Графическое решение задач с параметрами.
Задание №18 ЕГЭ профильного уровня

учитель математики
МОАУСОШ №4 им. А.И. Миргородского
г. Новокубанска
Борщакова Елена Николаевна

Графическое решение задач с параметрами

Формулы графиков функций и уравнений. Важные формулы геометрии:

$y = kx + b,$

$y = ax^2 + bx + c$

$$y = \frac{k}{x+m} + n$$

$y = |kx + b| + c$

$y = \sqrt{x+m} + n$

$y = ax^2 + b|x| + c$

$y = |ax^2 + bx + c|$

$|y| + |x| = m$

$|y| = ax^2 + bx + c$

$|y| = |ax^2 + bx + c|$

Уравнение окружности

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 = R^2,$

Расстояние от центра окружности до прямой

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Расстояние между двумя точками

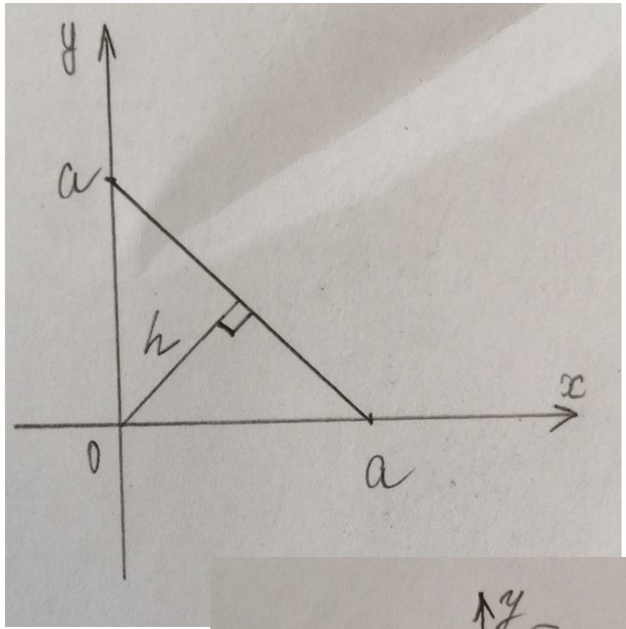
$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Графическое решение задач с параметрами

Пример №1

При каких значениях параметра ***a***, система имеет единственное решение?

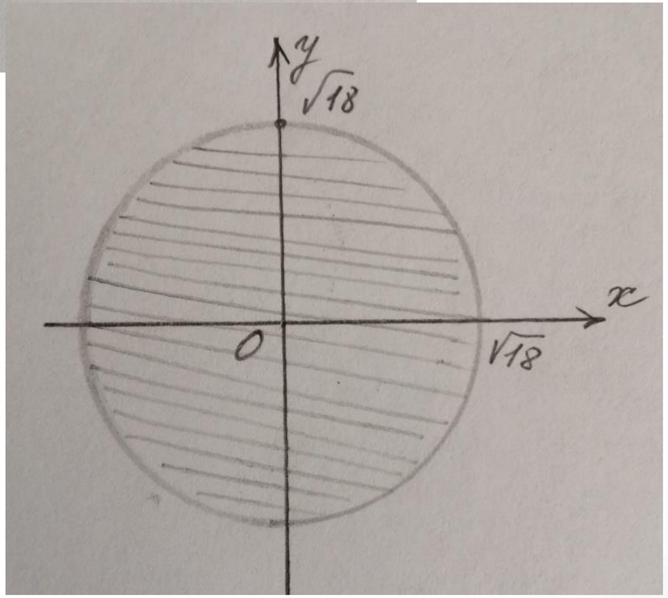
$$\begin{cases} \sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-a)^2}=\left|a\sqrt{2}\right| \\ x^2+y^2\le 18 \end{cases}$$



Рассмотрим первое уравнение: сумма двух расстояний равна числу, значит точка с координатами (x; y) лежит на отрезке с концами (0;a) и (a;0). Отрезок с осями координат представляет равнобедренный прямоугольный треугольник с высотой $h=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

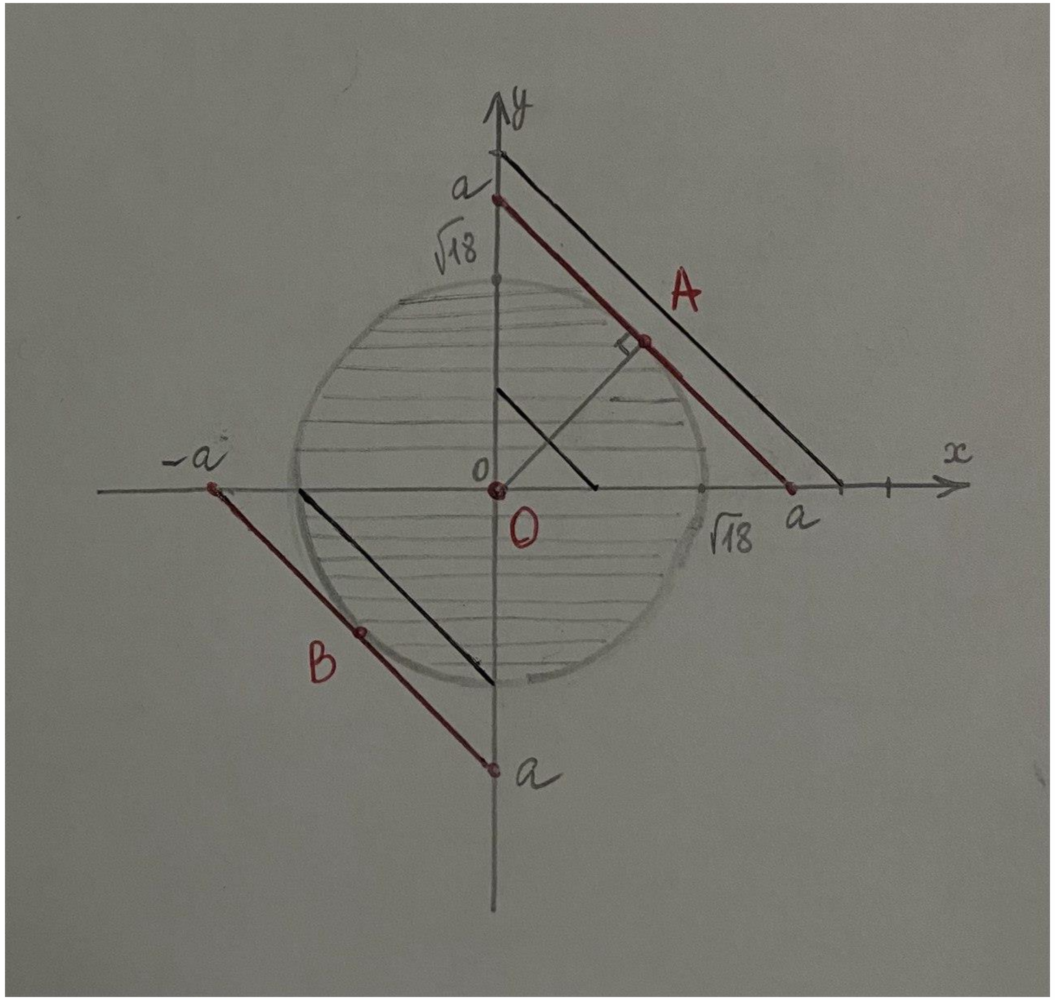
Неравенство представляет собой часть плоскости внутри окружности $R=\sqrt{18}$, точки окружности учитываются при решении системы.

Единственность решения вытекает из двух случаев: отрезок касается окружности и отрезок вырождается в точку.



Графическое решение задач с параметрами

Пример №1



Найдём длину отрезка OA=OB=R

OA = $\sqrt{18}$

$$0A = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{18}$$

$$a = \frac{2\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = 6$$

Касание в точке B, симметричной точке A достигается при a= - 6.

В начале координат отрезок вырождается в точку, поэтому a=0

Ответ: -6; 0; 6

Графическое решение задач с параметрами

Пример №2

При каких значениях ***a***, уравнение

$$|x^2 + a^2 - 6x - 4a| = 2x + 2a$$

имеет 4 различных решения?

Решение: Раскроем модуль

$$\begin{cases} x + a \geq 0 \\ x^2 + a^2 - 6x - 4a = 2x + 2a \end{cases} \text{или} \begin{cases} x + a \geq 0 \\ x^2 + a^2 - 6x - 4a = -2x - 2a \end{cases}$$

Переформулируем задачу при условии ***<u>a=y:</u>***
при каких y найдётся четыре различных x.
Рассмотрим первую систему и аналогичные преобразования выполним для второй системы.

$$\begin{cases} y \geq -x \\ x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 - 6y + 9 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq -x \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25 \end{cases}$$

Итак, система представляет часть окружности
с центром (4;3) и радиусом 5, расположенной выше
прямой *y* = - *x*.

$$\begin{cases} y \geq -x \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases}$$

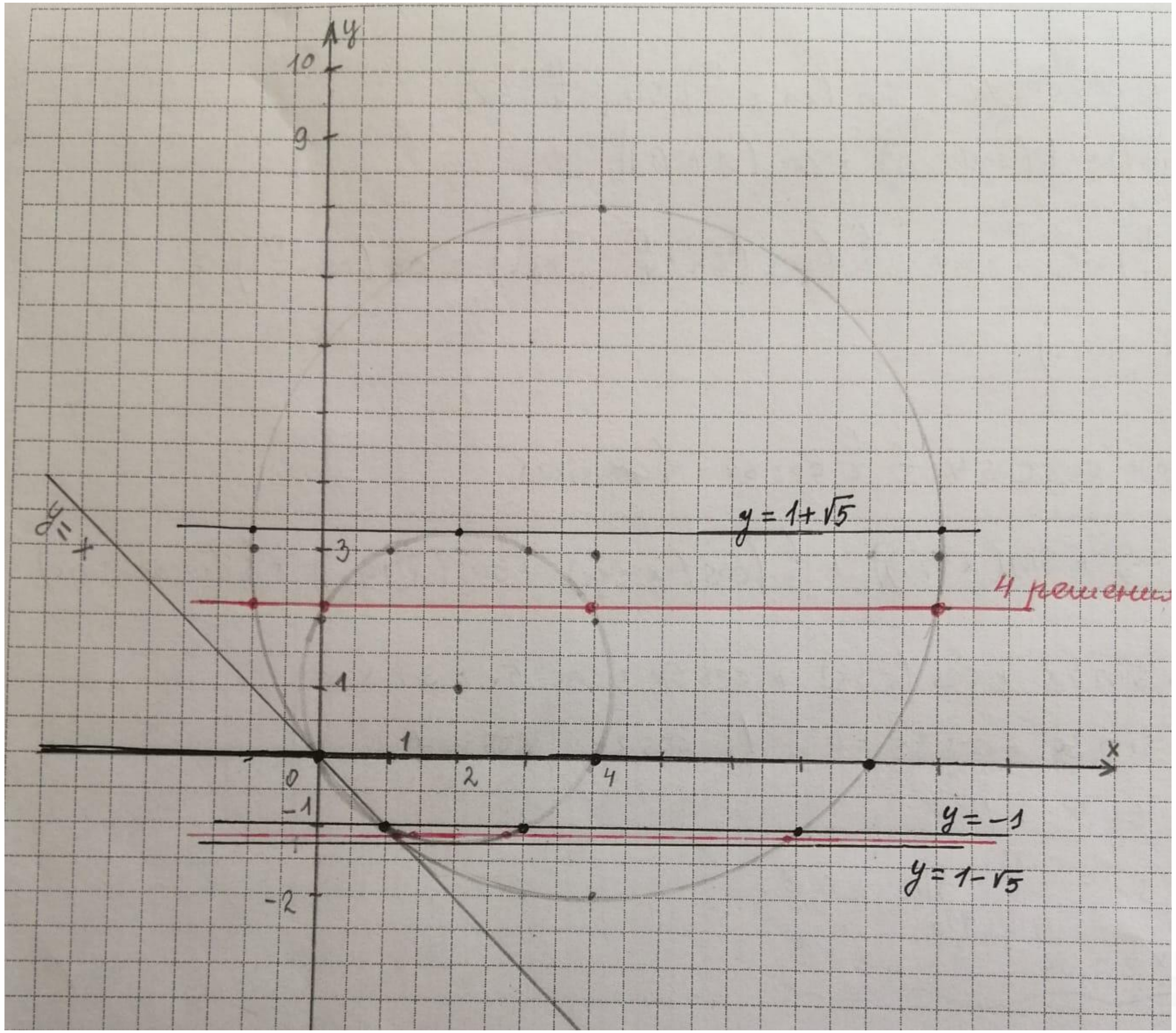
Вторая система представляет часть окружности
с центром (2; 1) и
радиусом $\sqrt{5}$, расположенной
выше прямой *y*= - *x*

Графическое решение задач с параметрами

Пример №2

Ответ:

$a \in (1-\sqrt{5}; -1) \cup (0; 1+\sqrt{5})$



Графическое решение задач с параметрами

Пример №3

При каких значениях параметра a уравнение имеет ровно 2 различных решения.

$$\frac{x^2-2x+a^2-4a}{x^2-a}=0$$

Решение: дробь равна нулю когда числитель равен 0, а знаменатель не равен 0.

$$\begin{cases} x^2-2x+a^2-4a=0 \\ x^2-a\neq 0 \end{cases}$$

Выделим полные квадраты относительно x и a

$$x^2-2x+1-1+a^2-4a+4-4=0$$

$$(x-1)^2+(a-2)^2=5$$

$$\begin{cases} (x-1)^2+(a-2)^2=5 \\ a\neq x^2 \end{cases}$$

В системе координат $x0a$ построим окружность с центром (1; 2) и $R=\sqrt{5}$ и параболу все точки которой не являются решениями уравнения.

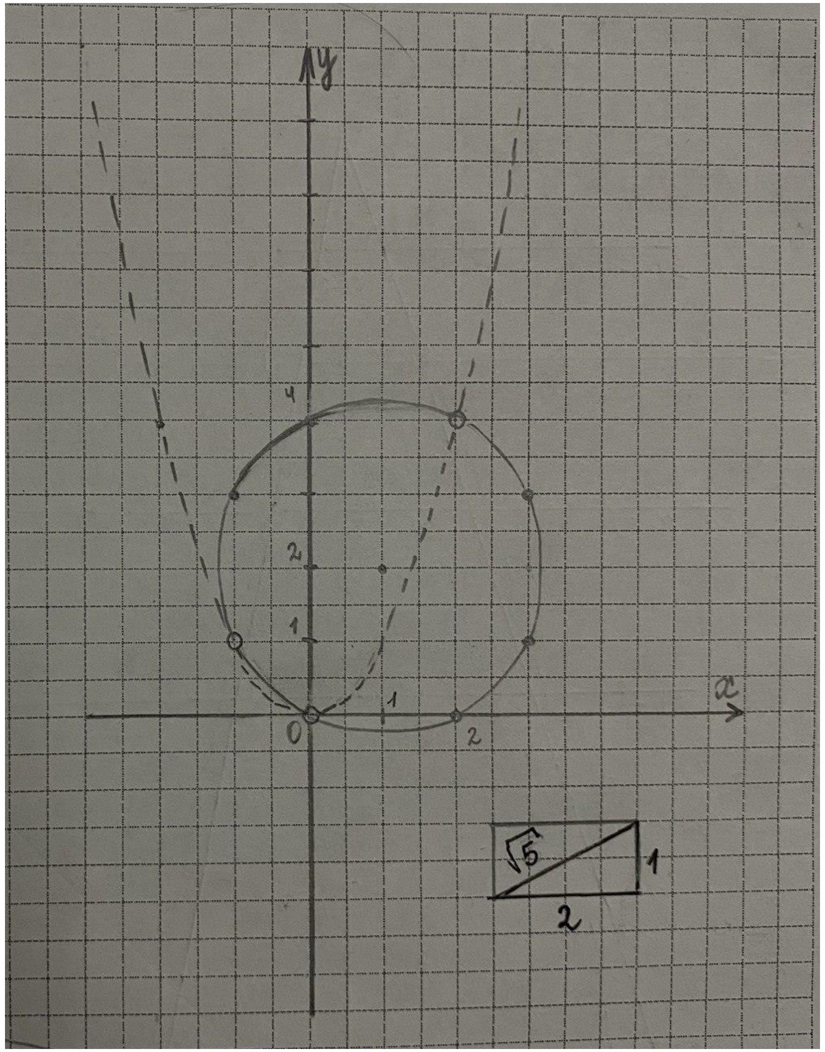
Парабола и окружность имеют общие точки с координатами (2; 4), (-1; 1), (0; 0), это значит корни числителя и знаменателя совпадают, поэтому их исключают из решения:

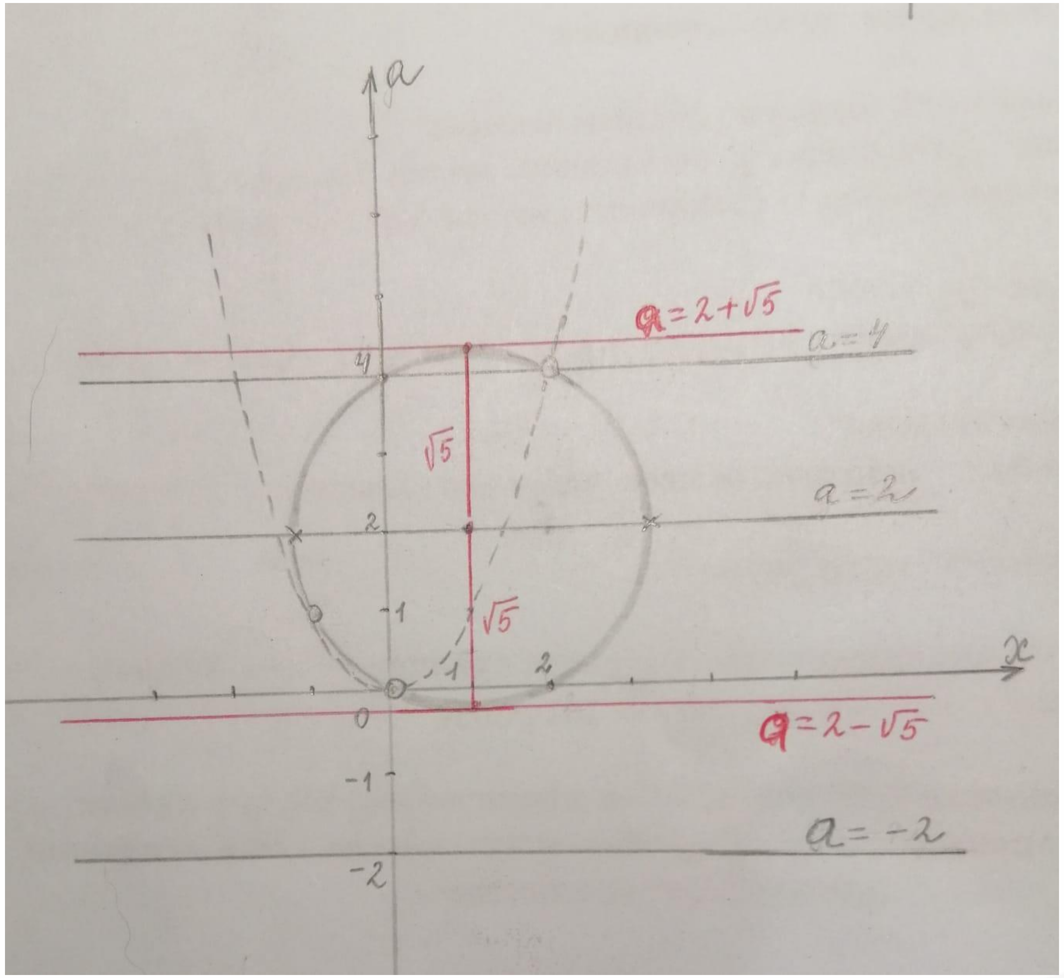
$$a\neq 4, a\neq 1, a\neq 0$$

Решения уравнения с помощью графика находим как точки пересечения окружности и прямой, параллельной оси x.

Графическое решение задач с параметрами

Пример №3





Ответ: $a \in (2-\sqrt{5}; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 4) \cup (4; 2+\sqrt{5})$

Графическое решение задач с параметрами

Пример №4

Найти все значения ***a*,** при каждом из которых система имеет два решения

$$\begin{cases}(xy - x + 8)\sqrt{y - x + 8} = 0 \\ y = 2x + a\end{cases}$$

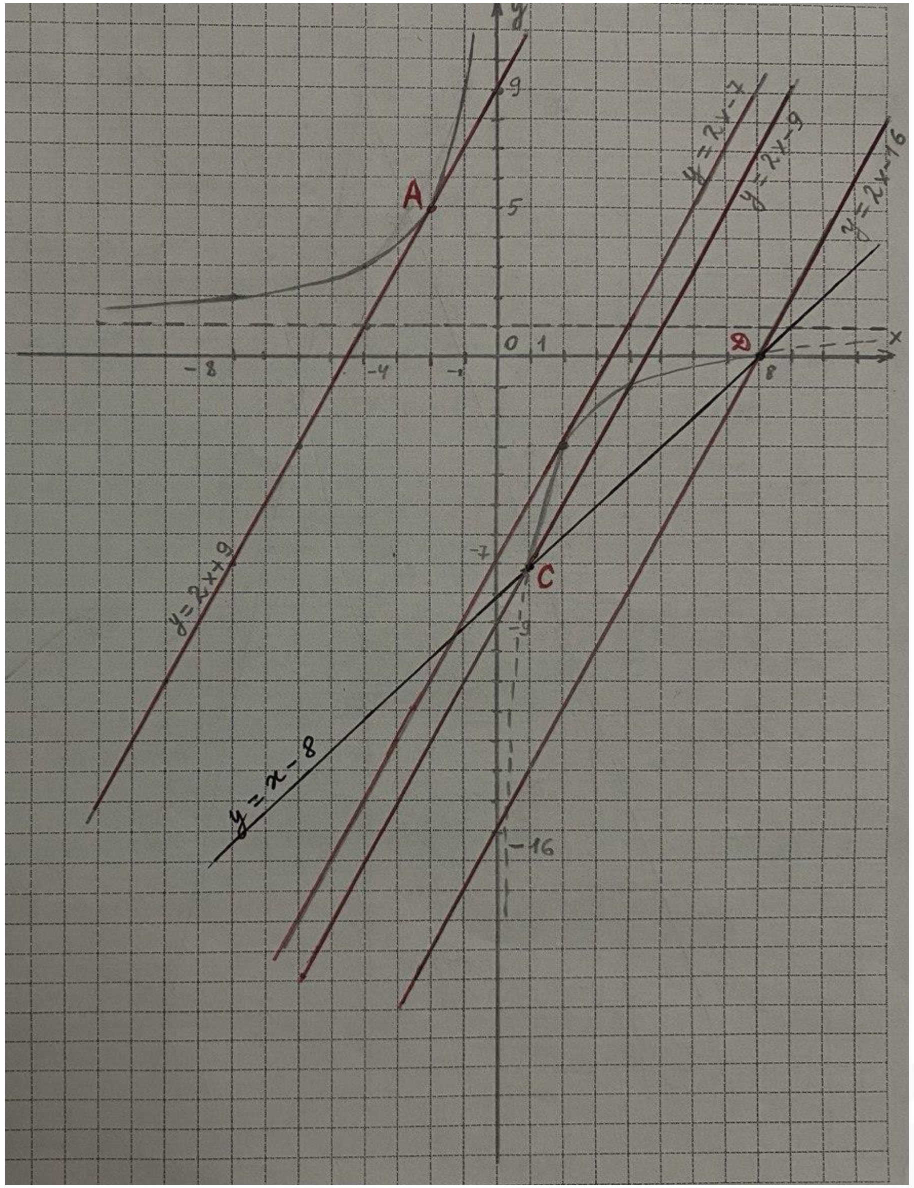
Решение: 1)Первое уравнение представляет собой совокупность двух уравнений при существовании подкоренного выражения.

$xy - x + 8 = 0$ или $y - x + 8 = 0$ при $y \geq x - 8$

$y = -\frac{8}{x} + 1$ $\quad$ $y = x - 8$

Графиком первого уравнения является объединение гиперболы и прямой, лежащих не ниже $y = x - 8$.

2) Графиком второго уравнения является семейство прямых с k=2



Графическое решение задач с параметрами

Пример №4

Найдем точки пересечения прямой и гиперболы из первого уравнения:

$$-\frac{8}{x}+1=x-8$$

$$x^2-9x+8=0$$

$$x_1=1, x_2=8$$

$$y_1=-7, y_2=0$$

Прямая и гипербола пересекаются в точках (1; -7), (8; 0). Обозначим эти точки C и D.

Прямая $y=2x+a$ проходит через D при a = - 16

$$0=2\cdot 8+a, a=-16$$

Проходит через точку C при a = - 9

$$2\cdot 1+a=-7, a=-9$$

При $a=-16$ система имеет 1 решение, при $a=-9$ система имеет 2 решения, т.о. система имеет **два** решения при $a\in(-16;-9]$

Система также имеет два решения, когда $y=2x+a$ касается гиперболы и пересекает прямую $y=x-8$.

$$-\frac{8}{x}+1=2x+a$$

$$2x^2+(a-1)x+8=0$$

$$D=(a-1)^2-64=(a-9)(a+7)=0$$

При $a=9$ и $a=-7$ прямая $y=2x+a$ касается гиперболы и пересекает прямую $y=x-8$.

Ответ: $a\in(-16;-9], a=-7, a=9$

Графическое решение задач с параметрами

Пример №5

При каких значениях параметра ***a*** уравнение
имеет ровно 2 различных решения

$$\frac{|4x| - x - 3 - a}{x^2 - x - a} = 0$$

Решение: Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель
равен 0, знаменатель не равен 0.

$$\begin{cases} |4x| - x - 3 - a = 0 \\ x^2 - x - a \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = |4x| - x - 3 \\ a \neq x^2 - x \end{cases}$$

Построим в системе *x0a* графики уравнений: ломаную и параболу.

$$a = \begin{cases} 3x - 3, x \geq 0 \\ -5x - 3, x < 0 \end{cases}, \qquad a = x^2 - x,$$ вершина (0,5; -0,5)

Найдем общие точки ломаной и параболы, т.е. при каких значениях *x* и *a* числитель и знаменатель одновременно обращаются в ноль. Решим уравнение:

$$|4x| - x - 3 = x^2 - x,$$
$$|4x| = x^2 + 3,$$

$4x = x^2 + 3,$ или $-4x = x^2 + 3,$

$x^2 - 4x - 3 = 0\,,$ $\qquad x^2 + 4x + 3 = 0.$

$x_1 = 1,\quad x_2 = 3,\quad x_3 = -1,\quad x_4 = -3$

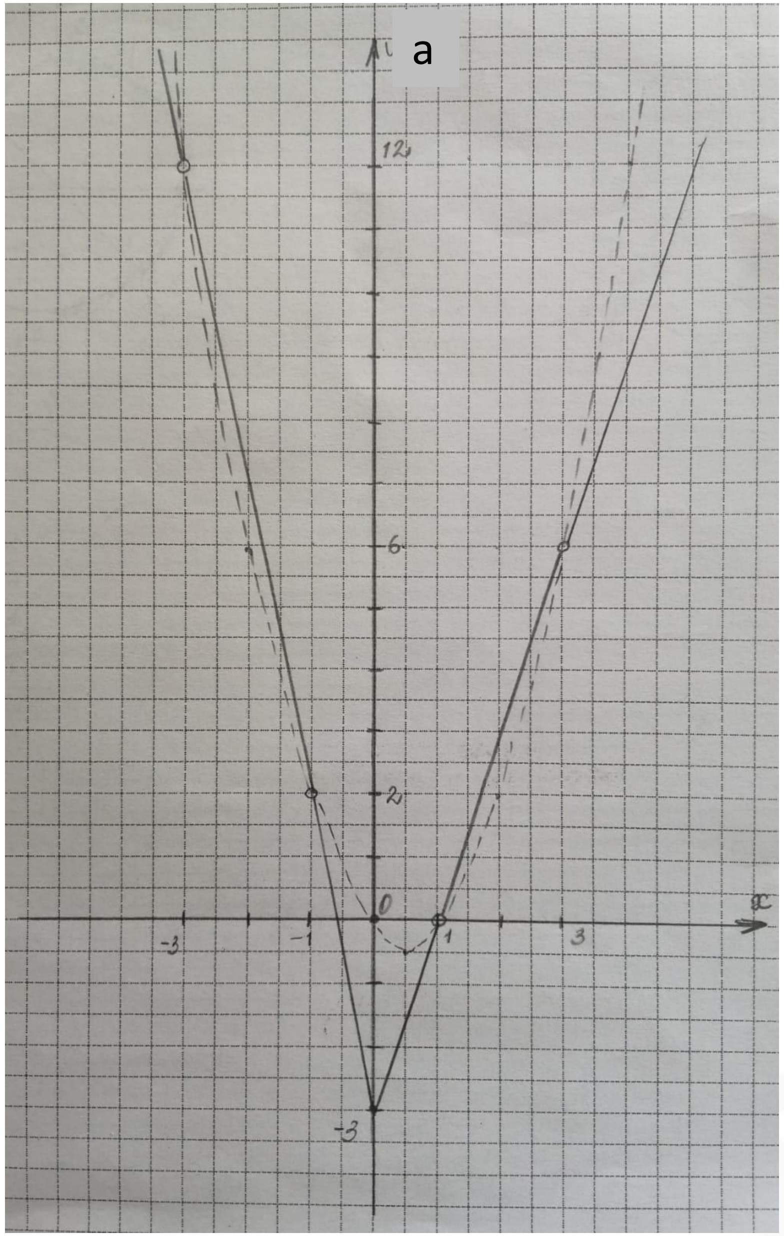
Итак, при данных значениях x параметр принимает следующие значения соответственно 0; 6; 2; 12.
Уравнение имеет ровно два различных значения когда прямая *a*=*m*, параллельная оси *x* пересекает ломаную в двух точках, т.е.
$a > -3,$ кроме
$a \neq 0, a \neq 2, a \neq 6, a \neq 12$

Графическое решение задач с параметрами

Пример №5

Ответ:

$\boldsymbol{a} \in (\boldsymbol{-3; 0}) \cup (\boldsymbol{0; 2}) \cup (\boldsymbol{2; 6}) \cup (\boldsymbol{6; 12}) \cup (\boldsymbol{12; +\infty})$



Спасибо за внимание!