«Показательные неравенства. Задание № 15 ЕГЭ по математике профильного уровня»

Попова Ирина Николаевна,

учитель математики МБОУ СОШ № 6 им Ю. А. Гагарина,

региональный тьютор ЕГЭ Кавказского района

Метод интервалов

Методом интервалов решают неравенства вида

$f(x)>0$, ($f(x)<0$, $f(x)\leq 0$, $f(x) \geq 0$)

Алгоритм метода интервалов.

1. Находим область определения функции *f(x)* и промежутки, на которых функция непрерывна.

2. Находим нули функции, то есть решения уравнения $f(x)=0$.

3. На числовую прямую наносим область определения и нули функции *f(x)*, причём ***в случае строгого знака неравенства нули «выкалываем».***

4. Определяем интервалы знакопостоянства функции *f(x)*.

5. В соответствии с заданным знаком неравенства, записываем ответ.

Если точка является нулем функции или не принадлежит области определения функции, это НЕ ОЗНАЧАЕТ, что при переходе через такую точку функция автоматически меняет знак, а промежутки знакопостоянства чередуются.

Пример 1. Решить неравенство $\frac{3}{(2^{2-x^2}-1)^2}-\frac{4}{2^{2-x^2}-1}+1\geq 0$

Решение. Рассмотрим $f(x)=\frac{3}{(2^{2-x^2}-1)^2}-\frac{4}{2^{2-x^2}-1}+1$

D(f): $2^{2-x^2}-1\neq 0$

$2-x^2\neq 0$

$x\neq \pm\sqrt{2}$ $\quad D(f)=(-\infty;-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2};\ \sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\ +\infty)$

Найдем нули функции *f(x) = 0* $\quad \frac{3}{(2^{2-x^2}-1)^2}-\frac{4}{2^{2-x^2}-1}+1=0$

Обозначим $2^{2-x^2}-1=t, t\neq 0$

$\frac{3}{t^2}-\frac{4}{t}+1=0$

$\frac{3-4t+t^2}{t^2}=0$

$t^2-4t+3=0$

$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array}\right.$

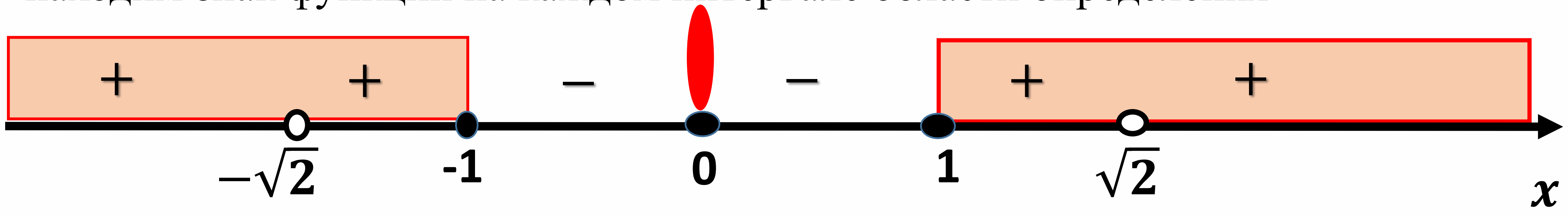
$a+b+c=0$

$\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\frac{c}{a} \end{array}\right.$

Обратная замена:

$$\left[\begin{array}{l} 2^{2-x^2}-1=1, \\ 2^{2-x^2}-1=3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2^{2-x^2}=2, \\ 2^{2-x^2}=4; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2-x^2=1, \\ 2-x^2=2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2=1, \\ x^2=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=1, \\ x=0. \end{array}\right.$$

Отмечаем полученные точки и область определения на координатной оси и находим знак функции на каждом интервале области определения



Выбираем интервалы, где $f(x) \geq 0$

Ответ: $(-\infty;\ -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2};\ -1] \cup \{0\} \cup [1;\ \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};\ +\infty).$

Пример 2. Решить неравенство $4^{\frac{9x^2}{4}} - (\frac{3x}{2}+1)^{\frac{9x^2-4}{4log_2(\frac{3x}{2}+1)}} \le 3.$

$$\boxed{\frac{1}{log_a b} = log_b a}$$

Решение Преобразуем $\frac{1}{log_2(\frac{3x}{2}+1)} = log_{(\frac{3x}{2}+1)}2$

$$4^{\frac{9x^2}{4}} - (\frac{3x}{2}+1)^{(log_{(\frac{3x}{2}+1)}2)\cdot\frac{9x^2-4}{4}} - 3 \le 0$$

Рассмотрим $f(x) = 4^{\frac{9x^2}{4}} - (\frac{3x}{2}+1)^{(log_{(\frac{3x}{2}+1)}2)\cdot\frac{9x^2-4}{4}} - 3$ и найдем *D(f)*

$$\begin{cases} \frac{3x}{2}+1>0, \\ \frac{3x}{2}+1\ne 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>-\frac{2}{3}, \\ x\ne 0. \end{cases} \qquad D(f) = \left(-\frac{2}{3};0\right) \cup (0;\ +\infty)$$

Нули функции $4^{\frac{9x^2}{4}} - \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{9x^2}{4}} - 3 = 0,$

$$2 \cdot (2^2)^{\frac{9x^2}{4}} - 2^{\frac{9x^2}{4}} - 6 = 0$$

Замена: $t = 2^{\frac{9x^2}{4}},\ t > 0$

$$2t^2 - t - 6 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = -\frac{3}{2}; \end{array}\right. \qquad t = 2.$$

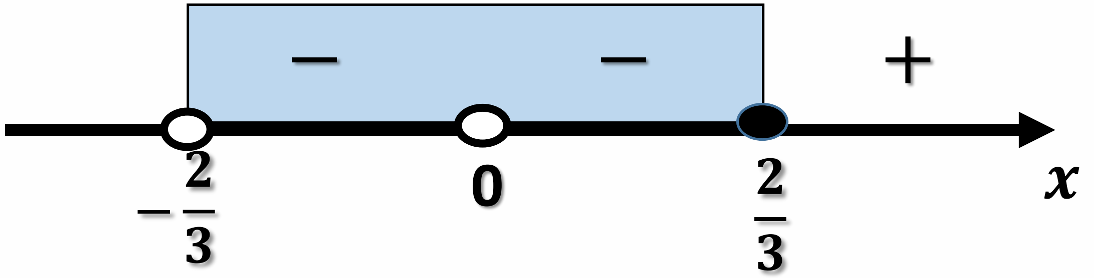
Обратная замена: $2^{\frac{9x^2}{4}} = 2$

$$\frac{9x^2}{4} = 1,$$

$$9x^2 = 4,$$

$$x^2 = \frac{4}{9},$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{2}{3}, \\ x = \frac{2}{3}. \end{array}\right.$$



Выбираем интервалы, где $f(x) \leq 0$ ***Ответ:*** $\left(-\frac{2}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{2}{3}\right]$

Сведение показательных неравенств к рациональным неравенствам методом знакотождественных множителей (метод рационализации)

$$\boxed{a(x)^{f(x)} \ge a(x)^{g(x)}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a(x) > 0 & (1) \\ a(x) \ne 1 & (2) \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \ge 0 & (3) \end{cases}}$$

Доказательство

1) При $0 < a(x) < 1$ первый множитель отрицателен, значит для верного решения неравенства необходимо, чтобы $f(x) \le g(x)$

2) При $a(x) > 1$ первый множитель положителен, значит для верного решения неравенства необходимо, чтобы $f(x) \ge g(x)$

Пример 3. Решите неравенство: $$\frac{4^x-3\cdot 10^x-10\cdot 25^x}{x^3-3x^2}\ge 0$$

Решение:

$$\frac{25^x\left(\left(\frac{4}{25}\right)^x-3\cdot\left(\frac{10}{25}\right)^x-10\right)}{x^2(x-3)}\ge 0$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}-3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x-10}{x^2(x-3)}\ge 0$$

$$\frac{\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x-5\right)\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x+2\right)}{x^2(x-3)}\ge 0$$

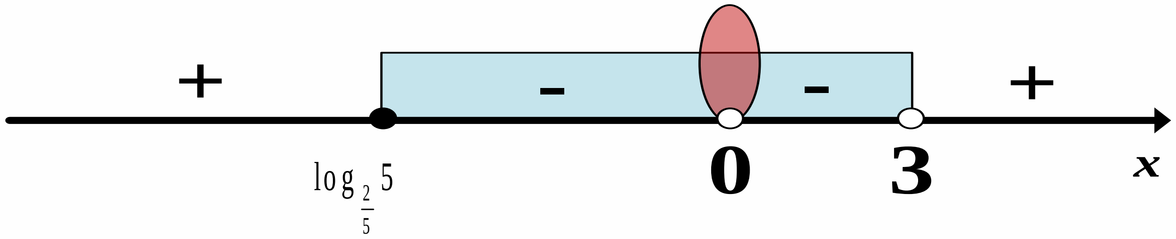
$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x-5}{x^2(x-3)}\ge 0$$

Воспользуемся методом рационализации

$$\boxed{a^f-g\leftrightarrow\left(f-\log_a g\right)(a-1),\ (g\ge 0)}$$

$$\frac{(\frac{2}{5}-1)\left(x-\log_{\frac{2}{5}}5\right)}{x^2(x-3)}\ge 0$$

$$\frac{x-\log_{\frac{2}{5}}5}{x^2(x-3)}\le 0$$



Ответ: $\left[\log_{\frac{2}{3}}5;0\right)\cup(0;3)$

Пример 4. Решите неравенство: $\dfrac{\left(\frac{10}{3}\right)^{-|x^2+4x+2|}-0{,}09}{2x+5}\le 0$

Решение:

Преобразуем левую часть

$$\frac{\left(\frac{3}{10}\right)^{|x^2+4x+2|}-\left(\frac{3}{10}\right)^2}{2x+5}\le 0$$

$$\frac{\left(\frac{3}{10}\right)^{|x^2+4x+2|-2}-1}{2x+5}\le 0$$

Воспользуемся методом рационализации

$$\boxed{h^f-h^g\,(h>0)\leftrightarrow(h-1)(f-g)}$$

$$\frac{\left(|x^2+4x+2|-2\right)\left(\frac{3}{10}-1\right)}{2x+5}\le 0$$

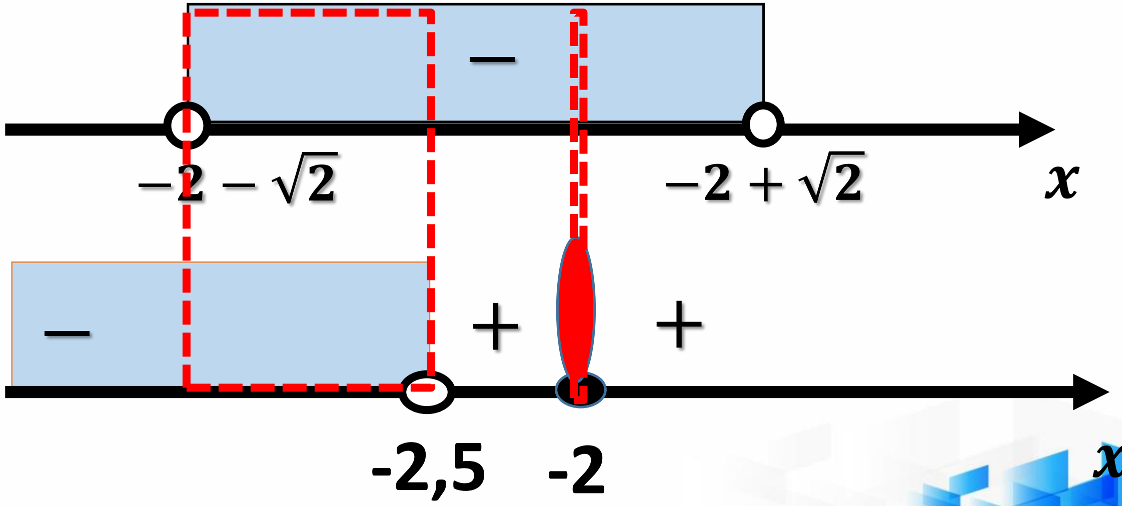
$$\frac{|x^2+4x+2|-2}{2x+5}\ge 0,\ \text{так как}\ \frac{3}{10}<1$$

Рассмотрим 1 случай

$$\begin{cases} x^2+4x+2<0 \\ \dfrac{-(x^2+4x+2)-2}{2x+5} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-(-2-\sqrt{2}))(x-(-2+\sqrt{2}))<0 \\ (\dfrac{x^2+4x+4}{2x+5} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-(-2-\sqrt{2}))(x-(-2+\sqrt{2}))<0 \\ \dfrac{(x+2)^2}{2x+5} \leq 0 \end{cases}$$

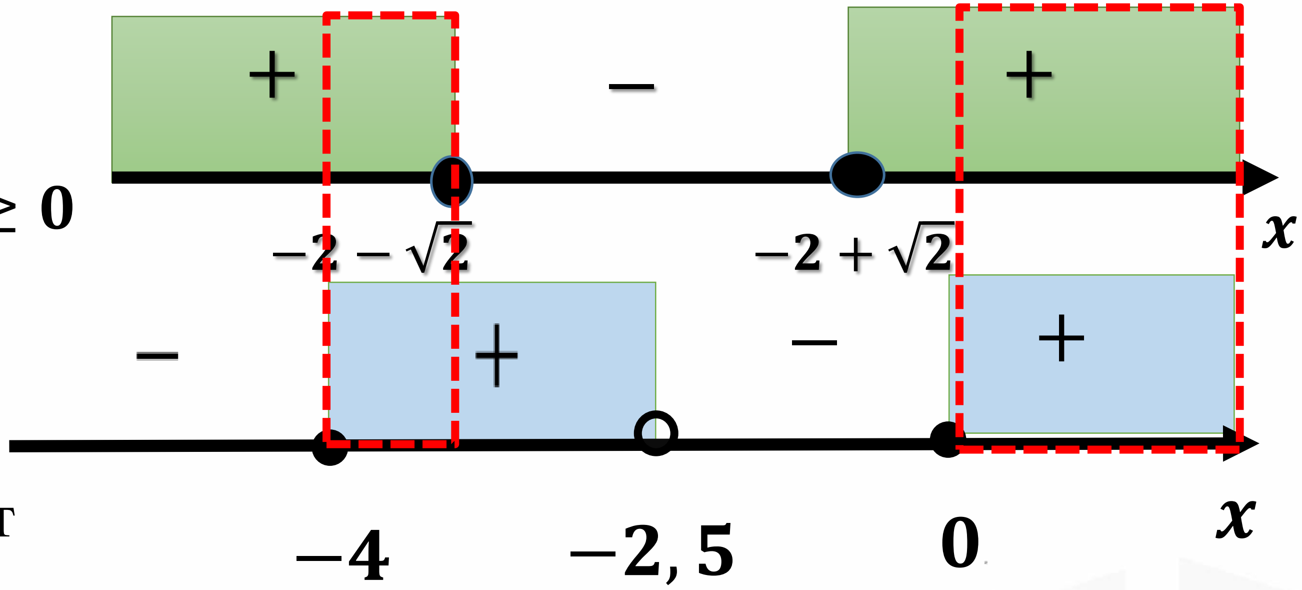


Рассмотрим 2 случай

$$\begin{cases} x^2+4x+2 \geq 0 \\ \dfrac{(x^2+4x+2)-2}{2x+5} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(x-\left(-2-\sqrt{2}\right)\right)\left(x-\left(-2+\sqrt{2}\right)\right) \geq 0 \\ \dfrac{x^2+4x}{2x+5} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(x-\left(-2-\sqrt{2}\right)\right)\left(x-\left(-2+\sqrt{2}\right)\right) \geq 0 \\ \dfrac{x(x+4)}{2x+5} \geq 0 \end{cases}$$



Объединяем два случая и получаем ответ

Ответ: $[-4;\ -2,5) \cup \{-2\} \cup [0;\ +\infty)$

Спасибо за внимание