



ЗАДАНИЕ №16 ЕГЭ профильного уровня. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА. КРЕДИТЫ



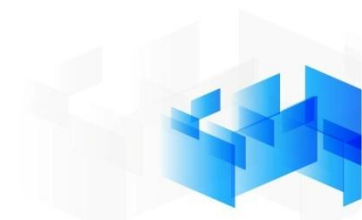
Милоградова Е.В., учитель математики
МБОУ гимназии № 7
г. Крымска





Виды экономических задач на ЕГЭ профильного уровня

- 1) Вклады
- 2) Кредиты
- 3) Задачи на оптимизацию





ПОВТОРЕНИЕ

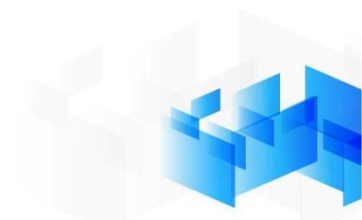
$$1\% = 0,01 = \frac{1}{100}$$

! Чтобы найти $r\%$ от числа S надо $\frac{r}{100} \cdot S$

! Сумма кредита (или вклада) после начисления процентов $\left(1 + \frac{r}{100}\right) \cdot S = p \cdot S$, где $p = 1 + \frac{r}{100}$

! Формула суммы арифметической прогрессии

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$





Важно знать!

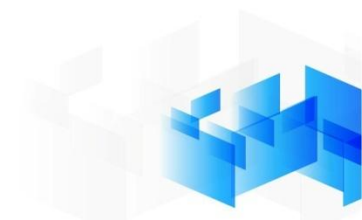
- Кредит выдают под проценты.
- Проценты начисляются *множественно* в течение всего срока кредитования.
- Проценты начисляются *на остаток долга*.
- Платежи производятся *только после начисления процентов!*
- Платёж состоит из двух частей:
 - 1) *начисленных процентов,*
 - 2) *некоторой части от суммы взятого кредита.*





В задачах по теме «Кредиты» используют различные виды платежей:

1. Дифференцированные платежи (ежемесячные или ежегодные платежи, уменьшающиеся к концу срока кредитования и обеспечивающие уменьшение суммы долга на одну и ту же величину)
2. Аннуитетные платежи (постоянные ежемесячные или ежегодные платежи, которые не меняются на протяжении всего периода кредитования, но долг изменяется не равномерно)





Дифференцированные платежи

(ежемесячные или ежегодные платежи, уменьшающиеся к концу срока кредитования и обеспечивающие уменьшение суммы долга на одну и ту же величину)

Ключевые фразы:

- долг должен быть на X тысяч рублей меньше долга на n -е число предыдущего месяца;
- n -го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на n -е число предыдущего месяца;
- долг уменьшится равномерно на весь срок кредитования.

Долг уменьшается на сумму X тыс.руб.

S - сумма кредита

$S_{\text{общ}}$ - общая сумма выплат

r - процентная ставка

n - срок кредитования





Дифференцированные платежи

(сумма долга уменьшается на одну и ту же величину)

!Долг уменьшается на сумму X тыс.руб.

Схема уменьшения долга по годам:

1 год $S - X$

2 год $S - 2X$

3 год $S - 3X$

4 год $S - 4X$ и т.д.

n год $S - nX = 0$ (долг погашен)

$$S = nX \Rightarrow X = \frac{S}{n}$$





Дифференцированные платежи

(сумма долга уменьшается на одну и ту же величину)

! Проценты начисляют на остаток долга

Схема начисления процентов по годам:

1 год	$\frac{r}{100} \cdot S;$
2 год	$\frac{r}{100} \cdot (S - X);$
3 год	$\frac{r}{100} \cdot (S - 2X);$
4 год	$\frac{r}{100} \cdot (S - 3X)$ и т.д.
n год	$\frac{r}{100} \cdot (S - (n - 1)X)$



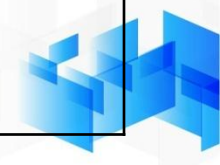


Дифференцированные платежи

(сумма долга уменьшается на одну и ту же величину)



Номер платежа	Сумма долга (тыс.руб)	Сумма начисленных процентов ($r \%$)	Сумма уменьшения основного долга (тыс.руб)	Остаток долга (тыс.руб)
1	S	$\frac{r}{100} \cdot S$	X	$S - X$
2	$S - X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - X)$	X	$S - 2X$
3	$S - 2X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - 2X)$	X	$S - 3X$
4	$S - 3X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - 3X)$	X	$S - 4X$
n	$S - (n - 1)X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - (n - 1)X)$	X	$S - nX = 0$
Итого		Переплата по кредиту $S_{общ} - S$	Сумма кредита $S = nX$	
		$S_{общ}$		





Дифференцированные платежи

(сумма долга уменьшается на одну и ту же величину)



Номер платежа	Сумма долга (тыс.руб)	Сумма начисленных процентов ($r \%$)	Сумма уменьшения основного долга (тыс.руб)	Остаток долга (тыс.руб)
1	S	$\frac{r}{100} \cdot S$	X	$S - X$
2	$S - X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - X)$	X	$S - 2X$
3	$S - 2X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - 2X)$	X	$S - 3X$
4	$S - 3X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - 3X)$	X	$S - 4X$
n	$S - (n - 1)X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - (n - 1)X)$	X	$S - nX = 0$
Итого		Переплата по кредиту $S_{общ} - S$	Сумма кредита $S = nX$	
		$S_{общ}$		



Дифференцированные платежи

(сумма долга уменьшается на одну и ту же величину)

Номер платежа	Сумма долга (тыс.руб)	Сумма начисленных процентов ($r \%$)	Сумма уменьшения основного долга (тыс.руб)	Остаток долга (тыс.руб)
1	S	$\frac{r}{100} \cdot S$	X	$S - X$
2	$S - X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - X)$	X	$S - 2X$
3	$S - 2X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - 2X)$	X	$S - 3X$
4	$S - 3X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - 3X)$	X	$S - 4X$
n	$S - (n - 1)X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - (n - 1)X)$	X	$S - nX = 0$
Итого		Переплата по кредиту $S_{общ} - S$	Сумма кредита $S = nX$	
		$S_{общ}$		



Дифференцированные платежи

(сумма долга уменьшается на одну и ту же величину)



Номер платежа	Сумма долга (тыс.руб)	Сумма начисленных процентов ($r \%$)	Сумма уменьшения основного долга (тыс.руб)	Остаток долга (тыс.руб)
1	S	$\frac{r}{100} \cdot S$	X	$S - X$
2	$S - X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - X)$	X	$S - 2X$
3	$S - 2X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - 2X)$	X	$S - 3X$
4	$S - 3X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - 3X)$	X	$S - 4X$
n	$S - (n - 1)X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - (n - 1)X)$	X	$S - nX = 0$

Вывод формулы общей суммы выплат по кредиту

$$S_{\text{общ}} = S + \frac{r}{100} \cdot (S + S - X + S - 2X + S - 3X + \dots + (S - (n - 1)X)) =$$

сумма арифметической прогрессии

$$= S + \frac{r}{100} \cdot \frac{S + S - (n - 1)X}{2} \cdot n = S + \frac{r}{100} \cdot \frac{2S - (n - 1)X}{2} \cdot n$$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$





!!! Для получения полного балла на ЕГЭ за решение задачи № 16 необходимо:

- 1) приводить полное обоснование всех шагов решения,
- 2) описывать введённые в задачу переменные,
- 3) а также пояснять, аргументировать составление математической модели задачи (формулы, уравнения, неравенства, системы).

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — <u>верный ответ, но решение недостаточно обосновано.</u>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2



ЗАДАЧА № 1.

15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r .

РЕШЕНИЕ

S – сумма кредита

$S_{\text{общ}} = 130 \% \text{ от } S, \text{ т.е. } S_{\text{общ}} = 1,3S$

$n = 19$ месяцев

$r \%$ процентная ставка -?

Составим таблицу платежей.





ЗАДАЧА № 1.



Номер платежа	Сумма долга (тыс.руб)	Сумма начисленных процентов ($r \%$)	Сумма уменьшения основного долга (тыс.руб)	Остаток долга (тыс.руб)
1				
2				
3				
4				
19				



ЗАДАЧА № 1.



Номер платежа	Сумма долга (тыс.руб)	Сумма начисленных процентов ($r \%$)	Сумма уменьшения основного долга (тыс.руб)	Остаток долга (тыс.руб)
1	S	$\frac{r}{100} \cdot S$	X	$S - X$
2				
3				
4				
19				



ЗАДАЧА № 1.



Номер платежа	Сумма долга (тыс.руб)	Сумма начисленных процентов ($r \%$)	Сумма уменьшения основного долга (тыс.руб)	Остаток долга (тыс.руб)
1	S	$\frac{r}{100} \cdot S$	X	$S - X$
2	$S - X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - X)$	X	$S - 2X$
3				
4				
19				





ЗАДАЧА № 1.



Номер платежа	Сумма долга (тыс.руб)	Сумма начисленных процентов ($r \%$)	Сумма уменьшения основного долга (тыс.руб)	Остаток долга (тыс.руб)
1	S	$\frac{r}{100} \cdot S$	X	$S - X$
2	$S - X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - X)$	X	$S - 2X$
3	$S - 2X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - 2X)$	X	$S - 3X$
4				
19				





ЗАДАЧА № 1.



Номер платежа	Сумма долга (тыс.руб)	Сумма начисленных процентов ($r \%$)	Сумма уменьшения основного долга (тыс.руб)	Остаток долга (тыс.руб)
1	S	$\frac{r}{100} \cdot S$	X	$S - X$
2	$S - X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - X)$	X	$S - 2X$
3	$S - 2X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - 2X)$	X	$S - 3X$
4	$S - 3X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - 3X)$	X	$S - 4X$ и т.д.
19	$S - 18X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - 18X)$	X	$S - 19X = 0$



ЗАДАЧА № 1.



Номер платежа	Сумма долга (тыс.руб)	Сумма начисленных процентов ($r \%$)	Сумма уменьшения основного долга (тыс.руб)	Остаток долга (тыс.руб)
1	S	$\frac{r}{100} \cdot S$	X	$S - X$
2	$S - X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - X)$	X	$S - 2X$
3	$S - 2X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - 2X)$	X	$S - 3X$
4	$S - 3X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - 3X)$	X	$S - 4X$
19	$S - 18X$	$\frac{r}{100} \cdot (S - 18X)$	X	$S - 19X = 0$

$$S_{общ} = S + \frac{r}{100} \cdot (S + S - X + S - 2X + S - 3X + \dots + S - 18X) =$$

$$= S + \frac{r}{100} \cdot \frac{S + (S - 18X)}{2} \cdot 19 = S + \frac{r}{100} \cdot \frac{2S - 18X}{2} \cdot 19 = S + \frac{19r \cdot (S - 9X)}{100}$$





ЗАДАЧА № 1.



Итак, $S_{общ} = S + \frac{19r \cdot (S - 9X)}{100}$

Т.к. $S_{общ} = 1,3 \cdot S$ и $S = 19X$, то получим уравнение

$$19X + \frac{19r \cdot (19X - 9X)}{100} = 1,3 \cdot 19X$$

$$\frac{19r \cdot 10X}{100} = 0,3 \cdot 19X \quad |: 19X$$

$$\frac{r}{10} = 0,3$$

$$r = 3.$$

ОТВЕТ: 3%





ЗАДАЧА № 2.

15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма всех выплат после полного его погашения равнялась 1 млн.руб.?

РЕШЕНИЕ.

S сумма кредита - ?

$S_{общ} = 1 \text{ млн. руб.}$

$n = 24 \text{ месяца}$

$r = 2\%$,

Составим таблицу платежей.

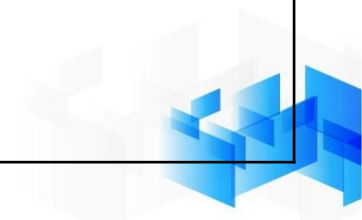




ЗАДАЧА № 2.



Номер платежа	Сумма долга (тыс.руб)	Сумма начисленных процентов ($r \%$)	Сумма уменьшения основного долга (тыс.руб)	Остаток долга (тыс.руб)
1				
2				
3				
4				
24				

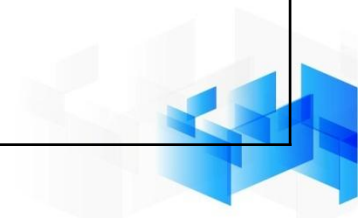




ЗАДАЧА № 2.



Номер платежа	Сумма долга (тыс.руб)	Сумма начисленных процентов ($r \%$)	Сумма уменьшения основного долга (тыс.руб)	Остаток долга (тыс.руб)
1	S	$\frac{2}{100} \cdot S$	X	$S - X$
2				
3				
4				
24				





ЗАДАЧА № 2.



Номер платежа	Сумма долга (тыс.руб)	Сумма начисленных процентов ($r \%$)	Сумма уменьшения основного долга (тыс.руб)	Остаток долга (тыс.руб)
1	S	$\frac{2}{100} \cdot S$	X	$S - X$
2	$S - X$	$\frac{2}{100} \cdot (S - X)$	X	$S - 2X$
3				
4				
24				



ЗАДАЧА № 2.



Номер платежа	Сумма долга (тыс.руб)	Сумма начисленных процентов ($r \%$)	Сумма уменьшения основного долга (тыс.руб)	Остаток долга (тыс.руб)
1	S	$\frac{2}{100} \cdot S$	X	$S - X$
2	$S - X$	$\frac{2}{100} \cdot (S - X)$	X	$S - 2X$
3	$S - 2X$	$\frac{2}{100} \cdot (S - 2X)$	X	$S - 3X$
4	$S - 3X$	$\frac{2}{100} \cdot (S - 3X)$	X	$S - 4X$ и т.д.
24	$S - 23X$	$\frac{2}{100} \cdot (S - 23X)$	X	$S - 24X = 0$

$$S_{\text{общ}} = S + \frac{2}{100} \cdot \frac{S + S - 23X}{2} \cdot 24 = S + \frac{24}{100} \cdot (2S - 23X) = S + \frac{6}{25} \cdot (2S - 23X)$$





ЗАДАЧА № 2.



$$\text{Итак, } S_{\text{общ}} = S + \frac{6}{25} \cdot (2S - 23X)$$

Т.к. $S_{\text{общ}} = 1$ млн.руб = 1000 тыс.руб. и $X = \frac{S}{24}$, то получим уравнение

$$S + \frac{6}{25} \cdot (2S - \frac{23}{24} \cdot S) = 1000$$

$$S + \frac{6}{25} \cdot \frac{48S - 23S}{24} = 1000$$

$$S + \frac{6}{25} \cdot \frac{25S}{24} = 1000$$

$$S + \frac{S}{4} = 1000$$

$$\frac{5}{4} \cdot S = 1000$$

$$S = \frac{4000}{5}$$

$$S = 800$$

ОТВЕТ: 800 000 рублей





ЗАДАЧА № 3

В августе 2027 года Алина планирует взять кредит в банке на 8 лет. Условия его возврата таковы:

- в январе 2028, 2029, 2030 и 2031 годов долг увеличивается на 15% от суммы долга на конец предыдущего года;
- в январе 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг увеличивается на 13% от суммы долга на конец предыдущего года;
- в период с февраля по июль каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в августе каждого года действия кредита долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на август предыдущего года;
- к августу 2035 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите сумму кредита (в млн. рублей), если она на 1690 тыс. рублей меньше общей суммы выплат по кредиту.

РЕШЕНИЕ

S сумма кредита - ?

$S_{\text{общ}} - S = 1\,690$ тыс. руб.

$n = 8$ лет

$r_1 = 15\%, r_2 = 13\%$

Составим таблицу платежей





ЗАДАЧА № 3.



Номер платежа	Сумма долга (тыс.руб)	Сумма начисленных процентов ($r \%$)	Сумма уменьшения основного долга (тыс.руб)	Остаток долга (тыс.руб)
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				



ЗАДАЧА № 3.



Номер платежа	Сумма долга (тыс.руб)	Сумма начисленных процентов ($r \%$)	Сумма уменьшения основного долга (тыс.руб)	Остаток долга (тыс.руб)
1	S	$\frac{15}{100} \cdot S$	X	$S - X$
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				



ЗАДАЧА № 3.



Номер платежа	Сумма долга (тыс.руб)	Сумма начисленных процентов ($r \%$)	Сумма уменьшения основного долга (тыс.руб)	Остаток долга (тыс.руб)
1	S	$\frac{15}{100} \cdot S$	X	$S - X$
2	$S - X$	$\frac{15}{100} \cdot (S - X)$	X	$S - 2X$
3	$S - 2X$	$\frac{15}{100} \cdot (S - 2X)$	X	$S - 3X$
4	$S - 3X$	$\frac{15}{100} \cdot (S - 3X)$	X	$S - 4X$
5				
6				
7				
8				



ЗАДАЧА № 3.



Номер платежа	Сумма долга (тыс.руб)	Сумма начисленных процентов ($r \%$)	Сумма уменьшения основного долга (тыс.руб)	Остаток долга (тыс.руб)
1	S	$\frac{15}{100} \cdot S$	X	$S - X$
2	$S - X$	$\frac{15}{100} \cdot (S - X)$	X	$S - 2X$
3	$S - 2X$	$\frac{15}{100} \cdot (S - 2X)$	X	$S - 3X$
4	$S - 3X$	$\frac{15}{100} \cdot (S - 3X)$	X	$S - 4X$
5	$S - 4X$	$\frac{13}{100} \cdot (S - 4X)$	X	$S - 5X$
6				
7				
8				



ЗАДАЧА № 3.



Номер платежа	Сумма долга (тыс.руб)	Сумма начисленных процентов ($r \%$)	Сумма уменьшения основного долга (тыс.руб)	Остаток долга (тыс.руб)
1	S	$\frac{15}{100} \cdot S$	X	$S - X$
2	$S - X$	$\frac{15}{100} \cdot (S - X)$	X	$S - 2X$
3	$S - 2X$	$\frac{15}{100} \cdot (S - 2X)$	X	$S - 3X$
4	$S - 3X$	$\frac{15}{100} \cdot (S - 3X)$	X	$S - 4X$
5	$S - 4X$	$\frac{13}{100} \cdot (S - 4X)$	X	$S - 5X$
6	$S - 5X$	$\frac{13}{100} \cdot (S - 5X)$	X	$S - 6X$
7	$S - 6X$	$\frac{13}{100} \cdot (S - 6X)$	X	$S - 7X$
8	$S - 7X$	$\frac{13}{100} \cdot (S - 7X)$	X	$S - 8X = 0$



Номер платежа	Сумма долга (тыс.руб)	Сумма начисленных процентов ($r \%$)	Сумма уменьшения основного долга (тыс.руб)	Остаток долга (тыс.руб)
1	S	$\frac{15}{100} \cdot S$	X	$S - X$
2	$S - X$	$\frac{15}{100} \cdot (S - X)$	X	$S - 2X$
3	$S - 2X$	$\frac{15}{100} \cdot (S - 2X)$	X	$S - 3X$
4	$S - 3X$	$\frac{15}{100} \cdot (S - 3X)$	X	$S - 4X$
5	$S - 4X$	$\frac{13}{100} \cdot (S - 4X)$	X	$S - 5X$
6	$S - 5X$	$\frac{13}{100} \cdot (S - 5X)$	X	$S - 6X$
7	$S - 6X$	$\frac{13}{100} \cdot (S - 6X)$	X	$S - 7X$
8	$S - 7X$	$\frac{13}{100} \cdot (S - 7X)$	X	$S - 8X = 0$

$$\begin{aligned} S_{\text{общ}} &= S + \frac{15}{100} \cdot \frac{S+S-3X}{2} \cdot 4 + \frac{13}{100} \cdot \frac{S-4X+S-7X}{2} \cdot 4 = \\ &= S + \frac{15}{100} \cdot \frac{2S-3X}{2} \cdot 4 + \frac{13}{100} \cdot \frac{2S-11X}{2} \cdot 4 = S + \frac{30 \cdot (2S-3X)}{100} + \frac{26 \cdot (2S-11X)}{100} = \\ &= S + 1,12 \cdot S - 3,76 \cdot X = \mathbf{2,12 \cdot S - 3,76 \cdot X} \end{aligned}$$





ЗАДАЧА № 3.



$$\text{Итак, } S_{\text{общ}} = 2,12 \cdot S - 3,76 \cdot X$$

Т.к. $S_{\text{общ}} - S = 1690$ тыс. руб. и $X = \frac{S}{8}$, то получим уравнение

$$2,12 \cdot S - 3,76 \cdot \frac{S}{8} - S = 1690$$

$$1,12 \cdot S - 0,47 \cdot S = 1690$$

$$0,65 \cdot S = 1690$$

$$S = \frac{1690 \cdot 100}{65}$$

$$S = 130 \cdot 20$$

$$S = 2600$$

$$S = 2\,600 \text{ тыс.руб} = 2,6 \text{ млн.руб}$$

ОТВЕТ: 2,6 млн. рублей





***Спасибо за
внимание!
Успехов на ЕГЭ!***

