решению показательных и логарифмических неравенств. Обосновать равносильность переходов. Решать иррациональные и комбинированные неравенства, с помощью равносильных переходов. Использовать графические методы и свойства входящих в уравнение или неравенство функций для решения задачи

Основные методы решения неравенств в учебном курсе «Алгебра и начала математического анализа» 10-11 класс (углубленный)

1. Равносильные преобразования
2. Разложение на множители
3. Замена переменной
4. Сведение к квадратному неравенству
5. Сведение к однородному неравенству
6. Использование свойств монотонности функции
7. Функционально графический

Особенности решения неравенств (повышенный уровень)

- **Иррациональные неравенства**

Учет ограничений при возведении обеих частей неравенства в чётную степень и отсутствие ограничений при возведении в нечётную степень, свойства равносильности

- **Показательные неравенства**

Функция монотонна для любых x и a ($0<a\neq1$). $a^x>0$ – значения функции положительные числа.

- **Логарифмические неравенства**

Функция монотонна. Применение свойств только с учетом ОДЗ (важно при переходе от логарифма произведения (частного) к сумме (разности) логарифмов)

- **Тригонометрические неравенства**

Решение на тригонометрической окружности, графическая интерпретация решения

- **Смешанные неравенства**

Преобладание использования функционально-графического метода

Методы решения неравенств

- ✓ Обобщенный метод интервалов
- ✓ Метод рационализации
- ✓ Метод оценки
- ✓ Применение производной

Логарифмические, показательные неравенства

$1)\ 16^x > 0{,}125$

$2)\ 125\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \le \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$

$3)\ 2^x - 2^{x-4} > 15$

$4)\ 5\cdot 2^{\sqrt{x}} - 3\cdot 2^{\sqrt{x}-1} \ge 56$

$5)\ 25^x < 6\cdot 5^x - 5$

$6)\ 3\cdot 4^x + 2\cdot 9^x - 5\cdot 6^x < 0$

$7)\ \log_5(3x-1) < 1$

$8)\ \log_{0,2}(4x-2x) > -1$

$9)\ \log_{0,4}(2x-5) > \log_{0,4}(x+1)$

$10)\ \log_4(3x-1) < \log_4(2x+3)$

$11)\ \log_{1/3}(x+4) > \log_{1/3}(x^2+2x-2)$

$12)\ \log_{9x^2}(6+2x-x^2) \le \frac{1}{2}$

$13)\ \log_{(x-3)}(2(x^2-10x-24)) \ge \log_{(x-3)}(x^2-9)$

$14)\ \log_2^2(x-x^2+2) + 3\log_{1/2}(x-x^2+2) \le -2$

$15)\ \log_5^2(6-x) + 2\log_{1/\sqrt{5}}(6-x) + \log_3 27 \ge 0$

$16)\ \log_{x+2}^2(x-1) - 3\log_{x+2}(x-1) + 2 < 0$

$17)\ \frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2 x - 1} < 1$

$18)\ \frac{3\log_{0,5} x}{2-\log_{0,5} x} \ge 2\log_{0,5} x + 1$

$19)\ \frac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} < 1$

$20)\ \log_3(2^x-1) + \log_{(2^x-1)} 3 \le \frac{10}{3}$

Решите неравенство $\log_{x^2}(x^2+1)>0$

ОДЗ $\begin{cases} x^2>0 \\ x^2\neq 1 \\ x^2+1>0 \end{cases} \Rightarrow x\neq 0, x\neq 1, x\neq -1$

1 способ

$\log_{x^2}(x^2+1)>\log_{x^2}1$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x^2<1 \\ x^2+1<1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2>1 \\ x^2+1>1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-1;0)\cup(0;1) \\ x^2<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty) \\ x^2>0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty) \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$

2 способ

$\log_{x^2}(x^2+1)>\log_{x^2}1$

$\log_{x^2}(x^2+1)-\log_{x^2}1>0$

?

$(x^2-1)(x^2+1-1)>0$

$(x^2-1)x^2>0$

$x^2-1>0$

$x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$

Задания № 15 ЕГЭ

Замена переменной

1) Решите неравенство $\frac{13}{3^x-81}\le\frac{1}{3^x-9}$ $\quad 3^x=t$

2) Решите неравенство $\frac{7-2\cdot2^x}{4^x-12\cdot2^x+32}\ge0{,}25$ $\quad 2^x=t$

3) Решите неравенство $\frac{3}{\left(2^{2-x^2}-1\right)^2}-\frac{4}{2^{2-x^2}-1}+1\ge0$ $\quad 2^{2-x^2}-1=t$

Метод рационализации

4) Решите неравенство $\frac{4^{x^2+x-4}-0{,}5^{2x^2-2x-1}}{0{,}2\cdot5^x-1}\le0$

5) Решите неравенство $\frac{6^x-4\cdot3^x}{x\cdot2^x-5\cdot2^x-4x+20}\le\frac{1}{x-5}$

6) Решите неравенство $27\cdot45^x-27^{x+1}-12\cdot15^x+12\cdot9^x+5^x-3^x\le0$

Замена переменной

7) Решите неравенство $\frac{(\log_4 x+2)^2}{\log_4^2 x-9}\ge0$

8) Решите неравенство $\frac{\log_5(25x)}{\log_5 x-2}+\frac{\log_5 x-2}{\log_5(25x)}\ge\frac{6-\log_5 x^4}{\log_5^2 x-4}$

9) Решите неравенство $\frac{\log_2(32x)-1}{\log_2^2 x-\log_2 x^5}\ge-1$

10) Решите неравенство $\log_3^2(25-x^2)-3\log_3(25-x^2)+2\ge0$

Метод рационализации

11) Решите неравенство $x^2\log_{512}(x+5)\le\log_2(x^2+10x+25)$

12) Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(18-9x)<\log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+5)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$

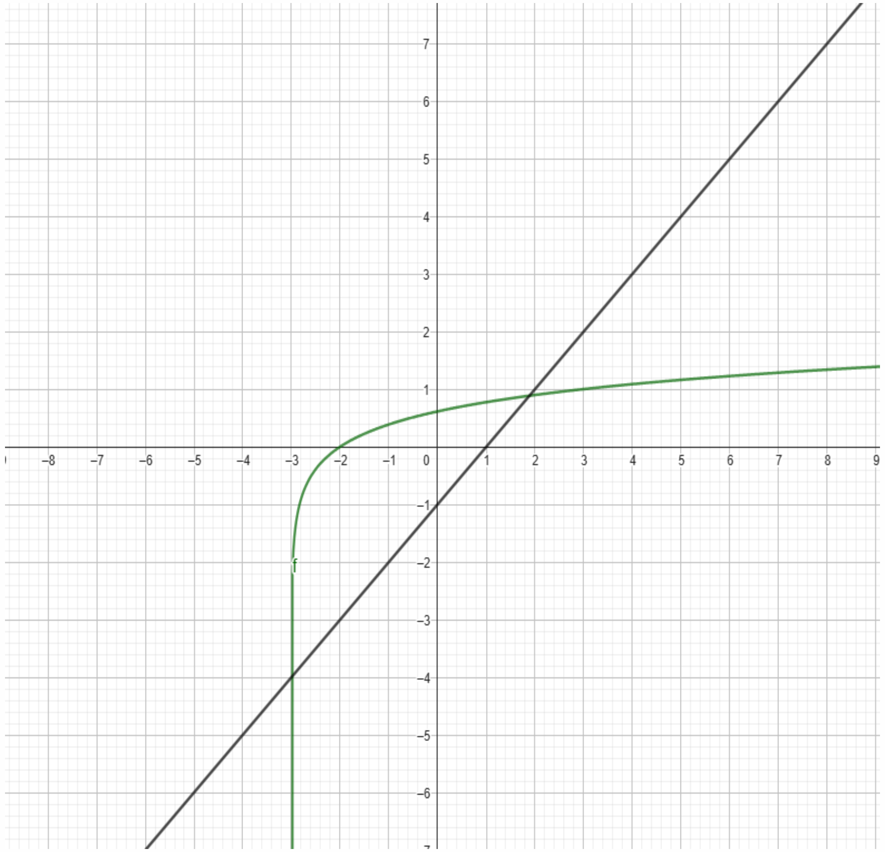
❑ Смешанные неравенства

Преобладание использования функционально-графического метода

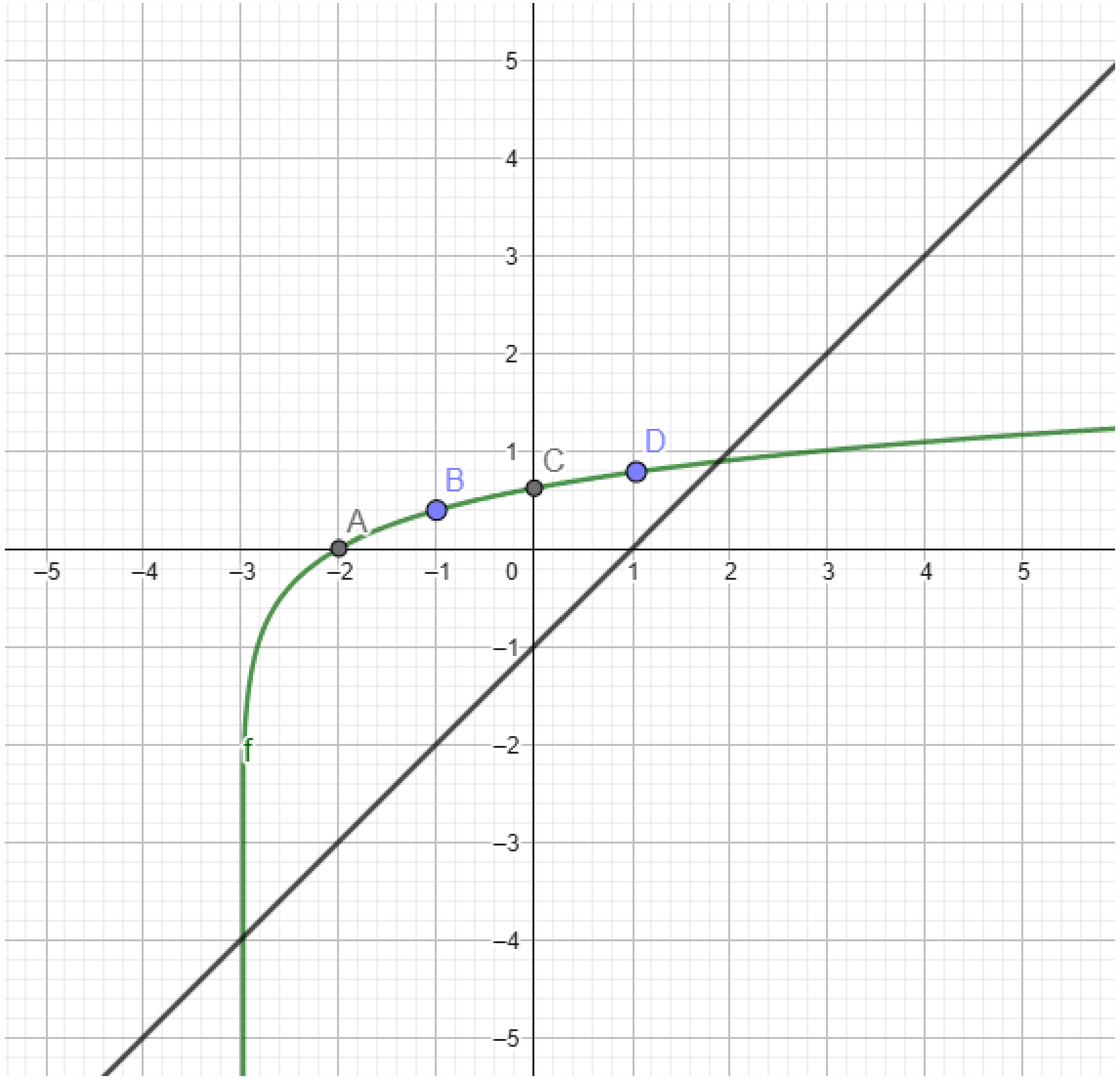
Найти все целые решения неравенства x-1<$\log_6(x+3)$

$y= x-1$

$y=\log_6(x+3)$



Решить неравенство x-1<log$_6$(x+3)



x=-2, x=-1, x=0, x=1.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЕГЭ МАТЕМАТИКА 2024г.

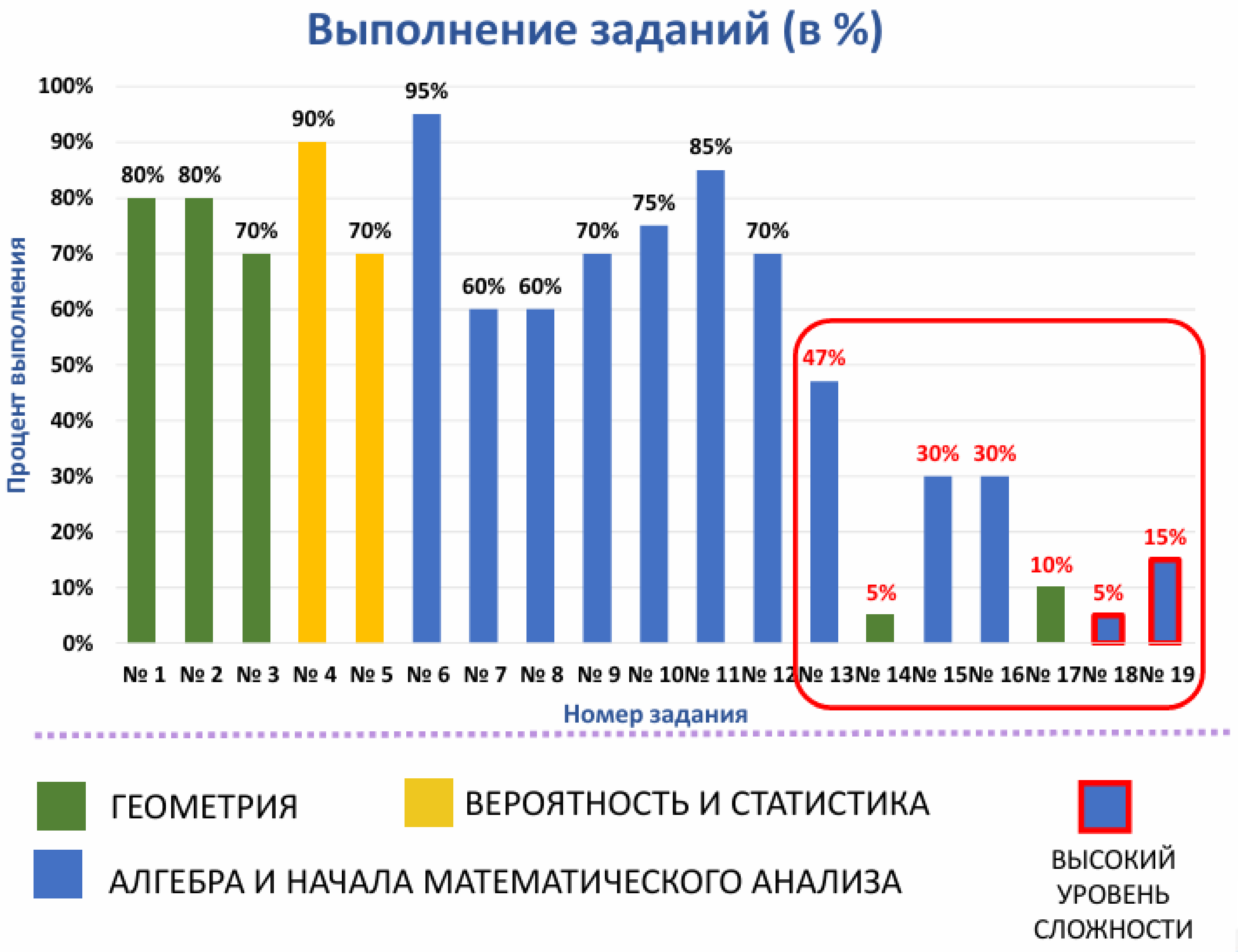
Не преодолели минимальный порог – 5 п.б. /27 т.б. – **5%**

Набрали 81 – 100 баллов **– 18%**

Доля не набравших «вузовский порог» – **снизилась**

Число участников набравших не менее 60 баллов (11 п.б.)

– увеличилась



№ 13 (ЕГЭ, основная волна, 2024)

а) Решите уравнение $\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

ОСНОВНЫЕ ОШИБКИ, ДОПУЩЕННЫЕ В РЕШЕНИИ ЗАДАНИЯ №13:

- неверное применение тригонометрических формул, в частности формул приведения (или формул сложения);
- неверное решение простейших тригонометрических уравнений;
- неполная запись решения задачи;
- **отсутствие обоснования отбора корней в пункте б).**

№13

$\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$

$\sin x(1 - 2\sin^2 x) + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$

$\sin x - 2\sin^3 x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$

$2\sin x - 2\sin^3 x + \sqrt{2}\cos^2 x = 0$

$2\sin x(1 - \sin^2 x) + \sqrt{2}\cos^2 x = 0$

$2\sin x \cdot \cos^2 x + \sqrt{2}\cos^2 x = 0$

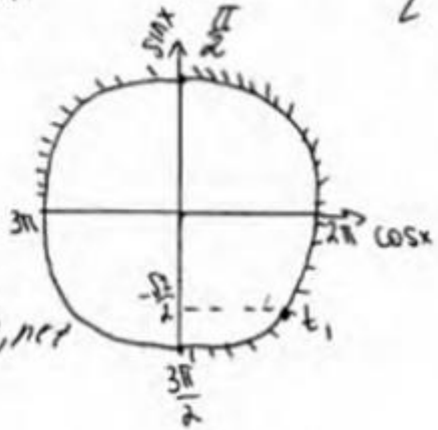
$\cos^2 x(2\sin x + \sqrt{2}) = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\cos^2 x = 0\\ 2\sin x = -\sqrt{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z\\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z\end{array}\right.$$

б) Отберем корни с помощью триг. окр-ти, кот $\in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

$t_1 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi - \pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

$\Rightarrow$ нам подх. $\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; \frac{\pi}{2}$



Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; \frac{\pi}{2}$

Комментарий.

Обосновано получен верный ответ в пункте а).

Отбор корней с помощью тригонометрической окружности неверный, так как на отмеченной дуге обозначен корень, не принадлежащий числовому отрезку.

Оценка эксперта: 1 балл.

№ 15 (ЕГЭ, основная волна, 2024)

Решите неравенство $\log_8\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\ge\log_2\left(x^2-1\right)-5.$

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 31, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

ОСНОВНЫЕ ОШИБКИ, ДОПУЩЕННЫЕ В РЕШЕНИИ ЗАДАНИЯ №15:

- неумение работать с алгебраическими выражениями,
- неверное проведение равносильных преобразований,
- затруднения в применении метода замены переменной;
- некорректность подходов к решению неравенств.

№15

$\log_8(x^3-3x^2+3x-1) \geq \log_2(x^2-1)-5$

$\log_{2^3}(x-1)^3-\log_2(x^2-1)+5 \geq 0$

$\frac{1}{3}\log_2(x-1)^3-\log_2(x^2-1)+5 \geq 0$

$\log_2\sqrt[3]{(x-1)^3}-\log_2(x^2-1)+\log_2 32 \geq 0$

$\log_2(x-1)-\log_2(x^2-1)+\log_2 32 \geq 0$

$\log_2\frac{(x-1)\cdot 32}{(x^2-1)} \geq 0$

используем метод рационализации:

$(2-1)\left(\frac{(x-1)\cdot 32}{x^2-1}-1\right) \geq 0$

$1\cdot\frac{32x-32-x^2+1}{x^2-1} \geq 0 \quad |\cdot(-1)$

$\frac{x^2-32x+31}{(x-1)(x+1)} \leq 0$

решим отдельно числитель:

$x^2-32x+31=0$

по т. Виета:

$\begin{cases} x_1\cdot x_2=31 \\ x_1+x_2=32 \end{cases}$

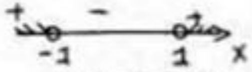
отсюда: $x_1=31$, $x_2=1$

$\frac{(x-31)(x-1)}{(x-1)(x+1)} \leq 0$

$*\begin{cases} ① \ x^2-1>0 \\ ② \ x^3-3x^2+3x-1>0 \end{cases}$

① $x^2-1>0$

$(x-1)(x+1)>0$



$x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

② $x^3-3x^2+3x-1>0$

$x^3-3x^2+3x-1 \mid x-1$

$x^3-x^2 \qquad x^2-2x+1$

$-2x^2+3x$

$-2x^2+2x$

$x-1$

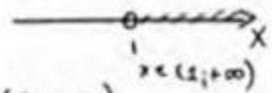
$x-1$

0

$(x-1)(x^2-2x+1)>0$

$(x-1)(x-1)^2>0$

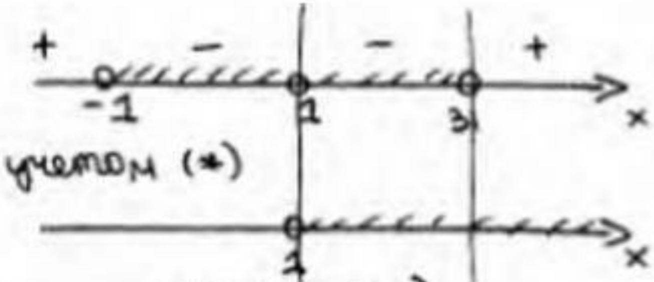
$(x-1)^3>0$



$x\in(1;+\infty)$

Отсюда: $*\ x\in(1;+\infty)$

объединив оба неравенства получим:



с учетом (*)

$x\in(1;31)$

Ответ: $x\in(1;31)$

Комментарий.
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 31.

Оценка эксперта: 1 балл.

80 ПОБЕДА!

Задорожная Ольга Владимировна
Доцент кафедры математики, информатики и технологического образования
ГБОУ ИРО Краснодарского края

ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

Официальные каналы Министерства образования, науки и молодежной политики Краснодарского края

Официальные каналы ГБОУ ДПО «Институт развития образования Краснодарского края»